

Nicolae Cotfas

Liviu-Adrian Cotfas

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Cartea este scrisă în format B5.

Este o versiune extinsă a celei apărute în 2010.

Nicolae Cotfas: Tel. 074 278 4634

E-mail: ncotfas@yahoo.com

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

COPERTA IV:

Prezenta carte, rezultat al colaborării dintre un matematician pasionat de fizica matematică și un informatician, este o introducere în analiza matematică, amplu ilustrată cu exemple concrete și programe în MATHEMATICA.

Se urmărește atât familiarizarea cititorului cu elemente de bază ale analizei matematice reale și utilizarea programului MATHEMATICA, cât și o inițiere în analiza complexă, teoria seriilor Fourier, teoria distribuțiilor, transformarea Fourier și teoria spațiilor Hilbert.

Introducere

Analiza matematică este o componentă esențială a aparatului matematic implicat în modelele teoretice utilizate în fizică. Nu este posibilă o descriere adecvată sistemelor fizice și înțelegerea proceselor care au loc fără cunoașterea analizei matematice.

Intenția autorilor este de a prezenta elemente de bază ale analizei reale și complexe într-o expunere în care matematica se împletește cu informatica. Pentru a ușura înțelegerea, noțiunile și rezultatele noi sunt prezentate ca extinderi ale unora studiate anterior. În general, punctul de plecare ales este un rezumat concis al unor noțiuni și rezultate studiate în liceu sau exemple concrete adecvate.

S-a urmărit ca prezentarea să fie directă, clară, concisă și cât mai prietenoasă cu cititorul. Împărțirea materialului expus în itemi a permis inserarea unui număr mare de trimiteri atât la definiții și teoreme cat și la diverse comentarii, exemple și exerciții.

Cartea se bazează pe cursul predat timp de mai mulți ani de primul autor la Facultatea de Fizică, Universitatea București. Noțiunile și rezultatele teoretice au fost amplu ilustrate de al doilea autor prin inserarea unor exerciții și a unor aplicații bazate pe programul MATHEMATICA.

București, 2016

Nicolae Cotfas
Liviu-Adrian Cotfas

Cuprins

1	Mulțimi și funcții	11
1.1	Mulțimi	11
1.2	Mulțimi de numere	13
1.3	Funcții	17
1.4	Funcții trigonometrice	20
1.5	Mulțimi numărabile	25
2	Șiruri și serii	27
2.1	Șiruri de numere reale	27
2.2	Șiruri de elemente din $\mathbb{R}^2$	32
2.3	Spații normate	36
2.4	Spații metrice	37
2.5	Spații prehilbertiene	38
2.6	Șiruri în spații metrice	43
2.7	Serii de numere reale	45
2.8	Serii în spații normate	53
2.9	Șiruri de funcții	54
2.10	Serii de funcții	58
2.11	Serii de puteri	61
3	Elemente de topologie. Continuitate	67
3.1	Mulțimi deschise	67
3.2	Mulțimi închise	70
3.3	Limita unei funcții într-un punct	72
3.4	Funcții continue	76

3.5	Mulțimi compacte	80
3.6	Mulțimi conexe	83
4	Funcții diferențiabile	89
4.1	Funcții reale de o variabilă reală	89
4.2	Funcții vectoriale de o variabilă reală	96
4.3	Funcții diferențiabile	99
4.4	Funcții reale de mai multe variabile	102
4.5	Funcții vectoriale de mai multe variabile	109
4.6	Derivate parțiale de ordin superior	114
4.7	Diferențiale de ordin superior	120
4.8	Dezvoltări Taylor	122
4.9	Extremele funcțiilor de mai multe variabile	124
4.10	Teorema funcțiilor implicite	131
4.11	Teorema de inversiune locală	134
5	Primitive și integrale simple	137
5.1	Primitive	137
5.2	Integrala definită	141
5.3	Integrale improprii	155
5.4	Integrale în sensul valorii principale	161
5.5	Integrale cu parametru	162
5.6	Funcția Γ a lui Euler	167
6	Integrale curbilinii	169
6.1	Integrala curbilinie de primul tip	169
6.2	Integrala curbilinie de al doilea tip	174
7	Integrale duble	177
7.1	Definiție și proprietăți	177
7.2	Schimbări de variabile	186
7.3	Formula lui Green	190
7.4	Integrale curbilinii în plan independente de drum	193
7.5	Integrale duble improprii	196

8	Integrale de suprafață	199
8.1	Integrala de suprafață de primul tip	199
8.2	Integrala de suprafață de al doilea tip	204
8.3	Formula lui Stokes	206
8.4	Integrale curbilinii în spațiu independente de drum	207
9	Integrale triple	209
9.1	Definiție și proprietăți	209
9.2	Formula Gauss-Ostrogradski	213
10	Elemente de analiză complexă	215
10.1	Numere complexe	215
10.2	Șiruri de numere complexe	222
10.3	Functii complexe de variabilă complexă	225
10.4	Integrala complexă	235
10.5	Serii Laurent	255
10.6	Calculul integralelor cu ajutorul reziduurilor	266
11	Serii de funcții ortogonale	277
11.1	Baze ortonormate în spații finit-dimensionale	277
11.2	Serii Fourier trigonometrice cu perioada 2π	280
11.3	Serii Fourier cu perioada 2π	291
11.4	Serii Fourier cu perioada T	293
11.5	Serii de polinoame Legendre	300
11.6	Serii de polinoame Laguerre	308
11.7	Serii de polinoame Hermite	311
12	Elemente de teoria distribuțiilor	315
12.1	Distribuții privite ca limite de șiruri de funcții	315
12.2	Distribuții definite ca funcționale liniare	319
13	Transformarea Fourier	331
13.1	Transformarea Fourier finită	331
13.2	Transformarea Fourier a funcțiilor	337
13.3	Transformarea Fourier a distribuțiilor	344

14 Spații Hilbert	349
14.1 Introducere	349
14.2 Spații Hilbert finit-dimensionale	350
14.3 Spații Hilbert infinit-dimensionale separabile	355

Capitolul 1

Mulțimi și funcții

1.1 Mulțimi

1.1.1 Noțiunea de *mulțime* are un rol fundamental în analiză. Vom utiliza notația

$$x \in A,$$

citită *x aparține lui A*, pentru a indica faptul că *x* este element al mulțimii *A* și

$$x \notin A,$$

pentru a indica contrariul. Spunem că *A* este *submulțime* a lui *B* și scriem

$$A \subseteq B$$

dacă fiecare element al lui *A* aparține lui *B*. În caz contrar, scriem

$$A \not\subseteq B.$$

Două mulțimi sunt numite *egale* dacă sunt formate din aceleași elemente:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \quad \text{și} \quad B \subseteq A.$$

Mulțimea care nu conține niciun element, numită *mulțimea vidă*, este notată cu $\emptyset$.

1.1.2 Mulțimea tuturor submulțimilor (părților) mulțimii $A = \{1, 2, 3\}$ este

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Deoarece o mulțime *M* cu *n* elemente are C_n^k submulțimi cu *k* elemente, rezultă că $\mathcal{P}(M)$ are $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$ elemente.

1.1.3 Definiție (Operații cu mulțimi).

Reuniunea : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \}.$

Intersecția : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ și } x \in B \}.$

Diferența : $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ și } x \notin B \}.$

Produsul cartezian : $A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B \}.$

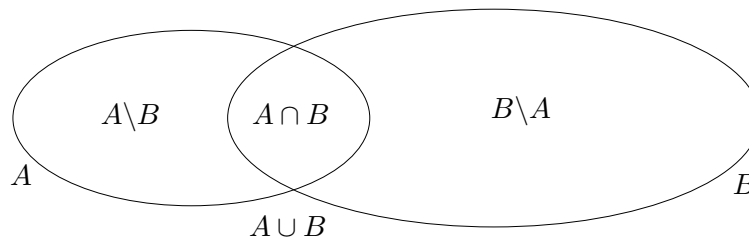


Figura 1.1: Operații cu mulțimi.

1.1.4 Exemplu. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{3, 5\}$. Avem:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}; \quad A \setminus B = \{1, 2\};$$

$$A \cap B = \{3\}; \quad A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}.$$

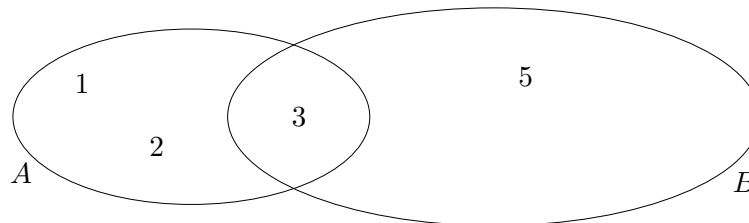


Figura 1.2: Exemplu referitor la operațiile cu mulțimi.

1.1.5 Exercițiu. Să se arate că relațiile

$$A \cup A = A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

au loc, oricare ar fi mulțimile A, B, C .

1.2 Mulțimi de numere

1.2.1 Ecuația $2 + x = 1$ nu admite soluție în mulțimea numerelor naturale

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \},$$

dar admite soluția $x = -1$ în mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \},$$

care este o extensie a lui $\mathbb{N}$, obținută prin adăugarea întregilor negativi $-1, -2, \dots$

1.2.2 Ecuația $2x = 1$, fără soluție în $\mathbb{Z}$, are soluție în mulțimea numerelor raționale

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{k} \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2, 3, \dots\} \right\} / \sim$$

formată din clase de fracții echivalente

$$\frac{n}{k} \sim \frac{n'}{k'} \quad \text{dacă} \quad nk' = n'k.$$

Soluția ecuației considerate este numărul rațional care se poate reprezenta folosind oricare dintre fracțiile echivalente

$$\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8} \sim \dots$$

Fiecare număr întreg n se identifică cu numărul rațional pentru care fracția $\frac{n}{1}$ este reprezentant. Mulțimea numerelor raționale devine în acest fel o extensie a mulțimii numerelor întregi $\mathbb{Z}$.

1.2.3 În afară de reprezentarea sub formă de fracție, pentru fiecare număr rațional se utilizează reprezentarea sub formă de fracție zecimală, obținută prin efectuarea împărțirii numărătorului la numitor. De exemplu,

$$\frac{1}{2} = 0.5000\dots = 0.5, \quad \frac{2}{3} = 0.666\dots = 0.(6), \quad \frac{2}{15} = 0.1333\dots = 0.1(3).$$

Deoarece, în cazul numărului $\frac{n}{k}$, pe parcursul efectuării împărțirii lui n la k singurele resturi posibile sunt $0, 1, \dots, k-1$, rezultă că în cazul reprezentării unui număr rațional sub formă de fracție zecimală pot să apară doar fracțiile zecimale finite, cele periodice și cele periodice mixte. Se poate constata că, de exemplu, fracțiile 0.5 și $0.4(9)$ reprezintă același număr rațional

$$0.4(9) = \frac{49 - 4}{90} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Pentru ca reprezentarea numerelor raționale sub formă de fracție zecimală să fie unică, este suficient să eliminăm fracțiile zecimale cu perioada 9.

1.2.4 Propoziție. Ecuația $x^2 = 2$ nu admite soluție în $\mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există $\frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{n^2}{k^2} = 2$. Putem admite că fracția $\frac{n}{k}$ este ireductibilă deoarece, în caz contrar, o putem înlocui cu fracția rezultată în urma simplificării cu cel mai mare divizor comun al lui n și k . Din relația $\frac{n^2}{k^2} = 2$, scrisă sub forma $n^2 = 2k^2$, rezultă că n trebuie să fie divizibil cu 2. Punând $n = 2m$ în $n^2 = 2k^2$, se obține relația $2m^2 = k^2$ din care rezultă că k trebuie să fie divizibil cu 2, ceea ce este în contradicție cu ireductibilitatea fracției $\frac{n}{k}$. Rămâne că nu există $\frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{n^2}{k^2} = 2$.

1.2.5 Prin axă a numerelor se înțelege o dreaptă pe care s-a fixat un punct (numit origine), o unitate de măsură și un sens (numit sensul pozitiv). Fiecărui număr rațional îi corespunde, în mod natural, un punct pe axa numerelor. Din propoziția anterioară, rezultă că punctele situate pe axa numerelor la o distanță față de origine egală cu diagonala unui pătrat de latură 1 nu corespund unor numere raționale. După reprezentarea pe axă a tuturor numerelor raționale, rămân poziții neocupate.

1.2.6 Ecuația $x^2 = 2$ admite soluțiile $x = \pm\sqrt{2}$ în mulțimea numerelor reale

$$\mathbb{R} = \left\{ n.a_1a_2a_3... \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \text{ și nu există } k \text{ astfel încât} \\ a_j = 9, \text{ oricare ar fi } j \geq k \end{array} \right\},$$

care este o extindere a mulțimii numerelor raționale $\mathbb{Q}$. Fiecărui număr real îi corespunde, în mod natural, un punct pe axa numerelor. După reprezentarea tuturor numerelor reale nu mai rămân poziții libere pe axa numerelor.

1.2.7 Fie M o submulțime a lui $\mathbb{R}$. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, definim

$$aM + b = \{ ax + b \mid x \in M \}.$$

De exemplu,

$$2\mathbb{Z} + 1 = \{ 2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z} \}, \quad \frac{\pi}{2} + 2\mathbb{Z}\pi = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.2.8 Definiție. Fie M o submulțime a lui $\mathbb{R}$. Prin definiție:

$\min M =$ cel mai mic element al lui M , adică elementul $a \in M$ cu $a \leq x, \forall x \in M$;

$\max M =$ cel mai mare element al lui M , adică elementul $a \in M$ cu $a \geq x, \forall x \in M$;

Minorant al lui $M =$ element $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq x, \forall x \in M$;

Majorant al lui $M =$ element $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \geq x, \forall x \in M$;

$\inf M$ = cel mai mare minorant al lui M , numit *infimumul* lui M ;

$\sup M$ = cel mai mic majorant al lui M , numit *supremumul* lui M ;

M este *mulțime minorată* = M admite cel puțin un minorant;

M este *mulțime majorată* = M admite cel puțin un majorant.

1.2.9 Exemplu. Avem: $\min[0, 1) = \inf[0, 1) = 0$, $\max[0, 1)$ nu există, $\sup[0, 1) = 1$.

1.2.10 Relația de ordine $\leq$ și operațiile de adunare și înmulțire se extind în mod natural de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$. Se poate arăta că $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ este un corp comutativ total ordonat, în care pentru orice mulțime majorată M există $\sup M$, adică:

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- 2) $0 + x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
- 3) pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $-x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + (-x) = 0$;
- 4) $x + y = y + x$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
- 5) $(xy)z = x(yz)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- 6) $1x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
- 7) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ există $x^{-1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $xx^{-1} = 1$;
- 8) $xy = yx$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
- 9) $x(y + z) = xy + xz$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$;
- 10) oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, avem fie $x \leq y$, fie $y \leq x$;
- 11) $x \leq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
- 12) $\left. \begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array} \right\} \implies x = y$;
- 13) $\left. \begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq z \end{array} \right\} \implies x \leq z$;
- 14) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}$;
- 15) $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\} \implies 0 \leq xy$;
- 16) pentru orice mulțime majorată $M \subseteq \mathbb{R}$, există $\sup M$.

Toate proprietățile referitoare la numere reale se pot deduce din relațiile 1)-16).

1.2.11 Ecuația de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{unde } a \neq 0,$$

admite în cazul $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ soluțiile reale

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

În cazul $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, ecuația considerată nu admite rădăcini reale.

1.2.12 Admițând că există un “număr imaginar” i astfel încât $i^2 = -1$, ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admite în cazul $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ soluțiile

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

în *mulțimea numerelor complexe*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.13 Mulțimea $\mathbb{C}$ reprezintă o extindere a mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$, fiecare număr real x putând fi identificat în mod natural cu numărul complex $x + 0i$. Avem astfel relația (v. Fig. 1.3)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

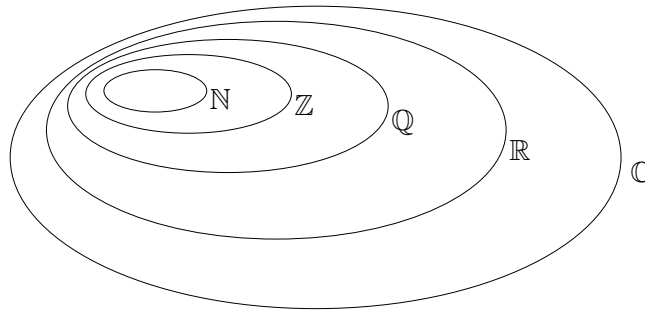


Figura 1.3: Mulțimi de numere.

1.2.14 În cazul numerelor reale este utilă introducerea simbolurilor ∞ și $-\infty$ cu proprietăți binecunoscute din matematica de liceu și considerarea *dreptei reale încheiate*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Este utilă extinderea noțiunilor de infimum și supremum:

$$\inf M = \begin{cases} \text{cel mai mare minorant} & \text{dacă } M \text{ este minorată,} \\ -\infty & \text{dacă } M \text{ nu este minorată;} \end{cases}$$

$$\sup M = \begin{cases} \text{cel mai mic majorant} & \text{dacă } M \text{ este majorată,} \\ \infty & \text{dacă } M \text{ nu este majorată.} \end{cases}$$

În cazul planului complex se obțin anumite avantaje prin adăugarea, de această dată, a unui singur punct “de la infinit”, adică prin considerarea *planului complex extins* $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1.3 Funcții

1.3.1 Definiție. Prin *funcție* (sau *aplicație*) se înțelege un ansamblu

$$f : E \longrightarrow F,$$

format din două mulțimi

E =domeniul de definiție al funcției,

F =mulțimea în care funcția ia valori

și o lege de corespondență

$$E \longrightarrow F : x \mapsto f(x),$$

prin care fiecărui element din E i se asociază un unic element din F .

1.3.2 În Fig. 1.4 sunt reprezentate toate funcțiile de forma $f : \{0, 1\} \rightarrow \{2, \sqrt{3}\}$.

Dacă E are n elemente și F are k elemente, atunci numărul total de funcții $f : E \rightarrow F$ este k^n .

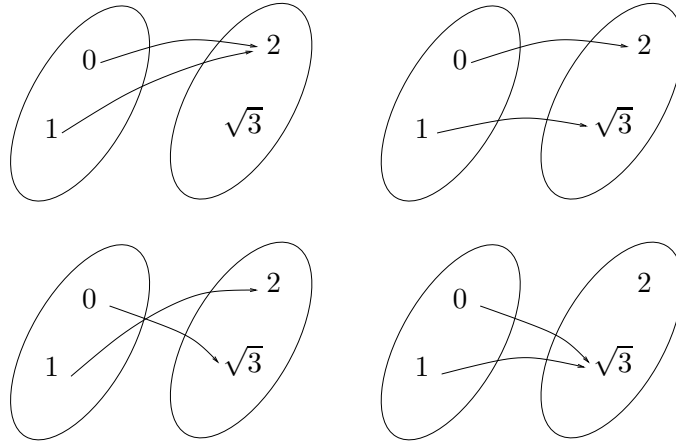


Figura 1.4: Funcțiile de forma $f : \{0, 1\} \rightarrow \{2, \sqrt{3}\}$.

1.3.3 Definiție. Fie $f : E \longrightarrow F$ o funcție și $A \subseteq E$, $D \subseteq F$ submulțimi. Mulțimea

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

se numește *imaginea* (directă) a lui A prin f , iar mulțimea

$$f^{-1}(D) = \{ x \in E \mid f(x) \in D \}$$

se numește *imaginea reciprocă* (sau inversă) a lui D prin f .

1.3.4 Exercițiu. Dacă $f : E \longrightarrow F$ este funcție, atunci

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B), \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),$$

oricare ar fi submulțimile $A, B \subseteq E$ și $C, D \subseteq F$.

1.3.5 Definiție. Funcția $f : E \longrightarrow F$ este numită *injectivă* dacă la elemente diferite din E corespund elemente diferite în F , adică dacă are loc relația

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y),$$

echivalentă cu

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

1.3.6 Exemplu. Funcția $f : [0, \infty) \longrightarrow [3, \infty)$, $f(x) = 2x + 3$ este injectivă deoarece

$$f(x) = f(y) \implies 2x + 3 = 2y + 3 \implies x = y.$$

1.3.7 Definiție. Funcția $f : E \longrightarrow F$ este numită *surjectivă* dacă $f(E) = F$, adică dacă, oricare ar fi $y \in F$, există $x \in E$ astfel încât $f(x) = y$.

1.3.8 Exemplu. Pentru a analiza surjectivitatea funcției $f : [0, \infty) \longrightarrow [3, \infty)$,

$f(x) = 2x + 3$, avem de verificat dacă pentru $y \in [3, \infty)$ ales arbitrar există $x \in [0, \infty)$ cu $f(x) = y$, adică astfel încât $2x + 3 = y$.

Se constată că un astfel de element există și el este $x = (y - 3)/2$.

Funcția f este surjectivă.

1.3.9 Definiție. Funcția f este numită *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă.

1.3.10 Definiție. Fie $f : E \rightarrow F$ și $g : G \rightarrow H$ două funcții astfel încât $F \subseteq G$. Funcția

$$g \circ f : E \longrightarrow H, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

se numește *funcția compusă* a funcțiilor g și f (v. Fig. 1.5).

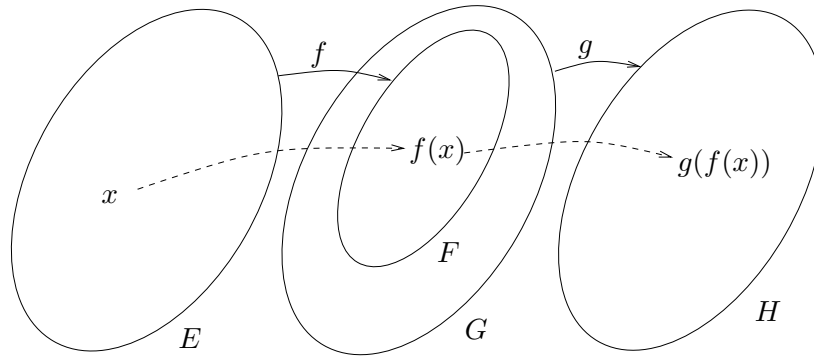


Figura 1.5: Compunerea funcțiilor.

1.3.11 Propoziție. Dacă $f: E \rightarrow F$, $g: G \rightarrow H$ și $h: K \rightarrow L$ sunt trei funcții astfel încât $F \subseteq G$ și $H \subseteq K$, atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demonstrație. Oricare ar fi $x \in E$, avem

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

1.3.12 Dacă funcția $f: E \rightarrow F$ este bijectivă, atunci pentru fiecare $y \in F$ există un unic element $x \in E$ astfel încât $f(x) = y$. Rezultă existența unei funcții

$$f^{-1}: F \rightarrow E: y \mapsto x,$$

numită *inversa* lui f , astfel încât

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{și} \quad f(f^{-1}(y)) = y,$$

oricare ar fi $x \in E$ și $y \in F$, adică astfel încât

$$f^{-1} \circ f = I_E \quad \text{și} \quad f \circ f^{-1} = I_F,$$

unde $I_E: E \rightarrow E$, $I_E(x) = x$ și $I_F: F \rightarrow F$, $I_F(y) = y$.

1.3.13 Inverse ale unor funcții bijective (v. Fig. 1.6 și Fig. 1.7):

$$f: [0, \infty) \rightarrow [3, \infty), f(x) = 2x + 3 \quad \text{are inversa} \quad f^{-1}: [3, \infty) \rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2};$$

$$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty): x \mapsto x^2 \quad \text{are inversa} \quad [0, \infty) \rightarrow [0, \infty): x \mapsto \sqrt{x};$$

$$\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty): x \mapsto e^x \quad \text{are inversa} \quad (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln x.$$

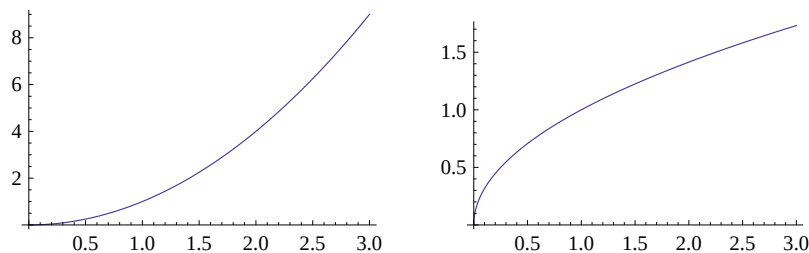


Figura 1.6: Funcția $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ și inversa ei $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$.

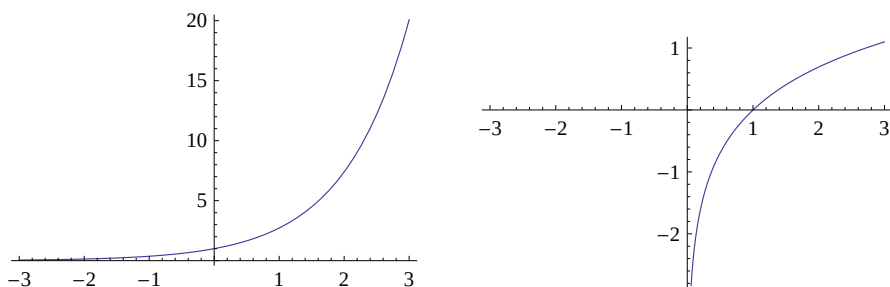


Figura 1.7: Funcția $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto e^x$ și inversa ei $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$.

1.4 Funcții trigonometrice

1.4.1 Se știe că unghiurile, măsurate în radiani, pot fi reprezentate în mod natural pe circumferința cercului trigonometric (v. Fig. 1.8). Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, unghiurile

$$\dots, t-4\pi, t-2\pi, t, t+2\pi, t+4\pi, \dots$$

se reprezintă în același punct.

1.4.2 Definiție. Funcția *cosinus* este funcția (v. Fig. 1.8)

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : t \mapsto \cos t,$$

unde $\cos t$ este coordonata proiecției pe axa orizontală a punctului în care se reprezintă t pe circumferința cercului trigonometric.

1.4.3 Definiție. Funcția *sinus* este funcția (v. Fig. 1.8)

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : t \mapsto \sin t,$$

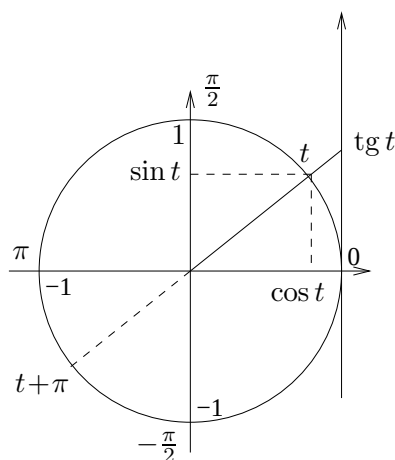


Figura 1.8: Funcțiile sinus, cosinus și tangentă.

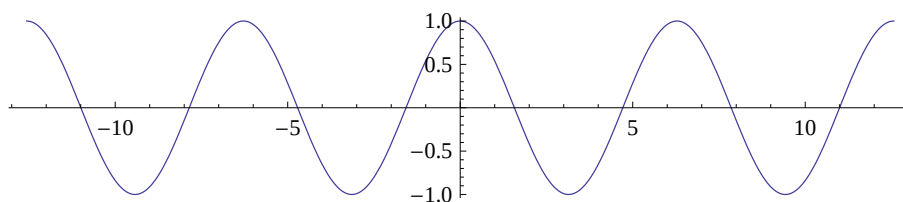


Figura 1.9: Graficul funcției cosinus.

unde $\sin t$ este coordonata proiecției pe axa verticală a punctului în care se reprezintă t pe circumferința cercului trigonometric.

1.4.4 Direct din definițiile anterioare rezultă că:

- Funcțiile *cosinus* și *sinus* sunt periodice cu perioada principală 2π :

$$\begin{aligned}\cos(t + 2\pi) &= \cos t, \\ \sin(t + 2\pi) &= \sin t,\end{aligned}\quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

- Funcția *cosinus* este funcție pară, iar funcția *sinus* impară:

$$\begin{aligned}\cos(-t) &= \cos t, \\ \sin(-t) &= -\sin t,\end{aligned}\quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

- Funcțiile cosinus și sinus verifică relația fundamentală

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

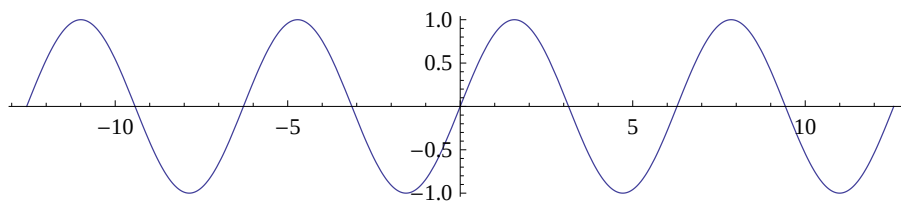


Figura 1.10: Graficul funcției sinus.

1.4.5 Unele valori se pot determina simplu utilizând geometria elementară:

	$t = 0$	$t = \frac{\pi}{6}$	$t = \frac{\pi}{4}$	$t = \frac{\pi}{3}$	$t = \frac{\pi}{2}$	$t = \pi$	$t = \frac{3\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

1.4.6 Utilizând geometria elementară se poate arăta că au loc relațiile fundamentale

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \end{aligned} \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R},$$

adică

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b, \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, \end{aligned} \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

1.4.7 Utilizând (1.1) și (1.2) se pot obține relațiile

$$\sin a = \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right),$$

$$\cos a = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right),$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2},$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2},$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)],$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}.$$

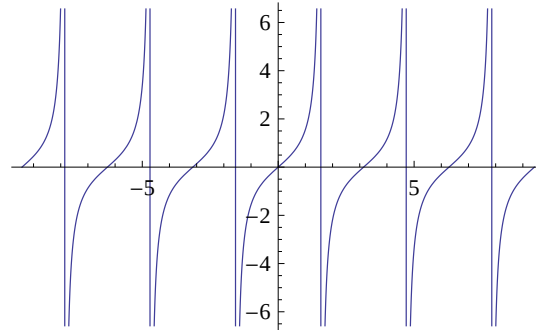


Figura 1.11: Graficul funcției tangentă.

1.4.8 O definiție geometrică a funcției tangentă (v. Fig. 1.8),

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \operatorname{tg} t,$$

se obține ducând o tangentă la cercul trigonometric în punctul $(1, 0)$.

Se pot deduce ușor relațiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \frac{\sin t}{\cos t}, & \operatorname{tg}(t+\pi) &= \operatorname{tg} t, & \operatorname{tg}(-a) &= -\operatorname{tg} a, \\ \operatorname{tg} 2a &= \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, & \operatorname{tg}(a \pm b) &= \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \end{aligned}$$

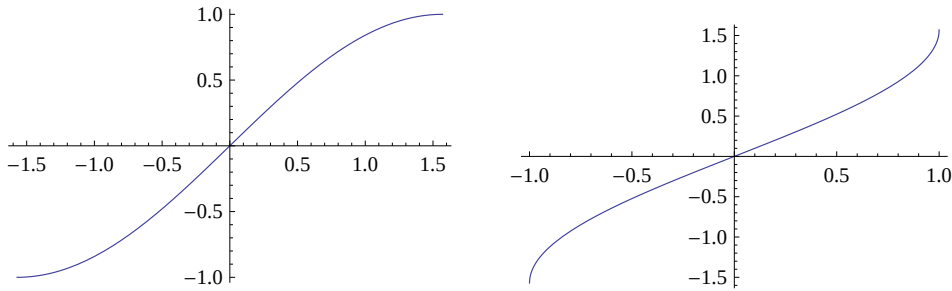


Figura 1.12: Funcția $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ și inversa ei $\arcsin x$.

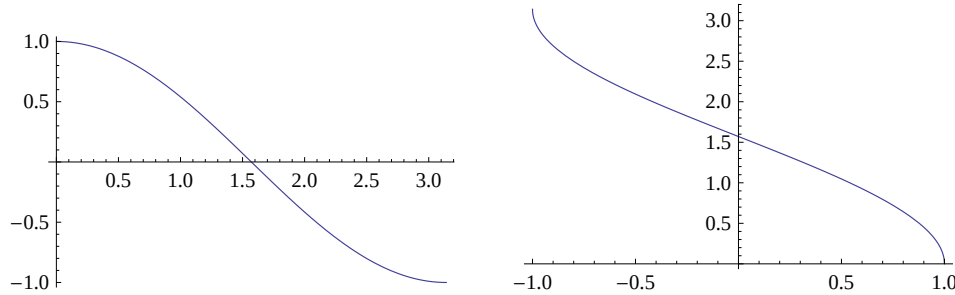


Figura 1.13: Funcția $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos x$ și inversa ei $\arccos x$.

1.4.9 Inverse ale unor funcții trigonometrice bijective (v. Fig. 1.12, 1.13, 1.14):

$$\begin{aligned} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin x & \quad \text{are inversa} \quad [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : x \mapsto \arcsin x; \\ [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos x & \quad \text{are inversa} \quad [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] : x \mapsto \arccos x; \\ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty) : x \mapsto \operatorname{tg} x & \quad \text{are inversa} \quad (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : x \mapsto \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

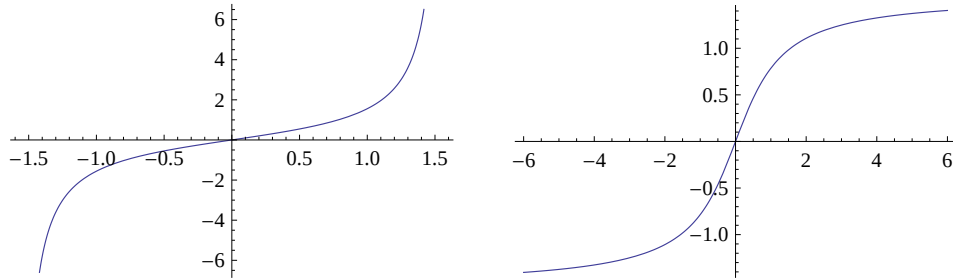


Figura 1.14: Funcția $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty) : x \mapsto \operatorname{tg} x$ și inversa ei $\operatorname{arctg} x$.

1.5 Mulțimi numărabile

1.5.1 Definiție. Spunem despre o mulțime M că este *numărabilă* dacă există o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \rightarrow M$.

1.5.2 O mulțime este numărabilă dacă și numai dacă poate fi scrisă sub forma unui șir. Mulțimea numerelor întregi este numărabilă deoarece se poate scrie sub forma

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots\}.$$

Mulțimea $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă (v. Fig. 1.15). Se poate arăta că mulțimile

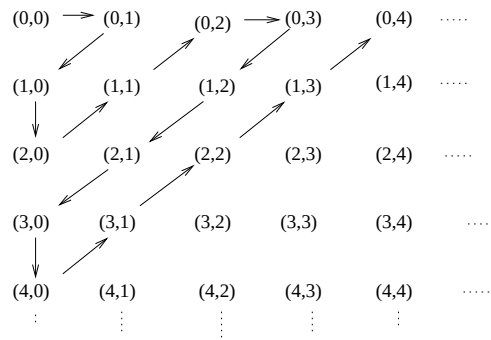


Figura 1.15: Mulțimea $\mathbb{N}^2$ se poate scrie sub forma unui șir.

de forma $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$ și $\mathbb{Q}^n$ sunt numărabile.

1.5.3 Mulțimea $\mathbb{Q}_+$ a numerelor raționale pozitive este numărabilă. Alegând pentru fiecare număr fracția ireductibilă corespunzătoare, formăm un șir

punând mai întâi fracțiile cu suma dintre numărător și numitor egală cu 1, apoi cele pentru care suma este 2, apoi cele pentru care suma este 3, etc. Rezultă imediat că mulțimea $\mathbb{Q}$ a tuturor numerelor raționale este și ea numărabilă.

1.5.4 Intervalul $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ nu este mulțime numărabilă. Dacă ar fi numărabilă, elementele acestei mulțimi ar putea fi așezate sub forma unui șir

$$\begin{array}{l} 0.a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots \\ 0.a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots \\ 0.a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots \\ 0.a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \dots \\ \vdots \end{array}$$

Se constată însă că acest șir nu conține toate elementele lui $[0, 1)$. El nu conține numărul $0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ ale cărui cifre sunt astfel încât $a_1 \neq a_{11}$, $a_2 \neq a_{22}$, $a_3 \neq a_{33}$, ...

1.5.5 Definiție. Spunem despre o mulțime M că are *puterea continuului* dacă există o funcție bijectivă $f : [0, 1) \rightarrow M$.

1.5.6 Mulțimea $[0, 1)^2 = [0, 1) \times [0, 1) = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1)\}$ are puterea continuului deoarece funcția $[0, 1) \rightarrow [0, 1)^2 : 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \mapsto (0.a_1 a_3 a_5 \dots, 0.a_2 a_4 a_6 \dots)$ este bijectivă. Mulțimea $[1, \infty)$ are puterea continuului deoarece funcția $[0, 1) \rightarrow [1, \infty) : x \mapsto 1/(1-x)$ este bijectivă. Se poate arăta că mulțimile $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și în general $\mathbb{R}^n$ au puterea continuului.

Capitolul 2

Șiruri și serii

2.1 Șiruri de numere reale

2.1.1 Teoremă. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x > 0$, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx \geq y$.

Demonstrație. Presupunând contrariul, adică $nx < y$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, rezultă că mulțimea $M = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ este majorată și deci există un cel mai mic majorant $\alpha = \sup M$. În particular, α este un majorant al mulțimii M , adică $nx \leq \alpha$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, $\alpha - x$ nu este majorant al lui M și prin urmare trebuie să existe $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $kx > \alpha - x$, adică astfel încât $(k+1)x > \alpha$. Acest lucru este însă în contradicție cu faptul că α este majorant al lui M .

2.1.2 Propoziție. Dacă $a \in \mathbb{R}$ și dacă $0 \leq a \leq \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, atunci $a = 0$.

Demonstrație. Presupunem că $a > 0$. Conform teoremei anterioare, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $na > 1$, adică astfel încât $a > \frac{1}{n}$, ceea ce este în contradicție cu faptul că $a \leq \varepsilon$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$.

2.1.3 Definiție. Aplicația *modul* pe $\mathbb{R}$ este

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0, \\ -x & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

2.1.4 Propoziție. Aplicația modul $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

- a) $|x| \geq 0$ și $|x| = 0 \iff x = 0$;
- b) $|xy| = |x| |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Proprietățile menționate rezultă direct din definiție.

2.1.5 Exercițiu. Să se arate că $||x| - |y|| \leq |x - y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Utilizând relația c), numită inegalitatea triunghiului, obținem inegalitățile

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|, \quad |y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|$$

din care rezultă relația $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$, echivalentă cu $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

2.1.6 Interpretări geometrice:

$$\begin{aligned} |x| &= \text{distanța pe axa numerelor dintre } x \text{ și } 0; \\ |x - y| &= \text{distanța pe axa numerelor dintre } x \text{ și } y. \end{aligned}$$

2.1.7 Aplicația

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|,$$

are proprietățile:

- a) $d(x, y) \geq 0$ și $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- b) $d(x, y) = d(y, x)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$;
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2.1.8 Definiție. Spunem că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este *convergent* cu limita a și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{sau} \quad x_n \rightarrow a$$

dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

2.1.9 MATHEMATICA: Limit[x[n], n -> Infinity]

$$\begin{aligned} \text{In}[1] &:= \text{Limit}[1/n, n \rightarrow \text{Infinity}] && \mapsto \text{Out}[1]=0 \\ \text{In}[2] &:= \text{Limit}[n/(n+1), n \rightarrow \text{Infinity}] && \mapsto \text{Out}[2]=1 \\ \text{In}[3] &:= \text{Limit}[n^{(1/n)}, n \rightarrow \text{Infinity}] && \mapsto \text{Out}[3]=1 \\ \text{In}[4] &:= \text{Limit}[(1+1/n)^n, n \rightarrow \text{Infinity}] && \mapsto \text{Out}[4]=e. \end{aligned}$$

2.1.10 Propoziție. *Limita unui șir convergent de numere reale este unică:*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \end{array} \right\} \implies a = b.$$

Demonstrație. Presupunem prin absurd că $a \neq b$ și notăm $\varepsilon = |a - b|/2$. Din definiția precedentă rezultă că există $n_\varepsilon, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$ și $|x_n - b| < \varepsilon$ pentru $n \geq n'_\varepsilon$. În particular, notând $m = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, trebuie ca $|a - b| = |a - x_m + x_m - b| \leq |x_m - a| + |x_m - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$, ceea ce este imposibil. Ramâne că $a = b$.

2.1.11 Definiție.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este numit *crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este numit *descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.1.12 Propoziție.

Un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ crescător și majorat este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ descrescător și minorat este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și $a = \sup_{n \geq 0} x_n$. Deoarece a este cel mai mic majorant, rezultă că $a - \varepsilon$ nu este majorant pentru mulțimea termenilor șirului și prin urmare există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Șirul fiind crescător, rezultă că avem $a - \varepsilon < x_n \leq a$, adică $|x_n - a| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

2.1.13 Definiție.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $\mathbb{R}$ este numit *mărginit* dacă există $r > 0$ astfel încât $|x_n| \leq r$, $\forall n$.

2.1.14 Propoziție. *Orice șir convergent de numere reale este mărginit.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir convergent cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < 1$, oricare ar fi $n \geq n_1$. Deoarece $|x_n - a| < 1 \implies |x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$, alegând $r = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1 + |a|\}$, avem $|x_n| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.1.15 Definiție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale și fie $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ un șir strict crescător de numere naturale. Șirul $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ este numit *subșir* al lui $(x_n)_{n \geq 0}$.

2.1.16 Propoziție. *Orice subșir (x_{n_k}) al unui șir convergent (x_n) este convergent și*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demonstrație. Fie $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pentru $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Având în vedere că $n_k > k$, rezultă că relația $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ are loc pentru orice $k > n_\varepsilon$.

2.1.17 Teoremă.

Dacă $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ *este un șir de intervale, atunci* $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Dacă în plus $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, *atunci* $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$ *conține un singur element.*

Demonstrație. Deoarece $a_n \leq b_k$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}$, rezultă că există

$$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} b_k = \beta \quad \text{și} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta].$$

Din relația $[\alpha, \beta] \subset [a_n, b_n]$ rezultă că $0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n$. În cazul în care $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, obținem că $\alpha = \beta$ și deci $[\alpha, \beta] = \{\alpha\}$.

2.1.18 Teoremă (Cesaro). Orice șir mărginit din $\mathbb{R}$ conține un subșir convergent.

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir mărginit și $r > 0$ astfel încât $|x_n| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Notăm $a_0 = -r$ și $b_0 = r$. Cel puțin unul dintre intervalele $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$ și $[(a_0 + b_0)/2, b_0]$ conține un număr infinit de termeni ai șirului. Alegem un astfel de interval, îl notăm cu $[a_1, b_1]$ și alegem un termen x_{n_1} al șirului aparținând lui $[a_1, b_1]$. Cel puțin unul dintre intervalele $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ și $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ conține un număr infinit de termeni ai șirului. Alegem un astfel de interval, îl notăm cu $[a_2, b_2]$ și alegem un termen x_{n_2} al șirului aparținând lui $[a_2, b_2]$. Continuând acest proces, generăm un șir descrescător de intervale

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \quad \text{cu} \quad b_n - a_n = \frac{r}{2^{n-1}}$$

și un subșir (x_{n_k}) cu $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Dar, conform teoremei anterioare

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \sup_{k \in \mathbb{N}} a_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

2.1.19 Definiție. Un șir de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ este numit *șir Cauchy*

dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x_k| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi} \quad \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \geq n_\varepsilon. \end{matrix}$$

2.1.20 Propoziție. Orice șir Cauchy de numere reale este mărginit.

Demonstrație. Pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_1$ și

orice $k \geq n_1$, avem $|x_n - x_k| < 1$. În particular, pentru orice $n \geq n_1$ are loc relația $|x_n - x_{n_1}| < 1$ și consecința ei directă $|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$. Alegând $r = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}|\}$, avem $|x_n| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.1.21 Propoziție. *Orice șir convergent de numere reale este șir Cauchy.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, oricare ar fi $n > n_\varepsilon$. Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $k \geq n_\varepsilon$ avem

$$|x_n - x_k| = |x_n - a + a - x_k| \leq |x_n - a| + |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.1.22 Propoziție. *Un șir Cauchy care conține un șir convergent este convergent.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir Cauchy care conține un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ și fie $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, oricare ar fi $n, m \geq n'_\varepsilon$ și există $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, oricare ar fi $k \geq n''_\varepsilon$. Deoarece $n_k > k$, alegând $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_{n_\varepsilon}} + x_{n_{n_\varepsilon}} - a| \leq |x_n - x_{n_{n_\varepsilon}}| + |x_{n_{n_\varepsilon}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.1.23 Teorema. *Un șir din $\mathbb{R}$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.*

Demonstrație. Am arătat că orice șir Cauchy este mărginit și că orice șir mărginit de numere reale conține un subșir convergent. Conform propoziției anterioare, un șir Cauchy care conține un subșir convergent este convergent.

2.1.24 Spunem despre un șir de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ că *are limită* dacă este convergent sau dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ori $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

2.1.25 Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir de numere reale, atunci:

- a) Șirul descrescător $\left(\sup_{k \geq n} x_k \right)_{n \geq 0}$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$
- b) Șirul crescător $\left(\inf_{k \geq n} x_k \right)_{n \geq 0}$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$.

2.1.26 Definiție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale.

Prin *limita superioară* a șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ se înțelege limita $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$.

Prin *limita inferioară* a șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ se înțelege limita $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k$.

2.1.27 Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nu există, dar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1 \quad \text{și} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1.$$

2.1.28 Se poate arăta că:

$$(x_n)_{n \geq 0} \text{ are limită} \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

și în acest caz,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2.1.29 Definiție. Spunem despre o mulțime $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ că este *mărginită* dacă există $r > 0$ astfel încât $\mathcal{M} \subset [-r, r]$.

2.1.30 Propoziție. Dacă mulțimea $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ este mărginită, atunci în $\mathcal{A}$ există șiruri $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ și $(\beta_n)_{n \geq 1}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \inf \mathcal{M} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \sup \mathcal{M}.$$

Demonstrație. Numărul $\inf \mathcal{M}$ este cel mai mare minorant al mulțimii $\mathcal{M}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\inf \mathcal{M} + \frac{1}{n}$ nu este minorant al mulțimii $\mathcal{M}$. Rezultă că există un element $\alpha_n \in \mathcal{M}$ astfel încât $\inf \mathcal{M} \leq \alpha_n < \inf \mathcal{M} + \frac{1}{n}$, adică $0 \leq \alpha_n - \inf \mathcal{M} < \frac{1}{n}$. Numărul $\sup \mathcal{M}$ este cel mai mic majorant al mulțimii $\mathcal{M}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sup \mathcal{M} - \frac{1}{n}$ nu este majorant al mulțimii $\mathcal{M}$. Rezultă că există un element $\beta_n \in \mathcal{M}$ astfel încât $\sup \mathcal{M} - \frac{1}{n} < \beta_n \leq \sup \mathcal{M}$, adică astfel încât $0 \leq \sup \mathcal{M} - \beta_n < \frac{1}{n}$.

2.2 Șiruri de elemente din $\mathbb{R}^2$

2.2.1 În secțiunea anterioară am prezentat noțiuni și rezultate referitoare la șiruri de elemente din $\mathbb{R}$. Unele dintre aceste noțiuni pot fi extinse pentru a deveni aplicabile șirurilor de elemente din spații mult mai generale. Noțiunile de șir convergent, șir mărginit și de șir Cauchy se definesc cu ajutorul funcției modul

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|.$$

Este important de remarcat faptul că demonstrațiile rezultatelor prezentate nu se bazează direct pe definiția modului. Ele au fost deduse utilizând doar proprietățile:

- a) $|x| \geq 0$ și
 $|x| = 0 \iff x = 0,$
- b) $|\alpha x| = |\alpha| |x|,$ oricare ar fi $\alpha, x \in \mathbb{R},$
- c) $|x + x'| \leq |x| + |x'|,$ oricare ar fi $x, x' \in \mathbb{R}.$

2.2.2 Propoziție. Spațiul

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \},$$

considerat împreună cu adunarea și înmulțirea cu numere reale,

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

este spațiu vectorial, iar aplicația

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

are proprietăți similare cu ale modulului:

- a) $\|(x, y)\| \geq 0$ și
 $\|(x, y)\| = 0 \iff (x, y) = (0, 0);$
- b) $\|\alpha(x, y)\| = |\alpha| \|(x, y)\|,$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2;$
- c) $\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|,$ oricare ar fi $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2.$

Demonstrație. a) Avem $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, iar $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

b) Avem $\|\alpha(x, y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\alpha| \|(x, y)\|.$

c) Relația se mai scrie $\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$ și este echivalentă cu inegalitatea $xx' + yy' \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}$ obținută prin ridicare la pătrat. În cazul $xx + yy' \leq 0$, inegalitatea este adevărată. Dacă $xx + yy' \geq 0$, ridicând la pătrat, obținem inegalitatea evident adevărată $(xy' - x'y)^2 \geq 0$.

2.2.3 Interpretări geometrice:

$$\|(x, y)\| = \text{distanța dintre punctele } (x, y) \text{ și } (0, 0);$$

$$\|(x, y) - (x', y')\| = \text{distanța dintre punctele } (x, y) \text{ și } (x', y').$$

2.2.4 Aplicația

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d((x, y), (x', y')) = \|(x, y) - (x', y')\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

are proprietățile:

- a) $d((x, y), (x', y')) \geq 0$ și
 $d((x, y), (x', y')) = 0 \iff (x, y) = (x', y');$
- b) $d((x, y), (x', y')) = d((x', y'), (x, y)),$ oricare ar fi $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2;$
- c) $d((x, y), (x', y')) \leq d((x, y), (x'', y'')) + d((x'', y''), (x', y')),$
oricare ar fi $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2.$

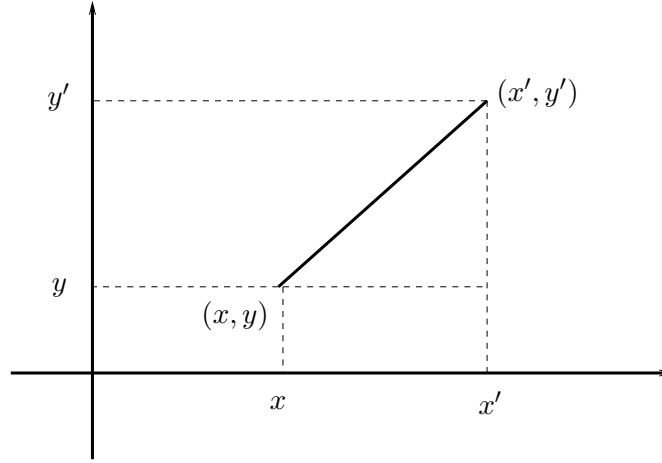


Figura 2.1: Distanța dintre două puncte.

2.2.5 Definiție. Spunem că șirul (x_n, y_n) este *convergent* cu limita (a, b) și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b) \text{ dacă, oricare ar fi } \varepsilon > 0, \text{ există } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât}$$

$$\|(x_n, y_n) - (a, b)\| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_\varepsilon.$$

2.2.6 Definiție. Șirul $(x_n, y_n)_{n \geq 0}$ este numit *mărginit* dacă există $r > 0$ astfel încât

$$\|(x_n, y_n)\| \leq r, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

2.2.7 Propoziție. Orice șir convergent din $\mathbb{R}^2$ este mărginit.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 29-14.

2.2.8 Definiție. Un șir $(x_n, y_n)_{n \geq 0}$ din $\mathbb{R}^2$ este numit *șir Cauchy* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|(x_n, y_n) - (x_k, y_k)\| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \geq n_\varepsilon. \end{matrix}$$

2.2.9 Propoziție. Orice șir Cauchy din $\mathbb{R}^2$ este șir mărginit.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 30-20.

2.2.10 Propoziție. Orice șir convergent din $\mathbb{R}^2$ este șir Cauchy.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 31-21.

2.2.11 Propoziție. Oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, are loc relația

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| \\ |y| \end{array} \right\} \leq \|(x, y)\| \leq |x| + |y|.$$

Demonstrație. Relația $\|(x, y)\| \leq |x| + |y|$ este echivalentă cu inegalitatea $0 \leq |x| - |y|$ rezultată prin ridicare la pătrat și

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|.$$

2.2.12 Teoremă.

$$a) \quad (x_n, y_n) \text{ este șir mărginit} \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este șir mărginit} \text{ și} \\ (y_n) \text{ este șir mărginit.} \end{array} \right.$$

$$b) \quad (x_n, y_n) \text{ este șir Cauchy} \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este șir Cauchy} \text{ și} \\ (y_n) \text{ este șir Cauchy.} \end{array} \right.$$

$$c) \quad (x_n, y_n) \text{ este șir convergent} \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_n) \text{ este șir convergent} \text{ și} \\ (y_n) \text{ este șir convergent.} \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b) \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{array} \right.$$

Demonstrație. Afirmatiile rezultă din relațiile (a se vedea propoziția anterioară):

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_n| \\ |y_n| \end{array} \right\} \leq \|(x_n, y_n)\| \leq |x_n| + |y_n|;$$

$$b) \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_n - x_k| \\ |y_n - y_k| \end{array} \right\} \leq \|(x_n, y_n) - (x_k, y_k)\| \leq |x_n - x_k| + |y_n - y_k|;$$

$$c) \quad \left\{ \begin{array}{l} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{array} \right\} \leq \|(x_n, y_n) - (a, b)\| \leq |x_n - a| + |y_n - b|.$$

2.2.13 Teoremă. Șirul (x_n, y_n) este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy.

Demonstrație. Afirmatia rezultă din teorema precedentă ținând seama de faptul că șirurile de numere reale (x_n) și (y_n) sunt convergente dacă și numai dacă sunt șiruri Cauchy.

2.3 Spații normate

2.3.1 Definiție. Prin *normă* pe un spațiu vectorial real E se înțelege o aplicație

$$\| \cdot \|: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietățile

- a) $\|x\| \geq 0$ și $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in E$,
- c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, oricare ar fi $x, y \in E$.

Un *spațiu normat* este un spațiu vectorial E considerat împreună cu o normă fixată.

2.3.2 Exemple.

- a) Aplicația modul $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este normă pe spațiul vectorial unidimensional $\mathbb{R}$, iar $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este spațiu normat.
- b) Aplicația $\| \cdot \|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este normă pe spațiul vectorial bidimensional $\mathbb{R}^2$, iar $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ este spațiu normat.
- c) Aplicația $\| \cdot \|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ este normă pe spațiul vectorial n -dimensional $\mathbb{R}^n$, iar $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ este spațiu normat.

2.3.3 Exercițiu. Să se arate că aplicațiile

$$\| \cdot \|_1: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

$$\| \cdot \|_\infty: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\},$$

sunt norme pe spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

2.3.4 Exercițiu. Mulțimea $C([0, 1])$ a tuturor funcțiilor continue $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, considerată împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari

$$C([0, 1]) \times C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1]) : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi, \text{ unde } (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$\mathbb{R} \times C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1]) : (\alpha, \varphi) \mapsto \alpha\varphi, \text{ unde } (\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x),$$

este spațiu vectorial, iar aplicația

$$\| \cdot \|_\infty: C([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|,$$

este normă.

2.3.5 Propoziție Dacă $(E_1, \| \cdot \|_1)$ și $(E_2, \| \cdot \|_2)$ sunt spații normate, atunci aplicația

$$\| \cdot \|: E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \| (x_1, x_2) \| = \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2},$$

este o normă pe spațiul vectorial $E_1 \times E_2$ și

$$\left. \begin{array}{l} \| x_1 \|_1 \\ \| x_2 \|_2 \end{array} \right\} \leq \| (x_1, x_2) \| \leq \| x_1 \|_1 + \| x_2 \|_2 .$$

Demonstrație. Avem: $\| (x_1, x_2) \| \geq 0$ și $\| (x_1, x_2) \| = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$;

$$\| \alpha (x_1, x_2) \| = |\alpha| \| (x_1, x_2) \|;$$

$$\begin{aligned} \| (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \| &= \sqrt{\| x_1 + y_1 \|_1^2 + \| x_2 + y_2 \|_2^2} \\ &\leq \sqrt{(\| x_1 \|_1 + \| y_1 \|_1)^2 + (\| x_2 \|_2 + \| y_2 \|_2)^2}. \end{aligned}$$

Relația

$$\sqrt{(\| x_1 \|_1 + \| y_1 \|_1)^2 + (\| x_2 \|_2 + \| y_2 \|_2)^2} \leq \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2} + \sqrt{\| y_1 \|_1^2 + \| y_2 \|_2^2},$$

fiind echivalentă cu relația

$$\| x_1 \|_1 \| y_1 \|_1 + \| x_2 \|_2 \| y_2 \|_2 \leq \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_2^2} \sqrt{\| y_1 \|_1^2 + \| y_2 \|_2^2},$$

echivalentă cu

$$0 \leq (\| x_2 \|_2 \| y_1 \|_1 - \| x_1 \|_1 \| y_2 \|_2)^2,$$

avem $\| (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \| \leq \| (x_1, x_2) \| + \| (y_1, y_2) \|$.

2.3.6 Spațiul $\mathbb{R}^n$ poate fi privit ca fiind produsul direct a n spații normate $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

2.4 Spații metrice

2.4.1 Definiție. Prin *distanță* pe o mulțime nevidă M se înțelege o aplicație

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

- a) $d(x, y) \geq 0$ și $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- b) $d(x, y) = d(y, x)$, oricare ar fi $x, y \in M$;
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, oricare ar fi $x, y, z \in M$.

Un *spațiu metric* este o mulțime nevidă considerată împreună cu o distanță fixată.

2.4.2 Teoremă. Orice spațiu normat are o structură naturală de spațiu metric.

Dacă $(E, \|\cdot\|)$ este spațiu normat, atunci (E, d) , unde

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\|,$$

este spațiu metric.

Demonstrație. Avem:

$$d(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \quad \text{și} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x);$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

2.4.3 Exemple. Spațiilor normate prezentate mai sus le corespund spațiile metrice:

$$(\mathbb{R}, d), \quad \text{unde} \quad d(x, y) = |x - y|;$$

$$(\mathbb{R}^2, d), \quad \text{unde} \quad d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

$$(\mathbb{R}^n, d), \quad \text{unde} \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2};$$

$$(\mathbb{R}^n, d_1), \quad \text{unde} \quad d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|;$$

$$(\mathbb{R}^n, d_\infty), \quad \text{unde} \quad d_\infty(x, y) = \max_{k=1}^n |x_k - y_k|;$$

$$(C([0, 1]), d_\infty), \quad \text{unde} \quad d_\infty(\varphi, \psi) = \max_{x \in [0, 1]} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

2.5 Spații prehilbertiene

2.5.1 Definiție. Un produs scalar pe un spațiu vectorial real H este o aplicație

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

cu proprietățile:

- a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $x, y, z \in H$;
- b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, oricare ar fi $x, y \in H$;
- c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ și $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Un spațiu prehilbertian este un spațiu considerat împreună cu un produs scalar fixat.

2.5.2 Din definiția produsului scalar se deduce imediat că

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } x, y, z \in H.$$

2.5.3 Exemple. a) Aplicația

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad (2.1)$$

este produs scalar pe $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Aplicația

$$C([0, 1]) \times C([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R} : (\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx, \quad (2.2)$$

este produs scalar pe spațiul $C([0, 1])$ al tuturor funcțiilor continue $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

2.5.4 Se știe că în cazul în care a, b, c sunt numere reale cu $a \neq 0$, relația

$$at^2 + bt + c \geq 0, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R},$$

are loc dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ și $a > 0$.

2.5.5 Propoziție. Dacă $H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ este produs scalar, atunci

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in H. \quad (2.3)$$

Demonstrație. În cazul $x = 0$, inegalitatea este satisfăcută deoarece $\langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle = 0$.

În cazul $x \neq 0$, relația

$$\langle x, x \rangle t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \langle y, y \rangle = \langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0,$$

adevărată oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, conduce la $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$.

2.5.6 Teoremă. Orice spațiu prehilbertian are o structură naturală de spațiu normat. Dacă $H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ este produs scalar, atunci aplicația

$$H \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

este normă.

Demonstrație. Avem:

$$a) \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \quad \text{și} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$b) \quad \|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|;$$

$$c) \quad \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

2.5.7 Utilizând norma corespunzătoare, inegalitatea Cauchy-Schwarz se poate scrie

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

În cazul unui spațiu vectorial real cu produs scalar, dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$, atunci

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1.$$

Numărul $\varphi \in [0, \pi]$ cu proprietatea

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

reprezintă *unghiul* dintre x și y . Relația precedentă se mai poate scrie

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi.$$

2.5.8 În $\mathbb{R}^2$, utilizând formula

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

obținem relația (v. Fig. 2.2)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|x\| \|y\| (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \\ &= \|x\| \|y\| \cos(a - b) \end{aligned}$$

din care rezultă că produsul scalar $\langle x, y \rangle$ a doi vectori x și y este egal cu produsul lungimilor vectorilor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ei.

În particular, vectorii sunt *ortogonali* (perpendiculari) dacă și numai dacă

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

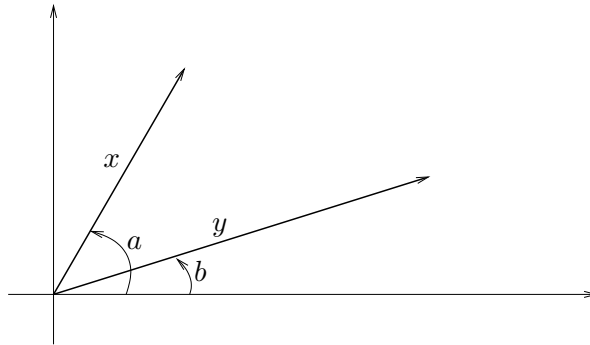


Figura 2.2: Produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^2$.

2.5.9 În cazul spațiului $\mathbb{R}^n$, inegalitatea Cauchy devine

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2},$$

adică

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

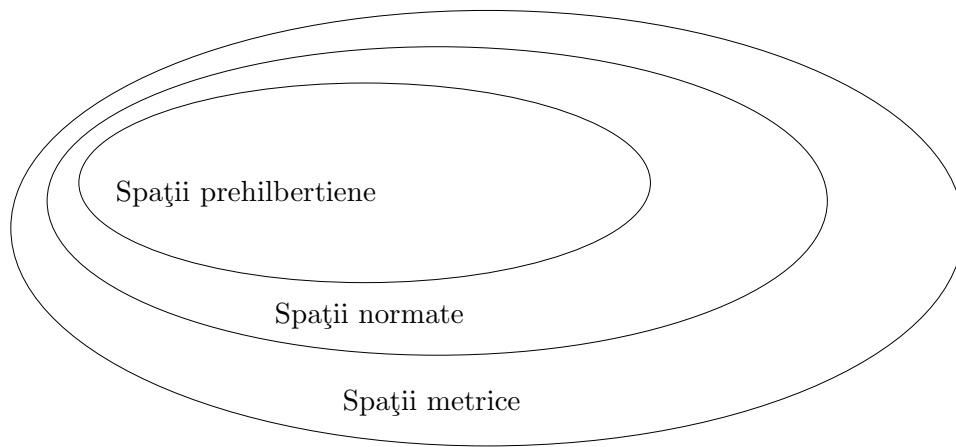


Figura 2.3: Relația între spațiile metrice, normate și prehilbertiene.

2.5.10 Orice spațiu normat are o structură naturală de spațiu metric și orice spațiu prehilbertian are o structură naturală de spațiu normat (v. Fig. 2.3):

$$\| \cdot \| \text{ este normă } \implies d(x, y) = \|x - y\| \text{ definește o distanță;}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ este produs scalar } \implies \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ definește o normă.}$$

2.5.11 Plecând de la produsele scalare (2.1) și (2.2) obținem spațiile normate

$$(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|), \quad \text{unde } \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2},$$

$$(C([0, 1]), \| \cdot \|), \quad \text{unde } \|\varphi\| = \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x))^2 dx},$$

și spațiile metrice corespunzătoare

$$(\mathbb{R}^n, d), \quad \text{unde } d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2},$$

$$(C([0, 1]), d), \quad \text{unde } d(\varphi, \psi) = \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx}.$$

2.5.12 Izomorfismul liniar $\mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{kn}$,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \mapsto (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}),$$

permite identificarea lui $\mathbb{R}^{kn}$ cu spațiul vectorial al matricelor cu k linii și n coloane

$$\mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aplicațiile

$$\| \cdot \|: \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2},$$

$$\| \cdot \|_1: \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n |x_{ij}|,$$

$$\| \cdot \|_\infty: \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left\| \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i=1}^k \max_{j=1}^n |x_{ij}|,$$

sunt norme pe $\mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$, iar

$$d \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - y_{ij})^2},$$

$$d_1 \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n |x_{ij} - y_{ij}|,$$

$$d_{\infty} \left(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} \right) = \max_{i=1}^k \max_{j=1}^n |x_{ij} - y_{ij}|$$

distanțele asociate. Norma $\| \cdot \|$ este norma asociată produsului scalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{ij}.$$

2.6 Șiruri în spații metrice

2.6.1 Definiție. Spunem că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din spațiul metric (S, d) este *convergent* cu limita a și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0,$$

adică dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_{\varepsilon}.$$

2.6.2 În cazul unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ dintr-un spațiu normat, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| = 0,$$

adică dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|x_n - a\| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_{\varepsilon}.$$

2.6.3 Propoziție. Într-un spațiu metric, limita unui șir convergent este unică:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \end{array} \right\} \implies a = b.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 29-10.

2.6.4 Propoziție. Orice subșir (x_{n_k}) al unui șir convergent (x_n) este convergent și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 29-16.

2.6.5 Definiție. Șirul (x_n) din spațiul metric (S, d) este numit *șir Cauchy* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ m \geq n_\varepsilon, \end{matrix}$$

adică astfel încât

$$d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \in \mathbb{N}. \end{matrix}$$

2.6.6 Propoziție. Într-un spațiu metric, orice șir convergent este șir Cauchy.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 31-21.

2.6.7 Se poate arăta că în spațiul normat $(C([0, 1]), \|\cdot\|)$ cu $\|\varphi\| = \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x))^2 dx}$, șirul de funcții (φ_n) , unde $\varphi_n(x) = x^n$, este șir Cauchy neconvergent în $C([0, 1])$.

2.6.8 Definiție. Un spațiu metric cu proprietatea că orice șir Cauchy este convergent este numit *spațiu complet*.

Spațiile normate complete se numesc *spațiu Banach*,

iar spațiile prehilbertiene complete sunt numite *spații Hilbert*.

2.6.9 Definiție. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din spațiul metric (S, d) este numit *mărginit* dacă există $a \in S$ și $r > 0$ astfel încât $d(a, x_n) \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.6.10 Propoziție. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din spațiul normat $(E, \|\cdot\|)$ este *mărginit* dacă și numai dacă există $r > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Dacă $\|x_n - a\| \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\|x_n\| = \|x_n - a + a\| \leq \|x_n - a\| + \|a\| \leq r + \|a\|, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

2.6.11 Propoziție. Într-un spațiu metric, orice șir convergent este mărginit.

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir convergent și $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(a, x_n) < 1$, oricare ar fi $n \geq n_1$. Alegând

$$r = \max\{1, d(a, x_0), d(a, x_1), \dots, d(a, x_{n_1-1})\},$$

avem $d(a, x_n) \leq r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.6.12 Propoziție. Într-un spațiu metric, orice șir Cauchy este mărginit.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 30-20.

2.6.13 În cazul spațiilor $\mathbb{R}^n$, dacă nu se indică o altă normă, vom subînțelege că structura de spațiu normat considerată este cea definită de *norma uzuală*

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Ea este norma asociată *produsului scalar uzual*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

adică

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

și definește *distanța uzuală*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

Spațiile $\mathbb{R}^n$ sunt spații Hilbert. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$, avem (a se vedea pag. 35-11)

$$\left. \begin{array}{l} |x_1| \\ |x_2| \\ \dots \\ |x_n| \end{array} \right\} \leq \| x \| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

2.7 Serii de numere reale

2.7.1 Definiție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Seria

$$\sum_{n \geq 0} x_n$$

este numită *convergentă* (C) dacă șirul sumelor parțiale $(s_k)_{k \geq 0}$,

$$s_k = \sum_{n=0}^k x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_k,$$

este convergent. Limita acestui șir este numită *suma seriei* și scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_0 + x_1 + \dots + x_k).$$

O serie care nu este convergentă, este numită *divergentă* (D).

2.7.2 Exemplu. Seria $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ este convergentă deoarece

$$s_k = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

și suma ei este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

2.7.3 MATHEMATICA: NSum[a[n], {n, m, k}] , Sum[a[n], {n, m, Infinity}]

In[1]:=NSum[1/2^n, {n, 0, 15}] $\mapsto$ Out[1]=1.99997

In[2]:=Sum[1/2^n, {n, 0, Infinity}] $\mapsto$ Out[2]=2.

2.7.4 Exercițiu. Seria geometrică reală $\sum_{n \geq 0} q^n$ este convergentă dacă și numai dacă $q \in (-1, 1)$. Suma ei este $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1-q}$, adică avem

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \quad \text{dacă } q \in (-1, 1).$$

Rezolvare. Șirul sumelor parțiale este convergent dacă și numai dacă $q \in (-1, 1)$ și

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + q + \cdots + q^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

2.7.5 MATHEMATICA: Sum[a[n], {n, m, k}] , Sum[a[n], {n, m, Infinity}]

In[1]:=Sum[q^n, {n, 0, k}] $\mapsto$ Out[1]= $\frac{-1+q^{1+k}}{-1+q}$

In[2]:=Sum[q^n, {n, 0, Infinity}] $\mapsto$ Out[2]= $\frac{1}{1-q}$.

2.7.6 Propoziție. Dacă seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Fie s suma seriei, adică $s = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m x_k$. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} x_k = s - s = 0.$$

2.7.7 Propoziție.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} x_n \text{ convergentă} \\ \sum_{n \geq 0} y_n \text{ convergentă} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} (x_n + y_n) \text{ convergentă și} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} \\ \sum_{n \geq 0} x_n \text{ convergentă} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} \alpha x_n \text{ convergentă și} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n. \end{array} \right.$$

Demonstrație. Avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (x_n + y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \alpha x_k = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

2.7.8 Propoziție.

Seriile $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq n_0} x_n$ au aceeași natură, oricare ar fi $n_0 > 0$.

Demonstrație. Șirurile $(s_k)_{k \geq 0}$ și $(\tilde{s}_k)_{k \geq n_0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^k x_n, \quad \tilde{s}_k = \sum_{n=n_0}^k x_n = s_k - \sum_{n=0}^{n_0-1} x_n$$

sunt fie ambele convergente, fie ambele divergente.

2.7.9 Exercițiu. Fie seriile de numere reale $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$. Dacă, cu excepția unui număr finit de termeni, avem $x_n = y_n$, atunci seriile au aceeași natură.

2.7.10 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}. \end{matrix}$$

Demonstrație. Prin definiție, seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $(s_k)_{k \geq 0}$ este convergent. Pe de altă parte, șirul $(s_k)_{k \geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy, adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ și oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Însă $|s_{n+k} - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}|$.

2.7.11 Teoremă (Criteriul lui Abel).

Dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir astfel încât există $M > 0$ cu

$$|x_0 + x_1 + \cdots + x_n| \leq M, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci seria $\sum_{n \geq 0} a_n x_n$ este convergentă.

Demonstrație. Notând $s_k = \sum_{n=0}^k x_n$, avem $x_n = s_n - s_{n-1}$ pentru orice $n > 0$.

Deoarece

$$\begin{aligned} |a_{n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{n+k}x_{n+k}| &= |a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \cdots + a_{n+k}(s_{n+k} - s_{n+k-1})| \\ &= |-a_{n+1}s_n + (a_{n+1} - a_{n+2})s_{n+1} + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k})s_{n+k-1} + a_{n+k}s_{n+k}| \\ &\leq a_{n+1}|s_n| + (a_{n+1} - a_{n+2})|s_{n+1}| + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k})|s_{n+k-1}| + a_{n+k}|s_{n+k}| \\ &\leq (a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+k-1} - a_{n+k}) + a_{n+k})M = 2a_{n+1}M \end{aligned}$$

și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|a_{n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{n+k}x_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_\varepsilon \text{ și oricare ar fi } k \in \mathbb{N}^*.$$

2.7.12 Teorema (Criteriul lui Leibniz).

Dacă (a_n) este șir descrescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, atunci $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ este convergentă.

Demonstrație. Alegem $x_n = (-1)^n$ și utilizăm criteriul lui Abel.

2.7.13 MATHEMATICA: Sum[a[n], {n, m, Infinity}], NSum[a[n], {n, m, Infinity}]

$$\begin{aligned} \text{Sum}[(-1)^n/n, \{n, 1, \text{Infinity}\}] &\mapsto \text{Out}[1] = -\text{Log}[2] \\ \text{Sum}[(-1)^n/n^2, \{n, 1, \text{Infinity}\}] &\mapsto \text{Out}[2] = -\frac{\pi^2}{12} \\ \text{NSum}[(-1)^n/n^3, \{n, 1, \text{Infinity}\}] &\mapsto \text{Out}[2] = -0.901543. \end{aligned}$$

2.7.14 Definiție.

Spunem ca seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ este *convergentă*.

2.7.15 Teorema Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui Cauchy. Dacă seria $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ este convergentă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ și oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Însă

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+k}|$$

și prin urmare $|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ și $k \in \mathbb{N}^*$.

2.7.16 Exemplu. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz.

Ea nu este absolut convergentă deoarece $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă (pag. 50-22).

2.7.17 Definiție.

Spunem că $\sum_{n \geq 0} x_n$ este *serie cu termeni pozitivi* dacă $x_n \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.7.18 Propoziție. O serie cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $\left(\sum_{n=0}^k x_n\right)_{k \geq 0}$ este mărginit.

Demonstrație. În cazul unei serii cu termeni pozitivi, șirul sumelor parțiale este crescător. Un șir crescător este convergent dacă și numai dacă este mărginit.

2.7.19 Teoremă (Criteriul comparației). Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $n_0 \geq 0$ astfel încât $x_n \leq y_n$, oricare ar fi $n \geq n_0$, atunci:

$$a) \sum_{n \geq 0} y_n \text{ convergentă} \implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ convergentă},$$

$$b) \sum_{n \geq 0} x_n \text{ divergentă} \implies \sum_{n \geq 0} y_n \text{ divergentă}.$$

Demonstrație. Seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ are aceeași natură cu $\sum_{n \geq n_0} x_n$ și seria $\sum_{n \geq 0} y_n$ are aceeași natură cu $\sum_{n \geq n_0} y_n$. Deoarece $0 \leq \sum_{n=n_0}^k x_n \leq \sum_{n=n_0}^k y_n$ rezultă că:

$$\left(\sum_{n=n_0}^k y_n \right)_{k \geq n_0} \text{ șir mărginit} \implies \left(\sum_{n=n_0}^k x_n \right)_{k \geq n_0} \text{ șir mărginit};$$

$$\left(\sum_{n=n_0}^k x_n \right)_{k \geq n_0} \text{ șir nemărginit} \implies \left(\sum_{n=n_0}^k y_n \right)_{k \geq n_0} \text{ șir nemărginit}.$$

2.7.20 Teoremă (Comparație prin trecere la limită).

Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 0} x_n$ și $\sum_{n \geq 0} y_n$ sunt astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, \infty),$$

atunci ele au aceeași natură (sunt ambele convergente sau ambele divergente).

Demonstrație. Există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x_n}{y_n} \in \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$, adică

$$\frac{l}{2} y_n \leq x_n \leq \frac{3l}{2} y_n, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0,$$

ceea ce permite utilizarea criteriului comparației.

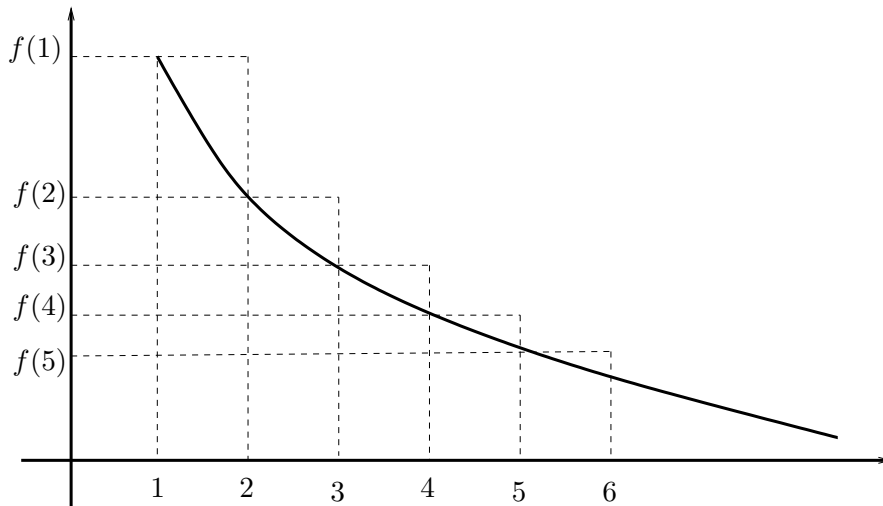


Figura 2.4: Șirul $\left(\int_1^n f(x) dx\right)_{n \geq 1}$.

2.7.21 Teoremă. Fie $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și descrescătoare. Seria $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(\int_1^n f(x) dx)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Demonstrație. Utilizând relația $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$ (v. Fig. 2.4) și $\int_1^n f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx$, obținem

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1).$$

2.7.22 Teoremă (Seria armonică generalizată).

Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă și numai dacă $\alpha > 1$.

Demonstrație. Dacă $\alpha \leq 0$ seria este divergentă deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$. În cazul $\alpha > 0$ funcția $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ este continuă și descrescătoare. Deoarece

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha \neq 1, \\ (\ln x) \Big|_1^n = \ln n & \text{dacă } \alpha = 1, \end{cases}$$

șirul $(\int_1^n f(x) dx)_{n \geq 1}$ este mărginit dacă și numai dacă $\alpha > 1$.

2.7.23 MATHEMATICA: Sum[a[n], {n, m, Infinity}], NSum[a[n], {n, m, Infinity}]

In[1]:= Sum[1/n^2, {n, 1, Infinity}] $\mapsto$ Out[1]= $\frac{\pi^2}{6}$
In[2]:= NSum[1/n^Sqrt[2], {n, 1, Infinity}] $\mapsto$ Out[2]=3.02074.

2.7.24 Exercițiu. Să se arate că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}$ este convergentă.

Rezolvare 1.

Convergența rezultă din $\frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}}{1+n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}}$ și din convergența seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Rezolvare 2.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}$ are aceeași natură cu $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$.

2.7.25 MATHEMATICA: NSum[a[n], {n, m, k}], NSum[a[n], {n, m, Infinity}]

In[1]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 100}] $\mapsto$ Out[1]=2.87338
In[2]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 1000}] $\mapsto$ Out[2]=3.0186
In[3]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 10000}] $\mapsto$ Out[3]=3.06273
In[4]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, 100000}] $\mapsto$ Out[4]=3.07649
In[5]:= NSum[(1+Sqrt[n])/(1+n^2), {n, 1, Infinity}] $\mapsto$ Out[5]=3.08283.

2.7.26 Teoremă (Criteriul rădăcinii).

Dacă seria cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 0} x_n$ este astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este convergentă}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este divergentă}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$. În cazul $l < 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l + \varepsilon < 1$. Deoarece $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. În particular, avem $\sqrt[n]{x_n} < l + \varepsilon$, adică $x_n < (l + \varepsilon)^n$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Convergența seriei $\sum_{n \geq 0} x_n$ rezultă din convergența seriei geometrice $\sum_{n \geq 0} (l + \varepsilon)^n$ pe baza criteriului comparației. În cazul $l > 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l - \varepsilon > 1$. Deoarece $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{x_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. În particular, avem $\sqrt[n]{x_n} > l - \varepsilon$, adică $x_n > (l - \varepsilon)^n > 1$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ și prin urmare seria este divergentă.

2.7.27 Noțiunea de limită superioară permite următoarea formulare mai generală:

Teoremă (Cauchy). *Dacă $\sum_{n \geq 0} x_n$ este serie cu termeni pozitivi, atunci:*

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este convergentă}; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este divergentă}. \end{aligned}$$

2.7.28 Teoremă (Criteriul raportului).

Dacă seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ cu $x_n > 0$ este astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este convergentă}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este divergentă}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. În cazul $l < 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l + \varepsilon < 1$. Deoarece $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. În particular, avem pentru $n \geq n_\varepsilon$ relația $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq l + \varepsilon$ din care rezultă $x_{n_\varepsilon+1} \leq (l + \varepsilon)x_{n_\varepsilon}$, $x_{n_\varepsilon+2} \leq (l + \varepsilon)^2 x_{n_\varepsilon}$, $\dots$, $x_{n_\varepsilon+k} \leq (l + \varepsilon)^k x_{n_\varepsilon}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Convergența seriei $\sum_{n \geq 0} x_n$ rezultă din convergența seriei geometrice $\sum_{n \geq 0} (l + \varepsilon)^n$. În cazul $l > 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l - \varepsilon > 1$. Deoarece $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. În particular, avem pentru $n \geq n'_\varepsilon$ relația $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq l - \varepsilon$ din care rezultă $x_{n'_\varepsilon+1} \geq (l - \varepsilon)x_{n'_\varepsilon}$, $x_{n'_\varepsilon+2} \geq (l - \varepsilon)^2 x_{n'_\varepsilon}$, $\dots$, $x_{n'_\varepsilon+k} \geq (l - \varepsilon)^k x_{n'_\varepsilon}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și prin urmare seria este divergentă.

2.7.29 Noțiunea de limită superioară permite următoarea formulare mai generală:

Teoremă (d'Alembert). Dacă $\sum_{n \geq 0} x_n$ este serie cu termeni strict pozitivi, atunci:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este convergentă}; \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este divergentă}. \end{aligned}$$

2.7.30 Teoremă (Criteriul Raabe-Duhamel).

Dacă seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ cu $x_n > 0$ este astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este convergentă}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1 &\implies \sum_{n \geq 0} x_n \text{ este divergentă}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$. În cazul $l > 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l - \varepsilon > 1$, adică $l > 1 + \varepsilon$. Deoarece $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 1 + \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Rezultă că relația $nx_n - nx_{n+1} > x_{n+1} + \varepsilon x_{n+1}$, adică $nx_n - (n+1)x_{n+1} > \varepsilon x_{n+1} > 0$ (*) are loc, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Din relația (*) rezultă că șirul cu termeni pozitivi $(nx_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ este monoton descrescător și deci convergent. Deoarece există $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=n_\varepsilon}^k [nx_n - (n+1)x_{n+1}] = \lim_{k \rightarrow \infty} [n_\varepsilon x_{n_\varepsilon} - (k+1)x_{k+1}]$, seria $\sum_{n=1}^k [nx_n - (n+1)x_{n+1}]$ este convergentă. Din relația (*), pe baza criteriului comparației, rezultă că $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă. În cazul $l < 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $l + \varepsilon < 1$, adică $l < 1 - \varepsilon$. Deoarece $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1 - \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Relația $nx_n - nx_{n+1} < x_{n+1} - \varepsilon x_{n+1}$, adică $nx_n - (n+1)x_{n+1} < -\varepsilon x_{n+1} < 0$ are loc, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Rezultă că șirul cu termeni pozitivi $(nx_n)_{n \geq n'_\varepsilon}$ este crescător. Există $C > 0$ astfel încât $nx_n \geq C$, adică $x_n \geq C \frac{1}{n}$, oricare ar fi $n \geq n'_\varepsilon$. Seria armonică $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ fiind divergentă, pe baza criteriului comparației, rezultă că $\sum_{n \geq 0} x_n$ este divergentă.

2.8 Serii în spații normate

2.8.1 Definiție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir dintr-un spațiu normat $(E, \|\cdot\|)$. Seria

$$\sum_{n \geq 0} x_n$$

este numită *convergentă* (C) dacă șirul sumelor parțiale $(s_k)_{k \geq 0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^k x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_k,$$

este convergent. Limita acestui șir este numită *suma seriei* și scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_0 + x_1 + \cdots + x_k).$$

O serie care nu este convergentă este numită *divergentă* (D).

2.8.2 Exemplu. În spațiul normat $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ cu $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, seria

$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2^n}{3^n}, \frac{1}{n(n+1)}\right)$ este convergentă deoarece

$$\sum_{n=1}^k \left(\frac{2^n}{3^n}, \frac{1}{n(n+1)}\right) = \left(\sum_{n=1}^k \left(\frac{2}{3}\right)^n, \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \left(\frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{1 - \frac{2}{3}}, 1 - \frac{1}{k+1}\right),$$

iar suma ei este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}, \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\frac{2^n}{3^n}, \frac{1}{n(n+1)}\right) = (2, 1).$$

2.8.3 MATHEMATICA: Sum[a[n], {n, m, Infinity}] , NSum[a[n], {n, m, Infinity}]

In[1]:= Sum[2^n/3^n, {n, 1, Infinity}] $\mapsto$ Out[1]=2

In[2]:= NSum[1/(n(n+1)), {n, 1, Infinity}] $\mapsto$ Out[2]=1.

2.8.4 Propoziție.

Dacă seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ din $(E, \|\cdot\|)$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Este similară demonstrației prezentate la pag. 46-6.

2.8.5 Propoziție. Într-un spațiu normat:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} x_n \text{ convergentă} \\ \sum_{n \geq 0} y_n \text{ convergentă} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} (x_n + y_n) \text{ convergentă și} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} \\ \sum_{n \geq 0} x_n \text{ convergentă} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} \alpha x_n \text{ convergentă și} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n. \end{array} \right.$$

Demonstrație. Este similară demonstrației prezentate la pag. 46-7.

2.8.6 Dacă se modifică sau elimină un număr finit de termeni ai unei serii, natura seriei nu se schimbă (doar suma ei este, eventual, afectată).

2.8.7 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Într-un spațiu Banach, o serie $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$\|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+k}\| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}. \end{matrix}$$

Demonstrație. Este similară demonstrației prezentate la pag. 47-10.

2.8.8 Definiție.

Spunem ca seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ este convergentă.

2.8.9 Teoremă. *Într-un spațiu Banach, o serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstrație. Este similară demonstrației prezentate la pag. 48-15.

2.8.10 Teoremă. *Fie $\sum_{n \geq 0} x_n$ o serie de elemente aparținând unui spațiu Banach.*

Dacă există o serie convergentă de numere reale $\sum_{n \geq 0} a_n$ astfel încât

$$\|x_n\| \leq a_n, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este absolut convergentă și, în particular, convergentă.

Demonstrație. Seria $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ este convergentă conform criteriului comparației.

2.9 Șiruri de funcții

2.9.1 Definiție. Fie A o mulțime și $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, funcții definite

pe A . Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ este *convergent în punctul* x_0 dacă șirul de numere reale $(f_n(x_0))_{n \geq 0}$ este convergent.

În caz contrar, spunem că șirul este *divergent în punctul* x_0 .

Mulțimea $A_c \subseteq A$, formată din toate punctele în care șirul este convergent, se numește *mulțimea de convergență* a șirului.

2.9.2 Definiție. Fie A o mulțime și $f, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ funcții definite pe A .

Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge* (punctual) la f și scriem $f_n \rightarrow f$ dacă $A_c = A$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in A,$$

adică dacă, oricare ar fi $x \in A$ și $\varepsilon > 0$, există $n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_{\varepsilon, x}.$$

Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge uniform* în A la f și scriem $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ x \in A. \end{matrix}$$

2.9.3 Exemplu. Șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, unde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, converge punctual la funcția nulă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, dar nu converge uniform. Pentru orice $x \in [0, 1]$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Deoarece $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = 1$, pentru $\varepsilon < 1$ nu există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ x \in [0, 1]. \end{matrix}$$

2.9.4 Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ care converge uniform în A la $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Oricare ar fi $B \subset A$, șirul restricțiilor $(f_n|_B)_{n \geq 0}$ converge uniform în B la $f|_B$.

2.9.5 Teoremă. Fie A o mulțime și $f, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, funcții definite pe A . Dacă există un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} x \in A, \\ n \in \mathbb{N}, \end{matrix}$$

atunci șirul $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform la f , adică $f_n \xrightarrow{u} f$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. Dar $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ și prin urmare

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ x \in A. \end{matrix}$$

2.9.6 Exemplu. Șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, unde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, converge uniform la funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, deoarece $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2.9.7 Teoremă (Criteriul lui Cauchy). *Șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, unde $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, converge uniform dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$\begin{aligned} & n \geq n_\varepsilon, \\ |f_{n+k}(x) - f_n(x)| & < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} k \in \mathbb{N}, \\ x \in A. \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Demonstrație. Dacă $f_n \xrightarrow{u}_A f$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$, $x \in A$. Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$ și $x \in A$ avem

$$\begin{aligned} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+k}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &< |f_{n+k}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Invers, admitând că este verificată condiția din enunț, din (2.4) rezultă că șirul de numere reale $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este șir Cauchy și deci convergent, oricare ar fi $x \in A$. Arătăm că $f_n \xrightarrow{u}_A f$, unde $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform condiției din enunț, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\begin{aligned} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n'_\varepsilon, \\ k \in \mathbb{N}, \\ x \in A. \end{matrix} \end{aligned}$$

Pentru $k \rightarrow \infty$ această relație devine

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n'_\varepsilon, \\ x \in A. \end{matrix}$$

2.9.8 Teoremă. *Avem:*

$$\left. \begin{array}{l} f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sunt continue în } x_0 \in A \\ (f_n)_{n \geq 0} \text{ converge uniform la } f : A \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies f \text{ este continuă în } x_0.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Avem de arătat că există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Deoarece $f_n \xrightarrow{u}_A f$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ x \in A. \end{matrix}$$

Funcția f_{n_ε} fiind continuă în x_0 , rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \\ |x - x_0| < \delta \end{array} \right\} \implies |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru $x \in A$ cu $|x - x_0| < \delta$, avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0) + f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| + |f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.9.9 Dacă funcțiile $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în x_0 , atunci

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

2.9.10 Teoremă. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue. Avem:

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[I]{u} f &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta f_n(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x) dx, \\ \text{oricare ar fi } [\alpha, \beta] &\subseteq I. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ și oricare ar fi $x \in I$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$, avem (vezi pag. 143-8)

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta f_n(x) dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx \right| &= \left| \int_\alpha^\beta (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_\alpha^\beta |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.9.11 Relația (2.5) se mai poate scrie (limita comută cu integrala)

$$f_n \xrightarrow[I]{u} f \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta f_n(x) dx = \int_\alpha^\beta \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

2.9.12 Teoremă. Fie $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue și $F, F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt,$$

primitivele (vezi pag. 151-31) care se anulează în punctul $x_0 \in [a, b]$. Avem:

$$f_n \xrightarrow{[a, b]} f \implies F_n \xrightarrow{[a, b]} F.$$

Demonstrație. Dacă $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \quad \text{oricare ar fi } \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon, \\ t \in [a, b]. \end{array}$$

Din această relație rezultă

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_{x_0}^x |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon, \\ x \in [a, b]. \end{array}$$

2.9.13 Teoremă. Fie $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile cu derivată continuă. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{există } g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ și } x_0 \in [a, b] \text{ astfel încât:} \\ \quad \begin{array}{l} \blacksquare f'_n \xrightarrow[u]{[a, b]} g, \\ \blacksquare (f'_n(x_0))_{n \geq 0} \text{ este convergent} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{există } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ derivabilă} \\ \text{astfel încât:} \\ \quad \begin{array}{l} \blacksquare f_n \xrightarrow[u]{[a, b]} f, \\ \blacksquare f' = g \end{array} \end{array} \right.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + l$, unde $l = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$.

Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x_0) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad |f'_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{oricare ar fi } \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon, \\ t \in [a, b]. \end{array}$$

Deoarece $f_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0)$ avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(x_0) - l| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{array}{l} n \geq n_\varepsilon, \\ x \in [a, b]. \end{array}$$

2.9.14 Teoremă. (Prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass).

Pentru orice funcție continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, există un șir de polinoame uniform convergent cu limita f .

Demonstrație. A se vedea [38], vol. 2, pag 7.

2.10 Serii de funcții

2.10.1 Definiție. Fie A o mulțime și $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, funcții definite pe A .

Spunem că seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$ este *convergentă* (C) în punctul x_0 din A dacă seria de numere reale $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ este convergentă.

În caz contrar, spunem că seria este *divergentă* (D) în punctul x_0 .

Mulțimea $A_c \subseteq A$ formată din toate punctele în care seria este convergentă se numește *mulțimea de convergență* a seriei.

2.10.2 Definiție. Fie A o mulțime și $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ funcții definite pe A . Spunem că seria $\sum_{n \geq 0} f_n$ este *convergentă* dacă $A_c = A$, adică dacă șirul sumelor parțiale (s_k) ,

$$s_k = \sum_{n=0}^k f_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_k,$$

este convergent. Limita acestui șir este numită *suma seriei* și scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_0 + f_1 + \cdots + f_k).$$

$\sum_{n \geq 0} f_n$ este numită *uniform convergentă în A* dacă (s_k) este uniform convergent.

$\sum_{n \geq 0} f_n$ este numită *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ este convergentă.

2.10.3 Dacă seria $\sum_{n \geq 0} f_n$ este uniform convergentă în A cu suma S și dacă $B \subset A$, atunci seria restricțiilor $\sum_{n \geq 0} f_n|_B$ este uniform convergentă în B și are suma $S|_B$.

2.10.4 Propoziție.

Dacă seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.

Demonstrație. Este similară demonstrației prezentate la pag. 46-6.

2.10.5 Teoremă (Criteriul lui Cauchy).

Seria $\sum_{n \geq 0} f_n$, unde $f_n: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, converge uniform pe A dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \in \mathbb{N}, \\ x \in A. \end{matrix}$$

Demonstrație. Afirmția rezultă din criteriul lui Cauchy pentru șiruri (pag. 56-7).

2.10.6 Teoremă (Criteriul lui Weierstrass).

Fie A o mulțime și $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, funcții definite pe A .

Dacă există o serie cu termeni pozitivi convergentă $\sum_{n \geq 0} a_n$ astfel încât

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \in \mathbb{N}, \\ x \in A, \end{matrix}$$

atunci seria $\sum_{n \geq 0} f_n$ este absolut și uniform convergentă pe A .

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui Cauchy. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\sum_{n \geq 0} a_n$ este convergentă există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$ și $k \in \mathbb{N}$, ceea ce conduce la relația

$$\left| \sum_{m=n+1}^{n+k} f_m(x) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{n+k} |f_m(x)| \leq \sum_{m=n+1}^{n+k} a_m < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon, \\ k \in \mathbb{N}^*, \\ x \in A. \end{matrix}$$

2.10.7 Exemplu. Dacă $\alpha > 1$, atunci $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

2.10.8 Teoremă (Criteriul lui Dirichlet.)

Fie $a_n: A \rightarrow [0, \infty)$ și $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ funcții definite pe o mulțime A . Avem:

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare a_n(x) \geq a_{n+1}(x), \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x \in A \\ \blacksquare a_n \xrightarrow[A]{u} 0 \\ \blacksquare \text{există } M > 0 \text{ astfel încât} \\ \quad |f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)| \leq M, \\ \quad \forall n \geq 0, \quad \forall x \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n \text{ este uniform convergentă.}$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 47-11

2.10.9 Teoremă. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} f_n: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sunt continue în } x_0 \in A \\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ este uniform convergentă} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ este funcție continuă în } x_0.$$

Demonstrație. Consecință directă a teoremei prezentate la pag. 56-8.

2.10.10 Dacă funcțiile $f_n: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în x_0 , atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ uniform convergentă} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

2.10.11 Teoremă. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue. Avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ uniform convergentă} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx,$$

oricare ar fi $[\alpha, \beta] \subseteq I$.

Demonstrație. Consecință directă a teoremei prezentate la pag. 57-10.

2.10.12 Teoremă. Fie $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile cu derivată continuă. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \text{ uniform convergentă,} \\ \blacksquare \text{există } x_0 \in [a, b] \text{ astfel încât} \\ \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) \text{ este convergentă} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \blacksquare \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ uniform convergentă,} \\ \blacksquare \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ este derivabilă,} \\ \blacksquare (\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n. \end{array} \right.$$

Demonstrație. Consecință directă a teoremei prezentate la pag. 58-13.

2.11 Serii de puteri

2.11.1 Definiție. Prin *serie de puteri* centrată în x_0 se înțelege o serie de forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots, \quad (2.6)$$

unde coeficienții a_n sunt numere fixate.

2.11.2 Teoremă. În cazul unei serii de puteri (2.6) există $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, numită raza de convergență a seriei, cu proprietățile:

- *Seria este absolut convergentă în orice punct x cu $|x - x_0| < R$;*
- *Seria este divergentă în orice punct x cu $|x - x_0| > R$;*
- *Seria este uniform convergentă în $[x_0 - r, x_0 + r]$, oricare ar fi r cu $0 < r < R$.*

Demonstrație. Dacă seria este convergentă doar în punctul x_0 , atunci $R = 0$. Dacă există $x' \neq x_0$ astfel încât $\sum_{n \geq 0} a_n(x' - x_0)^n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x' - x_0)^n = 0$. Rezultă că există $M > 0$ astfel încât $|a_n(x' - x_0)^n| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Dacă x este astfel încât $|x - x_0| < |x' - x_0|$, atunci

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(x' - x_0)^n| \left| \frac{x - x_0}{x' - x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x - x_0}{x' - x_0} \right|^n, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Seria $\sum_{n \geq 0} |a_n(x - x_0)^n|$ este convergentă conform criteriului comparației, seria geometrică $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{x - x_0}{x' - x_0} \right|^n$ fiind convergentă. Rezultă că $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ este absolut convergentă în orice punct x cu $|x - x_0| < |x' - x_0|$. Alegând

$$R = \sup \left\{ |x' - x_0| \left| \sum_{n \geq 0} a_n(x' - x_0)^n \text{ este convergentă} \right. \right\}$$

sunt, evident, îndeplinite primele două condiții. Dacă r este astfel încât $0 < r < R$, atunci $|(x_0 + r) - x_0| = r < R$ și seria $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ este convergentă. Deoarece

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n, \quad \text{oricare ar fi } x \in [x_0 - r, x_0 + r],$$

seria $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ este uniform convergentă în $[x_0 - r, x_0 + r]$ conform criteriului lui Weierstrass (pag. 59-6).

2.11.3

$$\text{Deoarece } \sum_{n=0}^k (x - x_0)^n = \begin{cases} \frac{1 - (x - x_0)^{k+1}}{1 - (x - x_0)} & \text{dacă } x \neq x_0 + 1, \\ k + 1 & \text{dacă } x = x_0 + 1, \end{cases}$$

$$\text{seria de puteri } \sum_{n \geq 0} (x - x_0)^n \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă} & \text{dacă } |x - x_0| < 1, \\ \text{divergentă} & \text{dacă } |x - x_0| \geq 1. \end{cases}$$

Seria are raza de convergență $R = 1$, iar suma ei este

$$S : (x_0 - 1, x_0 + 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (x - x_0)^n = \frac{1}{1 - (x - x_0)},$$

adică

$$\frac{1}{1 - (x - x_0)} = 1 + (x - x_0) + (x - x_0)^2 + \cdots + (x - x_0)^n + \cdots \quad \text{pentru } |x - x_0| < 1.$$

2.11.4 Teoremă (Cauchy-Hadamard).

Raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ este

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{dacă } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty, \\ \infty & \text{dacă } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Conform criteriului Cauchy (pag. 51-**27**), seria este convergentă dacă

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} < 1, \quad \text{adică} \quad |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

și divergentă dacă

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} > 1, \quad \text{adică} \quad |x - x_0| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2.11.5 Teoremă. Dacă șirul $(|a_n|/|a_{n+1}|)_{n \geq 0}$ are limită, atunci raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ este

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Demonstrație. Conform crit. raportului (pag. 51-**28**), seria este convergentă dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} < 1, \quad \text{adică} \quad |x - x_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

și divergentă dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}|}{|a_n (x - x_0)^n|} > 1, \quad \text{adică} \quad |x - x_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

2.11.6 Raza de convergență a seriei $\sum_{n \geq 0} \frac{(x-1)^n}{n!}$ este $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \infty$.

2.11.7 Definiție. Fie $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R . Functia $S: (x_0-R, x_0+R) \rightarrow \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, se numește *suma seriei*.

2.11.8 Teoremă.

Seriile $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ și $\sum_{n \geq 1} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ au aceeași rază de convergență.

Demonstrație. Fie R și R' razele de convergență ale celor două serii. Din relația

$$|x-x_0| < R' \Rightarrow \begin{cases} |a_n(x-x_0)^n| \leq R' |n a_n(x-x_0)^{n-1}| \\ \sum_{n \geq 1} n a_n(x-x_0)^{n-1} C \end{cases} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n C \Rightarrow |x-x_0| < R$$

rezultă $R' \leq R$. Arătăm în continuare că $|x-x_0| < R$ implică $|x-x_0| < R'$. Pentru r astfel încât $|x-x_0| < r < R$, seria $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ este convergentă și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n = 0$. Există $M > 0$ astfel încât $|a_n r^n| \leq M$ și

$$|n a_n(x-x_0)^{n-1}| = n |a_n| \cdot |x-x_0|^{n-1} \leq n \frac{M}{r^n} |x-x_0|^{n-1} = \frac{M}{r} n \left(\frac{|x-x_0|}{r} \right)^{n-1}.$$

Dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(\frac{|x-x_0|}{r} \right)^n}{n \left(\frac{|x-x_0|}{r} \right)^{n-1}} = \frac{|x-x_0|}{r} < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{|x-x_0|}{r} \right)^{n-1} C \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n a_n(x-x_0)^{n-1} C$$

și prin urmare $|x-x_0| < R'$, ceea ce conduce la $R \leq R'$.

2.11.9 Teoremă. Fie $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R . *Suma seriei*

$$S: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

este o funcție indefinit derivabilă (de clasa C^∞). Derivatele ei se pot obține prin derivare termen cu termen:

$$\begin{aligned} S' : (x_0 - R, x_0 + R) &\rightarrow \mathbb{R}, & S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}; \\ S'' : (x_0 - R, x_0 + R) &\rightarrow \mathbb{R}, & S''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x-x_0)^{n-2}; \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ S^{(k)} : (x_0 - R, x_0 + R) &\rightarrow \mathbb{R}, & S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n(x-x_0)^{n-k}. \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \end{aligned}$$

Demonstrație. Seria $\sum_{n \geq 0} a_n(x-x_0)^n$ și seriile obținute din ea prin derivare termen cu termen sunt uniform convergente pe orice interval $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$. Conform teoremei prezentate la pag. 60-12, restricția funcției sumă S la orice interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ cu $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ este indefinit derivabilă și derivatele ei se pot calcula derivând termen cu termen.

2.11.10 Plecând de la *seria geometrică* (a se vedea pag. 61-3, cazul $x_0 = 0$)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad \text{pentru } |x| < 1,$$

prin derivare termen cu termen, obținem:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad \text{pentru } |x| < 1;$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

2.11.11 Derivând termen cu termen

$$S(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

obținem relația

$$S'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = S(x) \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

din care rezultă că S este de forma $C e^x$ cu C o constantă. Deoarece $S(0) = 1$, avem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

2.11.12 Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat. Utilizând teorema de la pag. 62-5, se deduce că raza de convergență a *seriei binomiale*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

este $R = 1$. În acest caz, derivând termen cu termen relația

$$S(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad \text{pentru } |x| < 1,$$

obținem ecuația $S'(x) = \frac{\alpha}{1+x} S(x)$, care conduce la

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

2.11.13 Relații similare celor de la punctele precedente se pot obține prin substituție: Punând $-x$ în loc de x obținem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots && \text{pentru } |x| < 1; \\ \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n x^{n-1} + \cdots && \text{pentru } |x| < 1; \\ e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots && \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Punând x^2 în loc de x obținem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots && \text{pentru } |x| < 1; \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots && \text{pentru } |x| < 1; \\ e^{x^2} &= 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots && \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2.11.14 Teoremă. Fie $\sum_{n \geq 0} a_n (x-x_0)^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R .

Suma seriei

$$S: (x_0 - R, x_0 + R) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left. \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \right|_{\alpha}^{\beta}.$$

În particular, pentru orice $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ avem

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Demonstrație. Seria $\sum_{n \geq 0} a_n (x-x_0)^n$ este uniform convergentă pe orice interval $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$. Pentru un interval $[\alpha, \beta]$ dat, alegem $r > 0$ astfel încât $[\alpha, \beta] \subset [x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ și utilizăm teorema de la pag. 60-11.

2.11.15 Plecând de la relațiile

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots && \text{pentru } |x| < 1, \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots && \text{pentru } |x| < 1.\end{aligned}$$

prin integrare termen cu termen, obținem

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots && \text{pentru } |x| < 1, \\ \arctg x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots && \text{pentru } |x| < 1.\end{aligned}$$

Capitolul 3

Elemente de topologie. Continuitate

3.1 Mulțimi deschise

3.1.1 Prin *spațiu metric* se înțelege orice mulțime nevidă pe care s-a definit o distanță, iar prin *spațiu normat* orice spațiu vectorial pe care s-a definit o normă. Noțiunea de spațiu metric este mult mai generală decât cea de spațiu normat și în același timp cu o structură matematică mult mai săracă. Elementele unui spațiu normat pot fi descrise prin utilizarea unei baze în spațiul vectorial corespunzător. Orice spațiu normat $(E, \| \cdot \|)$ are o structură naturală de spațiu metric, dată de distanța

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \| x - y \| .$$

Noțiunea de spațiu metric fiind foarte generală, elementele pe care le implică sunt, în general, insuficiente pentru a permite descrierea unor sisteme fizice. Spațiile metrice care intervin în modelele matematice utilizate în fizică sunt, în general, spații normate sau submulțimi ale unor spații normate. În general, punctul de la care se pleacă în construcția unui model matematic este un spațiu normat.

3.1.2 Propoziție. *Orice submulțime nevidă a unui spațiu normat are o structură naturală de spațiu metric.*

Demonstrație. Dacă $(E, \| \cdot \|)$ este spațiu normat și dacă $S \subseteq E$ este o submulțime nevidă, atunci (S, d) , unde

$$d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\|,$$

este spațiu metric. Demonstrația este similară celei prezentate la pag. 38-2.

3.1.3 Exemplu. Sfera unitate cu centrul în origine

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

considerată cu distanța indusă din spațiul normat $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d((x, y, z), (x', y', z')) &= \|(x, y, z) - (x', y', z')\| \\ &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \end{aligned}$$

este spațiu metric.

3.1.4 Orice submulțime nevidă a unui spațiu metric are la rândul ei o structură de spațiu metric. Dacă (S, d) este spațiu metric și dacă $S_0 \subset S$ este o submulțime nevidă, atunci restricția aplicației d la $S_0 \times S_0$ este o distanță pe S_0 și deci $(S_0, d|_{S_0 \times S_0})$ este spațiu metric.

3.1.5 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric, $x_0 \in S$ un punct fixat și $r > 0$.

Prin *sfera deschisă* de centru x_0 și rază r se înțelege mulțimea

$$B_r(x_0) = \{x \in S \mid d(x_0, x) < r\}.$$

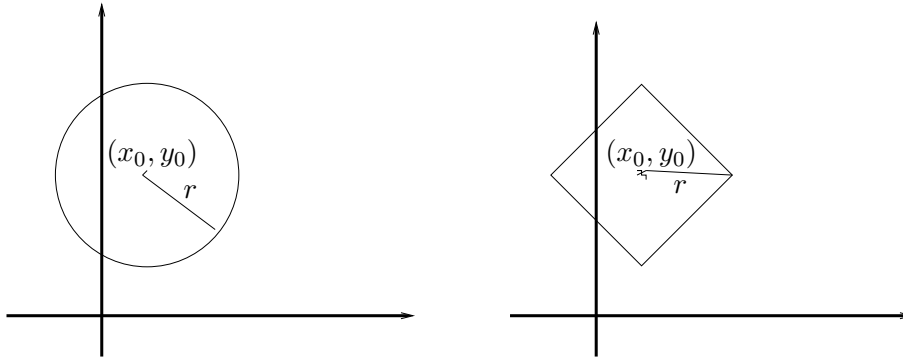


Figura 3.1: Sfere deschise din $\mathbb{R}^2$ în cazurile $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\|(x, y)\| = |x| + |y|$.

3.1.6 Exemple.

a) În spațiul normat $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avem $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

- b) În $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ cu $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, mulțimea $B_r(x_0, y_0)$ este un disc considerat fără circumferință (v. Fig. 3.1 , partea stângă).
- c) În $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ cu $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, sfera deschisă $B_r(x_0, y_0)$ este formată din punctele situate în interiorul unui pătrat (v. Fig. 3.1, partea dreaptă).
- c) În $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ cu $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ sfera deschisă $B_r(x_0, y_0)$ este formată din punctele situate în interiorul unui pătrat (v. Fig. 3.2 , partea stângă).
- d) În spațiul $(C^0([a, b]), \|\cdot\|)$ al funcțiilor continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ considerat împreună cu norma $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$, sfera deschisă $B_r(f_0)$ este formată din toate funcțiile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care (v. Fig. 3.2 , partea dreaptă)

$$|f(x) - f_0(x)| < r, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b],$$

adică din toate funcțiile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f_0(x) - r < f(x) < f_0(x) + r, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b].$$

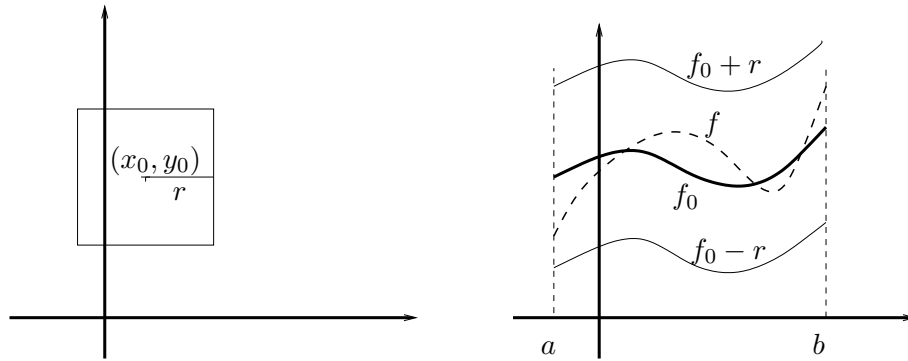


Figura 3.2: Sfere în cazurile $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ și $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

3.1.7 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric și $D \subseteq S$ o mulțime. Spunem despre un element $x \in D$ că este *punct interior* al mulțimii D dacă există $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset D$ (se vedea Fig. 3.3). Mulțimea formată din toate punctele interioare ale lui D este numită *interiorul* lui D și notată cu $\overset{\circ}{D}$.

3.1.8 Din definiția anterioară, rezultă că $\overset{\circ}{D} \subseteq D$, oricare ar fi $D \subseteq S$.

3.1.9 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric. Spunem despre o mulțime $D \subseteq S$ că este *mulțime deschisă* dacă $\overset{\circ}{D} = D$, adică dacă orice punct $x \in D$ este punct interior.

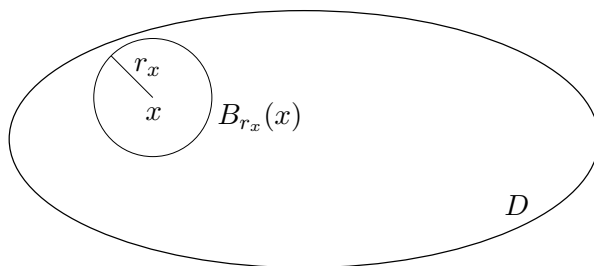


Figura 3.3: Punct interior.

3.1.10 Exemple.

a) În cazul spațiului normat $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, avem

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}, \quad \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset, \quad D = [0, 1) \Rightarrow \overset{\circ}{D} = (0, 1).$$

b) În cazul spațiului normat $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ cu $\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ avem:

$$\begin{aligned} D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} &\implies \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}; \\ D = \{(x, y) \mid y \geq 0\} &\implies \overset{\circ}{D} = \{(x, y) \mid y > 0\}. \end{aligned}$$

3.1.11 Problemă. Fie (S, d) un spațiu metric. Să se arate că:

- a) Mulțimile $\emptyset$ și S sunt mulțimi deschise;
- b) Orice reuniune de mulțimi deschise este o mulțime deschisă;
- c) Orice intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

3.1.12 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric. Prin *vecinătate* a unui punct $x \in S$ se înțelege orice mulțime deschisă care conține pe x .

3.2 Mulțimi închise

3.2.1 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric și $A \subseteq S$ o mulțime. Spunem despre un element $a \in S$ că este *punct limită* al mulțimii A dacă, pentru orice $r > 0$, avem $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$ (a se vedea Fig. 3.4). Mulțimea formată din toate punctele limită ale lui A este numită *închiderea* lui A și notată cu $\bar{A}$.

3.2.2 Exemple.

a) În cazul spațiului normat $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avem

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}, \quad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}, \quad \overline{[0, 1]} = [0, 1], \quad \overline{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

b) În cazul spațiului normat $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ cu $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, avem:

$$\overline{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$\overline{\{(x, y) \mid y > 0\}} = \{(x, y) \mid y \geq 0\}.$$

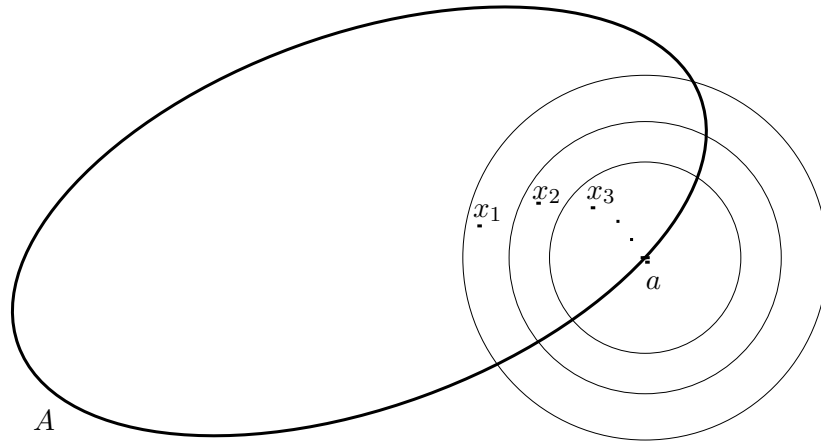


Figura 3.4: Punct limită.

3.2.3 Propoziție. Fie (S, d) un spațiu metric și $A \subseteq S$ o mulțime. Avem $a \in \bar{A}$ dacă și numai dacă există în A un șir convergent $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Demonstrație. Dacă $a \in \bar{A}$, atunci $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Alegând pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ un element $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$, obținem un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$. Invers, dacă există în $\bar{A}$ un șir convergent $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci pentru orice $r > 0$ există $n_r \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in B_r(a) \cap A$, oricare ar fi $n \geq n_r$.

3.2.4 Orice punct $x \in A$ este punct limită al lui A . Oricare ar fi A avem $A \subseteq \bar{A}$.

3.2.5 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric. Spunem despre o mulțime $A \subseteq S$ că este mulțime închisă dacă $A = \bar{A}$, adică dacă A își conține toate punctele limită.

3.2.6 Propoziție. Mulțimea A din spațiul metric (S, d) este închisă dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent din A aparține lui A .

Demonstrație. Orice element din $\bar{A}$ este limita unui șir convergent din A și pentru orice șir convergent $(x_n)_{n \geq 0}$ din A are loc relația $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{A}$. Avem $\bar{A} = A$ dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent din A aparține lui A .

3.2.7 Teoremă. Fie (S, d) un spațiu metric. O mulțime $D \subseteq S$ este deschisă dacă și numai dacă complementara ei $S \setminus D$ este mulțime închisă.

Demonstrație. “ $\Rightarrow$ ” Fie $D \subseteq S$ mulțime deschisă. Avem de arătat că $\overline{S \setminus D} \subseteq S \setminus D$. Fie $x \in \overline{S \setminus D}$. Presupunând prin absurd că $x \notin S \setminus D$, rezultă că $x \in D$ și există $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset D$. Dar în acest caz $B_{r_x}(x) \cap (S \setminus D) = \emptyset$, ceea ce este în contradicție cu $x \in \overline{S \setminus D}$. “ $\Leftarrow$ ” Fie $D \subseteq S$ mulțime închisă. Avem de arătat că $S \setminus D$ este deschisă. Fie $x \in S \setminus D$. Deoarece $\bar{D} = D$, avem $x \notin \bar{D}$ și prin urmare există $r > 0$ astfel încât $B_r(x) \cap D = \emptyset$, adică astfel încât $B_r(x) \subseteq S \setminus D$.

3.2.8 Exercițiu. Orice submulțime finită a unui spațiu metric este închisă.

Rezolvarea 1. Singurele șiruri convergente sunt cele constante, de la un rang încolo.

Rezolvarea 2. Fie (S, d) un spațiu metric și $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset S$. Mulțimea $S \setminus A$ este deschisă: dacă $x \in S - A$, atunci există $r_x = \min_{1 \leq n \leq k} d(x, x_n)$ cu $B_{r_x}(x) \subset S \setminus A$.

3.2.9 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric. Spunem despre o submulțime $A \subset S$ că este *densă* în S dacă $\bar{A} = S$.

3.2.10 Dacă A este densă în S , atunci orice element al lui S este limita unui șir convergent de elemente din A . Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ este densă în spațiul normat $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Orice număr real este limita unui șir de numere raționale.

3.3 Limita unei funcții într-un punct

3.3.1 În anumite aplicații, este utilă cunoașterea comportării unei funcții f în vecinătatea unui punct a fără a lua în considerare valoarea pe care o ia funcția în punctul a (în cazul în care ea este definită în a). În particular, este util să se știe ce se întâmplă cu valorile $f(x)$ ale funcției când x se apropie din ce în ce mai mult de punctul a . Pentru ca problema să aibă sens, este necesar ca domeniul de definiție al lui f să conțină puncte oricât de apropiate de a , diferite de a .

3.3.2 Definiție. Spunem despre un punct $a \in \mathbb{R}$ că este *punct de acumulare* pentru o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (D - \{a\}) \neq \emptyset$. Prin definiție, ∞ este punct de acumulare pentru mulțimile nemajorate, iar $-\infty$ este punct de acumulare pentru mulțimile neminate.

3.3.3 Punctul $a = 1$ este punct de acumulare pentru $D = (0, 1) \cup (3, \infty)$.

Punctul $a = 2$ nu este punct de acumulare pentru $D = (0, 1) \cup (3, \infty)$.

Punctul $a = 0$ este punct de acumulare pentru $D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

Punctul $a = 1$ nu este punct de acumulare pentru $D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

Punctul $a = \sqrt{2}$ este punct de acumulare pentru $\mathbb{Q}$.

3.3.4 Definiție. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f are limita l în punctul a și scriem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $D \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

3.3.5 Exercițiu. Fie funcția

$$\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{\pi}} \sin \frac{1}{x} = 1, \quad \text{dar} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{nu există.}$$

Rezolvare. Punctul $a = \frac{2}{\pi}$ este punct de acumulare pentru $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și

$$x_n \rightarrow \frac{2}{\pi} \implies \sin \frac{1}{x_n} \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Punctul $a = 0$ este punct de acumulare pentru $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Limita nu există deoarece

$$\alpha_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 \leftarrow \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \beta_n, \quad \text{dar} \quad \sin \frac{1}{\alpha_n} \rightarrow 0 \neq 1 \leftarrow \sin \frac{1}{\beta_n}.$$

3.3.6 MATHEMATICA: Limit[f[x], x -> a]

In[1]:=Limit[Sin[1/x], x -> 2/Pi] $\mapsto$ Out[1]=1

In[2]:=Limit[Sin[x]/x, x -> 0] $\mapsto$ Out[2]=1

In[3]:=Limit[(1+1/x)^x, x -> Infinity] $\mapsto$ Out[3]=e.

3.3.7 Teoremă. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct de acumulare pentru D .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0, \text{ există } \delta > 0 \text{ astfel încât} \\ x \in D \\ x \neq a \\ |x - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Demonstrație. “ $\implies$ ” Presupunând contrariul, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât, oricare ar fi $\delta > 0$, există $x \in D$ cu $x \neq a$, $|x - a| < \delta$ și $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. În particular, alegând $\delta = \frac{1}{n}$ există $x_n \in D$ cu $x_n \neq a$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ și $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și conform ipotezei trebuie să avem relația $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$, în contradicție cu $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. “ $\impliedby$ ” Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir din $D \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Pentru a arăta că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Conform ipotezei, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in D$ cu $x \neq a$ și $|x - a| < \delta$, are loc relația $|f(x) - l| < \varepsilon$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - a| < \delta$ și deci $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$.

3.3.8 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric. Spunem despre un punct $a \in S$ că este punct de acumulare pentru $D \subseteq S$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem $B_\varepsilon(a) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

3.3.9 Definiție. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice, $f: D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ o funcție și $a \in S_1$ punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f are limita l în punctul a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din $D \setminus \{a\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

3.3.10 Teoremă. Fie $f: D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ o funcție și a punct de acumulare pentru D .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0, \text{ există } \delta > 0 \text{ astfel încât} \\ x \in D \\ x \neq a \\ d_1(x, a) < \delta \end{array} \right\} \implies d_2(f(x), l) < \varepsilon.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 74-7.

3.3.11 În cazul spațiilor $\mathbb{R}^n$, dacă nu se indică o altă normă, vom subînțelege că structura de spațiu normat considerată este cea definită de norma uzuală

$$\| \cdot \|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

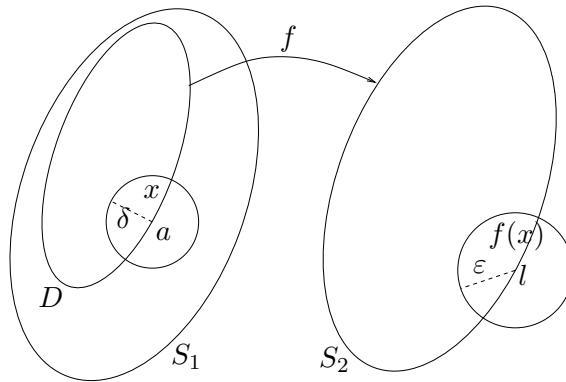


Figura 3.5: Limita unei funcții într-un punct.

Ea este norma asociată *produsului scalar uzual*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

adică

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

și definește *distanța uzuală*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

3.3.12 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Să se arate că

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = \frac{1}{5} \quad \text{și} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Rezolvare. Punctul $(1, 2)$ este punct de acumulare pentru $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Avem

$$(x_n, y_n) \rightarrow (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow 1 \\ y_n \rightarrow 2 \end{cases} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{x_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \frac{1^3}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5}.$$

Punctul $(0, 0)$ este punct de acumulare pentru D . Dacă $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$, atunci

$$0 \leq |f(x_n, y_n) - 0| = \left| \frac{x_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \right| = \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} |x_n| \leq |x_n| \rightarrow 0.$$

3.3.13 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Să se arate că nu există limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y),$$

deși există *limitele iterate*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0 = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)).$$

Rezolvare. Oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n} \right) = (0, 0), \quad \text{dar limita} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n} \right) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \quad \text{depinde de } \alpha.$$

3.3.14 Propoziție. Fie funcția

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)),$$

și $a \in \mathbb{R}^n$ un punct de acumulare pentru D . Avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (l_1, l_2, \dots, l_k) \iff \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = l_j, \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Demonstrație. Afirmția rezultă din relația (a se vedea pag. 45-13)

$$\left. \begin{array}{c} |f_1(x) - l_1| \\ \vdots \\ |f_k(x) - l_k| \end{array} \right\} \leq \|f(x) - l\| \leq |f_1(x) - l_1| + \dots + |f_k(x) - l_k|.$$

3.4 Funcții continue

3.4.1 În acest paragraf vom studia comportarea unei funcții în vecinătatea unui punct a aparținând domeniului de definiție comparând valoarea funcției în a cu valorile luate în vecinătatea lui a .

3.4.2 Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $a \in D$. Spunem că f este continuă în a dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din D cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

3.4.3 Teoremă. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $a \in D$. Avem:

$$f \text{ este continuă în } a \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0, \text{ există } \delta > 0 \text{ astfel încât:} \\ x \in D \\ |x - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 74-7.

3.4.4 Definiție. Fie $(S_1, d_1), (S_2, d_2)$ spații metrice, $f: D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ o funcție și $a \in D$. Spunem că funcția f este continuă în a dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din D cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

3.4.5 Definiție. Spunem că funcția $f: D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ este funcție continuă dacă este continuă în orice punct $a \in D$.

3.4.6 Punctele lui D care nu sunt puncte de acumulare se numesc *puncte izolate*.

Dacă $a \in D$ este punct izolat și dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir din D cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = a$, oricare ar fi $n \geq n_0$, ceea ce conduce la $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Astfel, o funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului de definiție.

3.4.7 O funcție f este continuă într-un punct de acumulare a aparținând domeniului de definiție dacă și numai dacă f are limită în a și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

3.4.8 Teoremă. Fie $f: D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ o funcție și $a \in D$. Avem:

$$f \text{ este continuă în } a \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pentru orice } \varepsilon > 0, \text{ există } \delta > 0 \text{ astfel încât:} \\ x \in D \\ d_1(x, a) < \delta \end{array} \right\} \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 74-7.

3.4.9 Propoziție. (Prelungirea prin continuitate). Fie $f: D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ o funcție și a un punct de acumulare pentru D care nu aparține lui D . Dacă există limita

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

atunci funcția

$$\tilde{f}: D \cup \{a\} \rightarrow S_2, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in D, \\ l & \text{dacă } x = a, \end{cases}$$

este continuă în a .

Demonstrație. Afirmatia rezultă direct din definiția continuității.

3.4.10 Exemplu. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

se poate prelungi prin continuitate, rezultând funcția continuă

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

3.4.11 Propoziție. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) , (S_3, d_3) spații metrice și

$$f : D_1 \subseteq S_1 \longrightarrow S_2, \quad g : D_2 \subseteq S_2 \longrightarrow S_3$$

două funcții astfel încât $f(D_1) \subseteq D_2$. Dacă f este continuă în punctul $a \in D_1$ și dacă g este continuă în $f(a) \in D_2$, atunci funcția compusă

$$g \circ f : D_1 \longrightarrow S_3, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

este continuă în punctul a .

Demonstrație. Din continuitatea lui f în a și a lui g în $f(a)$ rezultă relația

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a) \implies (g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

care arată că $g \circ f$ este continuă în a .

3.4.12 Definiție. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice. Spunem că funcția

$f : D \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ este funcție continuă dacă este continuă în orice punct $a \in D$.

3.4.13 Propoziție. Dacă $f : S_1 \longrightarrow S_2$ este funcție continuă, atunci:

$$D \text{ este deschisă în } S_2 \implies f^{-1}(D) \text{ este deschisă în } S_1.$$

Demonstrație. Fie $a \in f^{-1}(D) = \{x \in S_1 \mid f(x) \in D\}$. Deoarece $f(a)$ aparține mulțimii deschise D , rezultă că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B_\varepsilon(f(a)) \subset D$. Funcția f fiind continuă în a , există $\delta > 0$ astfel încât $d_1(x, a) < \delta \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$, adică relația $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ din care rezultă $B_\delta(a) \subset f^{-1}(D)$.

3.4.14 Propoziție. Dacă $(E, \|\cdot\|)$ este spațiu normat, atunci aplicația

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$$

este continuă. În particular, aplicația modul $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ este continuă.

Demonstrație. Din definiția normei rezultă relațiile

$$\|x_n\| = \|x_n - a + a\| \leq \|x_n - a\| + \|a\|, \quad \|a\| = \|a - x_n + x_n\| \leq \|x_n - a\| + \|x_n\|$$

care conduc la

$$-\|x_n - a\| \leq \|x_n\| - \|a\| \leq \|x_n - a\|, \quad \text{adică} \quad |\|x_n\| - \|a\|| \leq \|x_n - a\|$$

și prin urmare,

$$x_n \rightarrow a \implies \|x_n - a\| \rightarrow 0 \implies |\|x_n\| - \|a\|| \rightarrow 0 \implies \|x_n\| \rightarrow \|a\|.$$

3.4.15 Propoziție. Dacă $(E, \|\cdot\|)$ este spațiu normat, atunci aplicațiile

$$E \times E \longrightarrow E : (x, y) \mapsto x + y, \quad \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

sunt continue (a se vedea pag. 37-5).

Demonstrație. Dacă $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$, atunci $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ și avem

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0.$$

Dacă $(\alpha_n, x_n) \rightarrow (\alpha, a)$, atunci $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $x_n \rightarrow a$ și avem

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\alpha_n x_n - \alpha a\| &= \|(\alpha_n - \alpha)(x_n - a) + (\alpha_n - \alpha)a + \alpha(x_n - a)\| \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| \|x_n - a\| + |\alpha_n - \alpha| \|a\| + |\alpha| \|x_n - a\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.4.16 Teoremă. Orice aplicație liniară $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ este continuă.

Demonstrație. Orice vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ admite în raport cu baza

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

reprezentarea $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$. Din relația (a se vedea pag. 41-9)

$$\begin{aligned} \|Ax - Aa\| &= \|A(x - a)\| = \|A((x_1 - a_1)e_1 + (x_2 - a_2)e_2 + \dots + (x_n - a_n)e_n)\| \\ &\leq \|A((x_1 - a_1)e_1)\| + \|(x_2 - a_2)e_2\| + \dots + \|(x_n - a_n)e_n\| \\ &= |x_1 - a_1| \|Ae_1\| + |x_2 - a_2| \|Ae_2\| + \dots + |x_n - a_n| \|Ae_n\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|^2} = \|x - a\| \sqrt{\sum_{j=1}^n \|Ae_j\|^2}, \end{aligned}$$

verificată oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^n$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow a} Ax = Aa$.

3.4.17 Propoziție. O funcție

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)),$$

este continuă într-un punct $a \in D$ dacă și numai dacă fiecare dintre funcțiile

$f_j : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\},$
este continuă în punctul a .

Demonstrație. Afirmatia rezultă din relația (a se vedea pag. 45-13)

$$\left. \begin{array}{c} |f_1(x) - f_1(a)| \\ \vdots \\ |f_k(x) - f_k(a)| \end{array} \right\} \leq \|f(x) - f(a)\| \leq |f_1(x) - f_1(a)| + \dots + |f_k(x) - f_k(a)|.$$

3.5 Mulțimi compacte

3.5.1 Definiție. Spunem despre o mulțime K dintr-un spațiu metric (S, d) că este *compactă* (prin șiruri) dacă orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ din K conține cel puțin un subșir $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergent către un element din K .

3.5.2 Exercițiu. În spațiul $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, orice interval $[a, b]$ este mulțime compactă.

Rezolvare. Orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ din $[a, b]$ este mărginit și conform teoremei lui Cesaro (pag. 30-18) conține un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geq 0}$. În plus, avem:

$$a \leq x_{n_k} \leq b \implies a \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq b.$$

3.5.3 Teoremă. Într-un spațiu metric, orice mulțime compactă este închisă.

Demonstrație. Fie (S, d) un spațiu metric și $K \subset S$ o mulțime compactă. Dacă $a \in \bar{K}$, atunci există în K un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Mulțimea K fiind compactă, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ conține un subșir $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergent la un element din K . Dar $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și prin urmare $a \in K$. Rezultă că $\bar{K} \subseteq K$.

3.5.4 Definiție. Spunem despre o mulțime A dintr-un spațiu metric (S, d) că este *mărginită* dacă există $a \in S$ și $r > 0$ astfel încât $A \subset B_r(a)$.

3.5.5 Teoremă. Într-un spațiu metric, orice mulțime compactă este mărginită.

Demonstrație. Fie (S, d) un spațiu metric și $K \subset S$ o mulțime compactă. Presupunând că K nu este mărginită, există un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ în K astfel încât $d(x_n, x_k) \geq$

1, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}$. El poate fi generat în modul următor: alegem $x_0 \in K$, apoi $x_1 \in K - B_1(x_0)$, apoi $x_2 \in K - (x_0) \cup B_1(x_1)$, apoi $x_3 \in K - (B_1(x_0) \cup B_1(x_1) \cup B_1(x_2))$, etc. Mulțimea nemărginită K nu este conținută în $B_1(x_0) \cup B_1(x_1) \cup \dots \cup B_1(x_n)$ deoarece alegând

$$r = \max\{1, d(x_0, x_1) + 1, d(x_0, x_2) + 1, \dots, d(x_0, x_n) + 1\}$$

avem $B_1(x_0) \cup B_1(x_1) \cup \dots \cup B_1(x_n) \subset B_r(x_0)$. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ nu conține niciun subsir convergent, ceea ce este în contradicție cu ipoteza ca A este mulțime compactă.

3.5.6 Teoremă (Bolzano-Weierstrass).

În spațiul $\mathbb{R}^m$, o mulțime este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

Demonstrație. Fie $K \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime închisă și mărginită. Avem de arătat că orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ din K conține un subsir $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergent în K . Mulțimea mărginită K poate fi închisă într-un paralelipiped $K \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Utilizând metoda prezentată la pag. 30-18, bazată pe divizări succesive ale paralelipipedului putem extrage din $(x_n)_{n \geq 0}$ un subsir $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergent în $\mathbb{R}^n$. Mulțimea închisă K conține limitele tuturor șirurilor convergente cu elemente din K .

3.5.7 Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice și $A \subset S_1$. Spunem despre o funcție

$f: A \rightarrow S_2$ că este *continuă* dacă este continuă în orice punct $a \in A$, adică dacă, pentru orice $a \in A$ și orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_a > 0$ astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \\ d_1(x, a) < \delta_a \end{array} \right\} \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

3.5.8 Definiție. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice și $A \subset S_1$.

Spunem despre o funcție $f: A \rightarrow S_2$ că este *uniform continuă* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in A \\ d_1(x, y) < \delta \end{array} \right\} \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

3.5.9 Orice funcție unifom continuă este funcție continuă.

3.5.10 Exercițiu. Funcția

$$f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

este continuă, dar nu este uniform continuă.

Rezolvare. Presupunem f uniform continuă. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, există $\delta > 0$ astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in (0, 1) \\ |x - y| < \delta \end{array} \right\} \implies \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \varepsilon.$$

Putem alege $\delta < 1$. Deoarece $\delta, \frac{\delta}{2} \in (0, 1)$ și $|\delta - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$, trebuie ca $|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}| < \frac{1}{2}$, adică $\delta > 2$, în contradicție cu alegerea $\delta < 1$.

3.5.11 Teoremă. *O funcție continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă.*

Demonstrație. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice, $K \subset S_1$ o mulțime compactă și $f : K \rightarrow S_2$ o funcție continuă. Avem de arătat că f este uniform continuă. Presupunând contrariul, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\delta > 0$ există $x, y \in K$ cu $d_1(x, y) < \delta$ și $d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. În particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$, există $x_n, y_n \in K$ cu $d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ și $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Deoarece K este mulțime compactă, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ conține un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ cu limita $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ aparținând lui K . Din relația $0 \leq d_1(a, y_{n_k}) \leq d_1(a, x_{n_k}) + d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) < d_1(a, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}$ rezultă că $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = a$. Funcția f fiind continuă în a , avem $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$. Inegalitatea $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d_2(f(x_{n_k}), f(a)) + d_2(f(a), f(y_{n_k}))$ conduce la $\lim_{k \rightarrow \infty} d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0$, în contradicție cu $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

3.5.12 Definiție. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice și $A \subset S_1$. Spunem despre o funcție $f : A \rightarrow S_2$ că este *mărginită* dacă $f(A)$ este mulțime mărginită.

3.5.13 Teoremă. *O funcție continuă pe o mulțime compactă este mărginită.*

Demonstrație. Presupunem că $f : K \subset S_1 \rightarrow S_2$ nu este mărginită și fie $b \in S_2$ fixat. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $f(K) \not\subset B_n(b)$, adică există $x_n \in K$ cu $d_2(b, f(x_n)) \geq n$. Deoarece K este mulțime compactă, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ conține un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ cu limita $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ aparținând lui K . Funcția f fiind continuă în a , avem $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$, adică $\lim_{k \rightarrow \infty} d_2(f(x_{n_k}), f(a)) = 0$. În particular, există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_2(f(x_{n_k}), f(a)) \leq 1$, oricare ar fi $k \geq N$. Relația

$$n_k \leq d_2(b, f(x_{n_k})) \leq d_2(b, f(a)) + d_2(f(a), f(x_{n_k})) \leq d_2(b, f(a)) + 1$$

verificată, oricare ar fi $k \geq N$, arată că șirul strict crescător de numere naturale $(n_k)_{k \geq 0}$ este mărginit, ceea ce este imposibil.

3.5.14 Teoremă. Fie (S, d) spațiu metric. Funcțiile continue $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformă mulțimi compacte în mulțimi compacte.

Demonstrație. Fie $K \subset S$ mulțime compactă. Din teorema anterioară rezultă că $f(K)$ este mulțime mărginită. Rămâne să arătăm că $f(K)$ este închisă. Fie $(f(x_n))_{n \geq 0}$ un șir din $f(K)$ convergent în $\mathbb{R}^m$. Avem de arătat că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ aparține mulțimii $f(K)$. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ din mulțimea compactă K conține un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ cu limita $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ aparținând lui K . Deoarece f este continuă în a , avem $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ aparține mulțimii $f(K)$.

3.5.15 Definiție. Spunem despre o funcție reală mărginită $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ că *își atinge marginile* dacă există $a, b \in A$ astfel încât $\inf_{x \in A} f(x) = f(a)$ și $\sup_{x \in A} f(x) = f(b)$.

3.5.16 Teoremă. O funcție reală continuă pe o mulțime compactă își atinge marginile.

Demonstrație. Fie (S, d) un spațiu metric, $K \subset S$ o mulțime compactă și $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală continuă. Conform teoremei anterioare, f este mărginită și prin urmare, există numerele reale $m = \inf_{x \in K} f(x)$ și $M = \sup_{x \in K} f(x)$. Presupunem că nu există $a \in K$ cu $f(a) = m$. În acest caz $m < f(x)$, oricare ar fi $x \in K$ și

$$g: K \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{f(x) - m},$$

este funcție continuă. Conform teoremei anterioare, funcția g este mărginită. Notând $M' = \sup_{x \in K} g(x)$ avem $g(x) \leq M'$, adică $f(x) \geq m + \frac{1}{M'}$, oricare ar fi $x \in K$. Ultima relație este însă în contradicție cu faptul că m este cel mai mare minorant pentru mulțimea $\{f(x) \mid x \in K\}$. Rămâne că există $a \in K$ cu $f(a) = m$. Printr-un raționament similar, se arată că există $b \in K$ cu $f(b) = M$.

3.6 Mulțimi conexe

3.6.1 Definiție. Spunem despre o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, că *are proprietatea lui Darboux* dacă, oricare ar fi $a, b \in I$ distincte și oricare ar fi numărul λ între $f(a)$ și $f(b)$, există c_λ între a și b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

3.6.2 O funcție cu proprietatea lui Darboux este o funcție care nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

3.6.3 Teoremă.

Orice funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

Demonstrație. Fie $a < b$ și $f(a) \leq f(b)$ (cazul $f(a) \geq f(b)$ se analizează similar). Dacă $f(a) = f(b)$, atunci $\lambda = f(a)$ și alegând $c_\lambda = a$, avem $f(c_\lambda) = \lambda$. Analizăm în continuare cazul $f(a) < \lambda < f(b)$. Mulțimea $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \lambda\}$ este nevidă și mărginită. Arătăm că $f(\sup A) = \lambda$, adică se poate alege $c_\lambda = \sup A$. Deoarece $\lambda < f(b)$, avem $c_\lambda < b$ și $f(y) > \lambda$, pentru orice $y \in (c_\lambda, b)$. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir convergent din A și $(y_n)_{n \geq 0}$ un șir convergent din (c_λ, b) astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Deoarece f este continuă în c_λ și $f(x_n) \leq \lambda < f(y_n)$, prin trecere la limită, obținem $f(c_\lambda) = \lambda$.

3.6.4 Propoziție. *Orice funcție continuă și injectivă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe un interval I , este strict monotonă.*

Demonstrație. Presupunând că f nu este strict monotonă, există $x_1 < x_2 < x_3$ în I astfel încât $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ sau $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Funcția f ia valoarea $\lambda = \frac{1}{2}(f(x_2) + \max\{f(x_1), f(x_3)\})$, respectiv $\lambda = \frac{1}{2}(f(x_2) + \min\{f(x_1), f(x_3)\})$ atât în intervalul (x_1, x_2) cât și în intervalul (x_2, x_3) , în contradicție cu injectivitatea ei.

3.6.5 Teoremă. *Inversa unei funcții continue bijective $f: I \rightarrow J$, definite pe un interval I , este continuă și strict monotonă.*

Demonstrație. Din propoziția anterioară rezultă că f este strict monotonă. Vom analiza cazul în care f este strict crescătoare (celălalt caz se analizează asemănător). Funcția $f^{-1}: J \rightarrow I$ este strict crescătoare: oricare ar fi $y_1, y_2 \in J$ există $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $y_1 = f(x_1)$ și $y_2 = f(x_2)$, iar $y_1 < y_2$ implică $x_1 < x_2$. Arătăm că f^{-1} este continuă într-un punct oarecare $y_0 \in J$. Considerăm cazul în care y_0 nu este extremitate a intervalului (cazul în care y_0 este extremitate se analizează asemănător). Fie $x_0 \in I$ și $\varepsilon > 0$ astfel încât $f(x_0) = y_0$ și $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$. Deoarece $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, există $\delta > 0$ astfel încât $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ și prin urmare $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.

3.6.6 Definiție. Fie (S, d) un spațiu metric. Spunem despre o mulțime $A \subset S$ că

este conexă dacă în S nu există două mulțimi deschise D_1, D_2 astfel încât

$$A \subset D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap A \neq \emptyset, \quad D_2 \cap A \neq \emptyset \quad \text{și} \quad A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

3.6.7 Mulțimea $\{0, 1\}$ din $\mathbb{R}$ nu este conexă deoarece există, de exemplu, mulțimile deschise $D_1 = (-\infty, \frac{1}{2})$ și $D_2 = (\frac{1}{3}, \infty)$ astfel încât

$$\{0, 1\} \subset D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap \{0, 1\} \neq \emptyset, \quad D_2 \cap \{0, 1\} \neq \emptyset, \quad \{0, 1\} \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

3.6.8 În cazul lui $\mathbb{R}$, denumirea de *interval* este utilizată pentru mulțimi de forma

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \mid a < x < b\}, & (a, \infty) &= \{x \mid a < x\}, & (-\infty, \infty) &= \mathbb{R}, \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\}, & [a, \infty) &= \{x \mid a \leq x\}, & [a, a] &= \{a\}, \\ [a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\}, & (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\} & (a, a) &= \emptyset, \\ [a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\}, & (-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\}. \end{aligned}$$

3.6.9 Propoziție. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ este conexă dacă și numai dacă este interval.

Demonstrație. “ $\Rightarrow$ ” Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ conexă nevidă. Presupunând că A nu este interval, există a, b, c astfel încât $a < c < b$, $a \in A$, $b \in A$ și $c \notin A$. În acest caz, există mulțimile deschise $D_1 = (-\infty, c)$, $D_2 = (c, \infty)$ astfel încât $A \subset D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap A \neq \emptyset$, $D_2 \cap A \neq \emptyset$ și $A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$, în contradicție cu ipoteza că A este conexă.

” $\Leftarrow$ ” Presupunând că A nu este conexă, există două mulțimi deschise D_1, D_2 astfel încât $A \subset D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap A \neq \emptyset$, $D_2 \cap A \neq \emptyset$ și $A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Funcția

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in D_1 \cap A, \\ 1 & \text{dacă } x \in D_2 \cap A, \end{cases}$$

este continuă în orice punct $a \in A$. Dacă $a \in D_1 \cap A$, atunci există $r_a > 0$ astfel încât $B_{r_a}(a) \subset D_1$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, alegând $\delta = r_a$, avem

$$\left. \begin{array}{l} x \in A \\ |x - a| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon.$$

ceea ce arată că f este continuă în a . Cazul $a \in D_2 \cap A$ se analizează similar. Conform teoremei precedente (pag. 84-3), funcția f continuă pe intervalul A are proprietatea lui Darboux. Acest lucru nu este însă posibil deoarece $f(A) = \{0, 1\}$.

3.6.10 Folosind limbajul obișnuit, o mulțime conexă poate fi descrisă ca fiind o mulțime “formată dintr-o singură bucată”.

3.6.11 Teoremă.

Imaginea unei mulțimi conexe, printr-o funcție continuă, este o mulțime conexă.

Demonstrație. Fie (S_1, d_1) , (S_2, d_2) spații metrice, $A \subseteq S_1$ mulțime conexă și fie $f : A \rightarrow S_2$ o funcție continuă. Avem de arătat că $f(A)$ este mulțime conexă. Presupunând că $f(A)$ nu este mulțime conexă, există două mulțimi deschise $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ astfel încât $f(A) \subset \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$, $\tilde{D}_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $\tilde{D}_2 \cap f(A) \neq \emptyset$ și $f(A) \cap \tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 = \emptyset$. Deoarece preimaginea unei mulțimi deschise printr-o aplicație continuă este o mulțime deschisă (a se vedea pag. 78-13), mulțimile $D_1 = f^{-1}(\tilde{D}_1)$ și $D_2 = f^{-1}(\tilde{D}_2)$ sunt mulțimi deschise. Dar

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 \cap f(A) \neq \emptyset &\Rightarrow D_1 \cap A \neq \emptyset, & f(A) \subset \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 &\Rightarrow A \subset D_1 \cup D_2, \\ \tilde{D}_2 \cap f(A) \neq \emptyset &\Rightarrow D_2 \cap A \neq \emptyset, & f(A) \cap \tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 = \emptyset &\Rightarrow A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \end{aligned}$$

ceea ce arată că A nu este conexă, în contradicție cu ipoteza.

3.6.12 Exemple.

- a) Imaginea $\gamma([\alpha, \beta]) = \{\gamma(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ a unei funcții continue

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

este mulțime conexă.

- b) Cercul $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ din plan este mulțime conexă deoarece este imaginea aplicației continue

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

- c) Segmentul închis $[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$ care unește două puncte $a, b \in \mathbb{R}^n$ este mulțime conexă deoarece este imaginea aplicației continue

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (1-t)a + tb.$$

3.6.13 Propoziție.

Fie (S, d) un spațiu metric, $A \subseteq S$ o mulțime conexă și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă există $a, b \in A$ cu $f(a)f(b) < 0$, atunci există $c \in A$ astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstrație. Mulțimea $f(A) \subset \mathbb{R}$ fiind conexă, este un interval care conține numerele de semn diferit $f(a)$ și $f(b)$.

3.6.14 Propoziție.

Dacă $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$f([a, b]) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right].$$

Demonstrație. Funcția f își atinge marginile și $f([a, b])$ este interval.

3.6.15 Propoziție. *O submulțime nevidă $A \subseteq S$ a unui spațiu metric este conexă dacă și numai dacă orice funcție continuă de forma $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ este constantă.*

Demonstrație. “ $\Rightarrow$ ” Mulțimea nevidă $f(A) \subseteq \{0, 1\}$ fiind conexă, singurele variante posibile sunt $f(A) = \{0\}$ și $f(A) = \{1\}$. ” $\Leftarrow$ ” Dacă A nu este conexă, atunci există două mulțimi deschise D_1, D_2 astfel încât $A \subset D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap A \neq \emptyset$, $D_2 \cap A \neq \emptyset$ și $A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Funcția neconstantă

$$f: A \longrightarrow \{0, 1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in D_1 \cap A, \\ 1 & \text{dacă } x \in D_2 \cap A, \end{cases}$$

este continuă (a se vedea pag. 85-9)

3.6.16 Teoremă. *Dacă $(A_i)_{i \in J}$ este o familie de submulțimi conexe ale unui spațiu metric și dacă $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, atunci mulțimea $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ este conexă.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm că orice funcție continuă $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ este constantă. Fie $a \in \bigcap_{i \in J} A_i$ fixat. Restricția $f|_{A_i}: A_i \rightarrow \{0, 1\}$ a funcției f fiind continuă pe mulțimea conexă A_i , este constantă și prin urmare avem $f(x) = f(a)$, oricare ar fi $x \in A_i$ și oricare ar fi $i \in J$.

3.6.17 Exemple.

- a) Linia poligonală $[a, b] \cup [b, c]$ este mulțime conexă, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}^n$.
- b) Linia poligonală

$$[a^0, a^1] \cup [a^1, a^2] \cup \dots \cup [a^{k-1}, a^k]$$

este mulțime conexă, oricare ar fi punctele $a^0, a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$.

3.6.18 Teoremă. *O mulțime deschisă nevidă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este conexă dacă și numai dacă orice două puncte din A pot fi unite cu o linie poligonală conținută în A .*

Demonstrație. “ $\Rightarrow$ ” Fie $a \in A$ fixat și fie D_1 mulțimea tuturor punctelor $x \in A$ care pot fi unite cu a printr-o linie poligonală conținută în A . Pentru fiecare $x \in D_1$, există o linie poligonală L_x care unește a cu x și $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset A$. Deoarece linia poligonală $L_x \cup [x, y]$ care unește a cu y este conținută în A , oricare ar fi $y \in B_{r_x}(x)$, rezultă că $B_{r_x}(x) \subset D_1$ și prin urmare D_1 este mulțime deschisă. Mulțimea $D_2 = A - D_1$ este și ea deschisă: dacă $x \in D_2$, atunci există $\varepsilon_x > 0$ astfel încât $B_{\varepsilon_x}(x) \subset D_2$ deoarece în caz contrar a și x pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în A . Dacă $D_2 \neq \emptyset$, atunci A nu este conexă, ceea ce este în contradicție cu ipoteza. Rămâne că $D_2 = \emptyset$, adică $A = D_1$. ” $\Leftarrow$ ” Fie $a \in A$ un punct fixat și L_x

o linie poligonală conținută în A care unește a cu $x \in A$. Mulțimea A este conexă deoarece fiecare linie poligonală L_x este conexă, $a \in \bigcap_{x \in A} L_x$ și $A = \bigcup_{x \in A} L_x$.

3.6.19 Definiție. Spunem despre o submulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ că este o *mulțime stelată* dacă există un punct $a \in A$ astfel încât segmentul

$$[a, x] = \{ (1-t)a + tx \mid t \in [0, 1] \}$$

care unește a cu x este conținut în A , oricare ar fi $x \in A$ (v. Fig. 3.6).

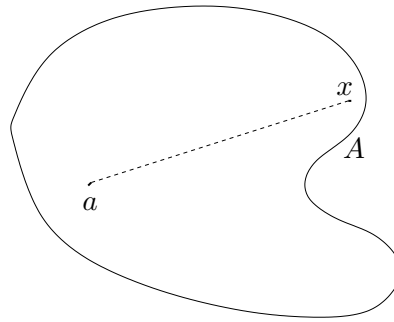


Figura 3.6: Mulțime stelată neconvexă.

3.6.20 Propoziție. Orice mulțime stelată din $\mathbb{R}^n$ este conexă.

Demonstrație. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime stelată și $a \in A$ astfel încât $[a, x] \subset A$, oricare ar fi $x \in A$. Mulțimea A este conexă deoarece $\bigcap_{x \in A} [a, x] \neq \emptyset$ și $A = \bigcup_{x \in A} [a, x]$.

3.6.21 Definiție. Spunem despre o submulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ că este o *mulțime convexă* dacă $[x, y] \subset A$, oricare ar fi $x, y \in A$.

3.6.22 Orice mulțime convexă din $\mathbb{R}^n$ este mulțime stelată și deci conexă.

3.6.23 Definiție. Fie (S, d) spațiu metric. O mulțime $D \subseteq S$ deschisă și conexă este numită *domeniu*.

Capitolul 4

Funcții diferențiabile

4.1 Funcții reale de o variabilă reală

4.1.1 Definiție. Spunem despre un punct $a \in \mathbb{R}$ că este *punct de acumulare* pentru o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, avem $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (D - \{a\}) \neq \emptyset$.

4.1.2 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f este *derivabilă în a* dacă există și este finită limita (numită *derivata* lui f în a)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

4.1.3 Definiție. O funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este numită *funcție derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct al domeniului de definiție D . În acest caz, funcția

$$f': D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$$

este numită *derivata* lui f .

4.1.4 În aplicațiile uzuale, D este un interval sau o reuniune de intervale, iar a orice punct din D . În loc de $f'(a)$ și f' se mai scrie $\frac{df}{dx}(a)$ și respectiv $\frac{df}{dx}$ sau $\frac{d}{dx}f$.

4.1.5 Exemple.

a) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este derivabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}$ deoarece

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + xa + a^2) = 3a^2.$$

În acest caz, $f'(a) = 3a^2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, adică avem $(x^3)' = 3x^2$.

b) Funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este derivabilă în orice punct $a \in (0, \infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

În acest caz, $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, oricare ar fi $a \in (0, \infty)$, adică avem $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.1.6 Derivatele unor funcții uzuale

(A se vedea http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function)

Funcția	Derivata	Domeniul	Condiții
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$(0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$	
$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(0, \infty)$	$n \in 2\mathbb{N}^*$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}^*$	$n \in 2\mathbb{N}+1$
$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$0 < a \neq 1$
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$	
$f: \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$	
$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	
$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{sh} x$	$f'(x) = \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{ch} x$	$f'(x) = \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	

4.1.7 MATHEMATICA: D[f[x], x]

In[1]:=D[f[x], x]	→	Out[1]=f'[x]	In[5]:=D[Log[x], x]	→	Out[5]= $\frac{1}{x}$
In[2]:=D[x^n, x]	→	Out[2]= nx^{-1+n}	In[6]:=D[Sin[x], x]	→	Out[6]=Cos[x]
In[3]:=D[1/x, x]	→	Out[3]= $-\frac{1}{x^2}$	In[7]:=D[ArcSin[x], x]	→	Out[7]= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
In[4]:=D[Sqrt[x], x]	→	Out[4]= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	In[8]:=D[ArcTan[x], x]	→	Out[8]= $\frac{1}{1+x^2}$

4.1.8 Funcția modul $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, nu este derivabilă în $a = 0$ deoarece

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}.$$

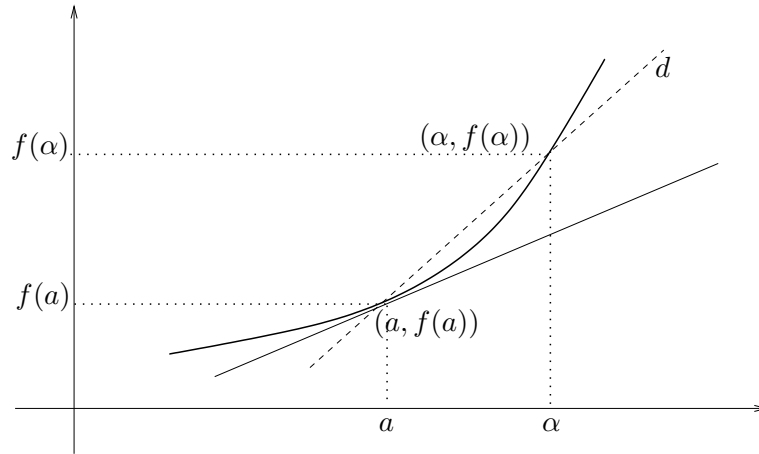


Figura 4.1: Dreapta d devine tangenta la graficul funcției f în $(a, f(a))$ dacă $\alpha \rightarrow a$.

4.1.9 Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o submulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru D . Pentru orice $\alpha \in D$ astfel încât $\alpha \neq a$, ecuația dreptei care trece prin punctele $(a, f(a))$ și $(\alpha, f(\alpha))$ este

$$\frac{x-a}{\alpha-a} = \frac{y-f(a)}{f(\alpha)-f(a)},$$

adică

$$y = \frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} (x-a) + f(a).$$

Dacă funcția f este derivabilă în a , atunci dreapta de ecuație (v. Fig. 4.1)

$$y = \lim_{\alpha \rightarrow a} \frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} (x-a) + f(a),$$

adică

$$y = f'(a) (x-a) + f(a),$$

este tangentă la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$.

4.1.10 Teoremă. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Demonstrație. Dacă funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $a \in D$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) + f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + f(a) = f(a).$$

4.1.11 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o submulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru $D \cap (-\infty, a)$. Spunem că funcția f este *derivabilă la stânga* în a dacă există și este finită limita

$$f'_s(a) = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

numită *derivata la stânga* a lui f în a .

4.1.12 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o submulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru $D \cap (a, \infty)$. Spunem că funcția f este *derivabilă la dreapta* în a dacă există și este finită limita

$$f'_d(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

numită *derivata la dreapta* a lui f în a .

4.1.13 Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Avem:

- f este derivabilă în $a \iff f$ este derivabilă la dreapta în a ;
- f este derivabilă în $b \iff f$ este derivabilă la stânga în b .

În primul caz avem $f'(a) = f'_d(a)$, iar în al doilea caz avem $f'(b) = f'_s(b)$.

4.1.14 Teoremă. Fie $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funcții definite pe o submulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru D . Avem:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} f \text{ derivabilă în } a \\ g \text{ derivabilă în } a \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} f+g \text{ este derivabilă în } a \text{ și} \\ (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} f \text{ derivabilă în } a \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} \lambda f \text{ este derivabilă în } a \text{ și} \\ (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a); \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} f \text{ derivabilă în } a \\ g \text{ derivabilă în } a \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} fg \text{ este derivabilă în } a \text{ și} \\ (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a); \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} f \text{ derivabilă în } a \\ g \text{ derivabilă în } a \\ g(a) \neq 0 \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{f}{g} \text{ este derivabilă în } a \text{ și} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} &= \lambda \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}; \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right] \frac{1}{g(x)g(a)}.\end{aligned}$$

4.1.15 Dacă $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, atunci

$$(f+g)' = g' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Dacă în plus $g(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in D$, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

4.1.16 MATHEMATICA: $D[f[x], x]$

$$\begin{aligned}\text{In}[1] := D[f[x] + g[x], x] &\mapsto \text{Out}[1] = f'[x] + g'[x] \\ \text{In}[2] := D[a f[x], x] &\mapsto \text{Out}[2] = a f'[x] \\ \text{In}[3] := D[f[x] g[x], x] &\mapsto \text{Out}[3] = f'[x] g[x] + f[x] g'[x] \\ \text{In}[4] := D[f[x]/g[x], x] &\mapsto \text{Out}[4] = \frac{f'[x]g[x] - f[x]g'[x]}{g[x]^2}.\end{aligned}$$

4.1.17 Avem

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

4.1.18 Teoremă. Fie $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ funcții definite pe intervalele I, J și $a \in I$. Avem:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivabilă în } a \\ g \text{ derivabilă în } f(a) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} g \circ f \text{ este derivabilă în } a \text{ și} \\ (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \end{array} \right.$$

Demonstrație. Funcția

$$h : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{dacă } y \neq f(a), \\ g'(f(a)) & \text{dacă } y = f(a), \end{cases}$$

este continuă în $f(a)$ deoarece

$$\lim_{y \rightarrow f(a)} h(y) = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a)) = h(f(a)).$$

Trecând la limită în relația

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

adevărată pentru orice $x \neq a$, obținem

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a).\end{aligned}$$

4.1.19 Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, atunci

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \text{adică} \quad (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

4.1.20 Exemple:

$$\begin{aligned}(\sin x^2)' &= 2x \cos x^2; & (e^{\sin x^2})' &= 2e^{\sin x^2} x \cos x^2; \\ (\sin^2 x)' &= 2 \cos x \sin x; & (e^{\sin^2 x})' &= 2e^{\sin^2 x} \cos x \sin x.\end{aligned}$$

4.1.21 MATHEMATICA: $\mathcal{D}[f[x], x]$

$$\begin{array}{ll}\text{In}[1] := \mathcal{D}[g[f[x]], x] & \mapsto \text{Out}[1] = g'[f[x]] f'[x] \\ \text{In}[2] := \mathcal{D}[\sin[x^2], x] & \mapsto \text{Out}[2] = 2x \cos[x^2] \\ \text{In}[3] := \mathcal{D}[(\sin[x])^2, x] & \mapsto \text{Out}[3] = 2 \cos[x] \sin[x] \\ \text{In}[4] := \mathcal{D}[\exp[\sin[x^2]], x] & \mapsto \text{Out}[4] = 2e^{\sin[x^2]} x \cos[x^2] \\ \text{In}[5] := \mathcal{D}[\exp[(\sin[x])^2], x] & \mapsto \text{Out}[5] = 2e^{\sin[x]^2} \cos[x] \sin[x].\end{array}$$

4.1.22 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și fie $a \in D$.

- Spunem că a este *punct de minim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$f(a) \leq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D.$$

- Spunem că a este *punct de maxim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$f(a) \geq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D.$$

- Spunem că a este *punct de minim global* al lui f dacă

$$f(a) \leq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in D.$$

- Spunem că a este *punct de maxim global* al lui f dacă

$$f(a) \geq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in D.$$

- Spunem că a este *punct de extrem local (global)* al lui f dacă este punct de maxim local (respectiv, global) sau punct de minim local (respectiv, global).

4.1.23 Teoremă (Fermat). Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $a \in D$ un punct de extrem local al lui f . Dacă $a \in \overset{\circ}{D}$ și f este derivabilă în a , atunci $f'(a) = 0$.

Demonstrație. Dacă a este punct de maxim local, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D$ și $f(a) \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Rezultă relația

$$0 \leq \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0,$$

care conduce la $f'(a) = 0$. Cazul punctului de minim local se tratează similar.

4.1.24 Teoremă (Rolle). Fie $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu $f(\alpha) = f(\beta)$.

Dacă f este derivabilă pe intervalul $(\alpha, \beta) \neq \emptyset$,
atunci există $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f'(\xi) = 0$.

Demonstrație. Funcția f este mărginită și își atinge marginile în $[\alpha, \beta]$ (a se vedea pag. 83-16). Cel puțin una dintre margini este atinsă într-un punct ξ aparținând intervalului deschis (α, β) . Conform teoremei lui Fermat, avem $f'(\xi) = 0$.

4.1.25 Teoremă (Lagrange). Dacă funcția continuă $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul $(\alpha, \beta) \neq \emptyset$, atunci există $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\xi)$.

Demonstrație. $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\alpha - \beta} x$ verifică condițiile din teorema lui Rolle. Există $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $F'(\xi) = 0$, adică $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\xi)$.

4.1.26 Teorema lui Lagrange mai este numită *teorema creșterilor finite*.

4.1.27 Teoremă (Darboux). Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci derivata ei $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux (pag. 83-1).

Demonstrație. Fie $\alpha, \beta \in I$ astfel încât $\alpha < \beta$. Avem de arătat că, oricare ar fi λ între $f'(\alpha)$ și $f'(\beta)$, există $\xi \in [\alpha, \beta]$ astfel încât $f'(\xi) = \lambda$. Dacă $f'(\alpha) = f'(\beta)$, atunci $\lambda = f'(\alpha)$. Analizăm în continuare cazul $f'(\alpha) < \lambda < f'(\beta)$. Funcția $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - \lambda x$, fiind derivabilă și prin urmare continuă își atinge marginea inferioară $m = \inf_{x \in [\alpha, \beta]} F(x)$ într-un punct $\xi \in [\alpha, \beta]$. Arătăm că $F(\alpha) \neq m \neq F(\beta)$. Deoarece $F'(\alpha) < 0 < F'(\beta)$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $F'(\alpha) + \varepsilon < 0 < F'(\beta) - \varepsilon$. Din

$$F'(\alpha) = \lim_{x \searrow \alpha} \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} \quad \text{și} \quad F'(\beta) = \lim_{x \nearrow \beta} \frac{F(x) - F(\beta)}{x - \beta}$$

rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$x \in (\alpha, \alpha + \delta) \implies F'(\alpha) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} < F'(\alpha) + \varepsilon < 0 \implies F(x) < F(\alpha)$$

și

$$x \in (\beta - \delta, \beta) \implies 0 < F'(\beta) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(\beta)}{x - \beta} < F'(\beta) + \varepsilon \implies F(x) < F(\beta).$$

Rezultă că $\xi \in (\alpha, \beta)$ și conform teoremei lui Fermat avem $F'(\xi) = 0$, adică $f'(\xi) = \lambda$. În cazul $f'(\beta) < \lambda < f'(\alpha)$, se poate face un raționament similar.

4.1.28 Dacă derivata unei funcții derivabile $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ nu se anulează, atunci ea păstrează același semn pe I .

4.2 Funcții vectoriale de o variabilă reală

4.2.1 Prin *funcție vectorială* de o variabilă reală se înțelege o funcție de forma

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)),$$

unde $k > 1$. Funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_k: D \longrightarrow \mathbb{R}$ se numesc componentele lui f .

4.2.2 Definiție. Fie $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ o funcție definită pe o submulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru D . Spunem că funcția f este *derivabilă* în a dacă există în $\mathbb{R}^k$ limita (numită *derivata* lui f în a)

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Funcția $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^k$ este numită *funcție derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct $t \in D$. În acest caz, funcția $f': D \longrightarrow \mathbb{R}^k: t \mapsto f'(t)$ este numită *derivata* lui f .

4.2.3 Propoziție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru D . O funcție

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)),$$

este derivabilă în a dacă și numai dacă fiecare dintre funcțiile

$$f_1, f_2, \dots, f_k: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

este derivabilă în a și $f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_k(a))$.

Demonstrație. Afirmatia rezultă din propoziția prezentată la pag. 76-14 și

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \left(\lim_{t \rightarrow a} \frac{f_1(t) - f_1(a)}{t - a}, \dots, \lim_{t \rightarrow a} \frac{f_k(t) - f_k(a)}{t - a} \right).$$

4.2.4 Exemple.

- 1) Funcția (al cărei grafic este cercul de rază 1 cu centrul în $(0, 0)$)

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

este o funcție derivabilă, cu derivata

$$\gamma' : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

- 2) Funcția (al cărei grafic este segmentul care unește $a = (a_1, a_2)$ cu $b = (b_1, b_2)$),

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (1-t)a + tb = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)),$$

este o funcție derivabilă, cu derivata

$$\gamma' : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

- 3) Funcția

$$f : [0, 1) \cup (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(t) = \left(\sqrt{t}, \ln t, \frac{1}{t-1} \right),$$

este derivabilă în orice punct $t \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ și derivata ei este

$$f' : (0, 1) \cup (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{t}, \frac{-1}{(t-1)^2} \right).$$

4.2.5 Cu ajutorul vectorilor bazei canonice

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad e_k = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

putem scrie orice funcție $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t))$ sub forma

$$f(t) = f_1(t) e_1 + f_2(t) e_2 + \dots + f_k(t) e_k$$

și avem

$$f'(t) = f'_1(t) e_1 + f'_2(t) e_2 + \dots + f'_k(t) e_k.$$

4.2.6 Exercițiu.

a) Dacă funcțiile $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ și $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^k$ sunt derivabile, atunci

$$\varphi f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (\varphi f)(t) = \varphi(t) f(t) = (\varphi(t) f_1(t), \varphi(t) f_2(t), \dots, \varphi(t) f_k(t)),$$

este derivabilă și

$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'.$$

b) Dacă funcțiile $f, g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^k$ sunt derivabile, atunci

$$\frac{d}{dt} \langle f, g \rangle = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$$

c) Dacă funcția derivabilă $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^k$ este astfel încât $\|f\| = \text{const}$, atunci

$$\langle f', f \rangle = f'_1 f + f'_2 f_2 + \dots + f'_k f_k = 0.$$

Rezolvare (cazul $k=2$). Avem:

$$a) \quad (\varphi f)' = ((\varphi f_1)', (\varphi f_2)') = (\varphi' f_1 + \varphi f'_1, \varphi' f_2 + \varphi f'_2) = \varphi' f + \varphi f';$$

$$b) \quad \frac{d}{dt} \langle f, g \rangle = (f_1 g_1 + f_2 g_2)' = f'_1 g_1 + f_1 g'_1 + f'_2 g_2 + f_2 g'_2 = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle;$$

$$c) \quad \|f\| = \text{const} \implies \langle f, f \rangle = \text{const} \implies \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle = 0 \implies 2\langle f', f \rangle = 0.$$

4.2.7 Exercițiu. Dacă funcția

$$f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^4, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix},$$

este derivabilă, atunci aplicația

$$\det f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \det f(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{vmatrix},$$

este derivabilă și

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} f'_{11}(t) & f'_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f'_{21}(t) & f'_{22}(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} f'_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f'_{21}(t) & f_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f'_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f'_{22}(t) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4.2.8 Fie $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, o funcție definită pe o submulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in D$ un punct de acumulare pentru D . Pentru orice $\alpha \in D - \{a\}$, ecuația dreptei care trece prin punctele $(\gamma_1(a), \gamma_2(a), \gamma_3(a))$ și $(\gamma_1(\alpha), \gamma_2(\alpha), \gamma_3(\alpha))$ este

$$\frac{x_1 - \gamma_1(a)}{\gamma_1(\alpha) - \gamma_1(a)} = \frac{x_2 - \gamma_2(a)}{\gamma_2(\alpha) - \gamma_2(a)} = \frac{x_3 - \gamma_3(a)}{\gamma_3(\alpha) - \gamma_3(a)}$$

și este echivalentă cu

$$\frac{x_1 - \gamma_1(a)}{\frac{\gamma_1(\alpha) - \gamma_1(a)}{\alpha - a}} = \frac{x_2 - \gamma_2(a)}{\frac{\gamma_2(\alpha) - \gamma_2(a)}{\alpha - a}} = \frac{x_3 - \gamma_3(a)}{\frac{\gamma_3(\alpha) - \gamma_3(a)}{\alpha - a}}.$$

Dacă funcția f este derivabilă în a , atunci dreapta de ecuație

$$\frac{x_1 - \gamma_1(a)}{\gamma'_1(a)} = \frac{x_2 - \gamma_2(a)}{\gamma'_2(a)} = \frac{x_3 - \gamma_3(a)}{\gamma'_3(a)}$$

este tangentă la imaginea funcției f în punctul $(\gamma_1(a), \gamma_2(a), \gamma_3(a))$. Această dreaptă coincide cu imaginea aplicației

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\gamma_1(a), \gamma_2(a), \gamma_3(a)) + t(\gamma'_1(a), \gamma'_2(a), \gamma'_3(a)),$$

adică admite reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(a) + t \gamma'_1(a) \\ x_2 = \gamma_2(a) + t \gamma'_2(a) \\ x_3 = \gamma_3(a) + t \gamma'_3(a), \end{cases} \quad \text{unde } t \in \mathbb{R}.$$

4.2.9 Propoziție. Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ sunt funcții derivabile, atunci

$$g(f(x)) = (g_1(f(x)), g_2(f(x)), \dots, g_k(f(x)))$$

și

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = (g'_1(f(x)), g'_2(f(x)), \dots, g'_k(f(x))) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(f(x)) &= \left(\frac{d}{dx} g_1(f(x)), \frac{d}{dx} g_2(f(x)), \dots, \frac{d}{dx} g_k(f(x)) \right) \\ &= (g'_1(f(x)) \cdot f'(x), g'_2(f(x)) \cdot f'(x), \dots, g'_k(f(x)) \cdot f'(x)) \\ &= (g'_1(f(x)), g'_2(f(x)), \dots, g'_k(f(x))) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

4.3 Funcții diferențiabile

4.3.1 Prin funcție reală de mai multe variabile se înțelege o funcție de forma

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{unde } n > 1,$$

iar prin funcție vectorială de mai multe variabile, o funcție de forma

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{unde } n > 1, \quad k > 1.$$

4.3.2 Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că f este *derivabilă* în punctul $a \in I$ dacă există și este finită limita

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (4.1)$$

numită *derivata* funcției f în punctul a .

4.3.3 Definiția anterioară nu poate fi extinsă direct la funcțiile de două variabile

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

deoarece relația

$$f'(a_1, a_2) = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)}{(x_1, x_2) - (a_1, a_2)}$$

este fără sens, împărțirea cu vectorul $(x_1 - a_1, x_2 - a_2) = (x_1, x_2) - (a_1, a_2)$ nefiind definită. Vom arăta că relația (4.1) poate fi pusă sub o formă care să permită extinderea ei la funcții de mai multe variabile.

4.3.4 Relația (4.1) este echivalentă cu relația

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = 0,$$

adică cu relația

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)|}{|x - a|} = 0.$$

4.3.5 Dacă $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație liniară, atunci

$$Au = A(u \cdot 1) = u \cdot A(1) = \lambda u, \quad \text{unde } \lambda = A(1).$$

Astfel, orice aplicație liniară $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma $Au = \lambda u$.

4.3.6 Unei funcții $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în $a \in I$, i se asociază aplicația liniară

$$A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad Au = f'(a)u,$$

numită *diferențiala* lui f în punctul a și notată cu $df(a)$, adică aplicația liniară

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)u = f'(a)u.$$

4.3.7 Definiție. Spunem că funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ este *diferențiabilă* în $a \in I$ dacă există o aplicație liniară $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x - a)|}{|x - a|} = 0. \quad (4.2)$$

Aplicația A , notată cu $df(a)$, este numită *diferențiala* funcției f în punctul a .

4.3.8 Propoziție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe un interval I și $a \in I$. Avem:

$$f \text{ este derivabilă în } a \iff f \text{ este diferențiabilă în } a.$$

4.3.9 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și $a \in \overset{\circ}{D}$.

Spunem că f este *diferențiabilă* în a dacă există o aplicație liniară

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0. \quad (4.3)$$

Aplicația A este numită *diferențiala* funcției f în punctul a și se notează cu $df(a)$.

4.3.10 Teoremă. Dacă funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$, definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$, este diferențiabilă în punctul $a \in \overset{\circ}{D}$, atunci ea este continuă în a .

Demonstrație. Deoarece aplicația liniară $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ este continuă (v. pag. 79-16), trecând la limită în relația

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f(x) - f(a)\| &= \|f(x) - f(a) - A(x-a) + A(x-a)\| \\ &\leq \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| + \|A(x-a)\| \\ &= \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} \|x-a\| + \|A(x-a)\| \end{aligned}$$

obținem că $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

4.3.11 Dacă $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ este o aplicație liniară, atunci

$$Au = A(u \cdot 1) = u \cdot A(1) = u(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (\lambda_1 u, \lambda_2 u, \dots, \lambda_k u)$$

unde $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = A(1)$. Astfel, orice aplicație liniară $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ este de forma

$$Au = (\lambda_1 u, \lambda_2 u, \dots, \lambda_k u).$$

4.3.12 Conform definiției, o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ definită pe un interval I este diferențiabilă în $a \in I$ dacă există o aplicație liniară

$$A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad Au = (\lambda_1 u, \lambda_2 u, \dots, \lambda_k u),$$

astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{|x-a|} = 0. \quad (4.4)$$

4.3.13 Propoziție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ definită pe un interval I și $a \in I$. Avem:

$$f \text{ este derivabilă în } a \iff f \text{ este diferențiabilă în } a.$$

Demonstrație (cazul $k = 2$). Relația (4.4), care în acest caz devine

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\| (f_1(x), f_2(x)) - (f_1(a), f_2(a)) - (\lambda_1(x-a), \lambda_2(x-a)) \|}{|x-a|} = 0,$$

este echivalentă cu

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x-a}, \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x-a} \right) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

adică $(\lambda_1, \lambda_2) = (f'_1(a), f'_2(a))$.

4.3.14 Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ este derivabilă într-un punct $a \in I$, atunci diferențiala lui f în a este

$$df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad df(a)u = (f'_1(a)u, f'_2(a)u, \dots, f'_k(a)u),$$

adică aplicația liniară a cărei matrice în raport cu bazele canonice este

$$df(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ f'_2(a) \\ \vdots \\ f'_k(a) \end{pmatrix}.$$

4.4 Funcții reale de mai multe variabile

4.4.1 Orice vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ admite în raport cu baza canonică

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

reprezentarea $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$. Dacă $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este aplicație liniară, atunci

$$A(u_1, u_2, \dots, u_n) = A(u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n,$$

unde $\lambda_1 = A e_1, \dots, \lambda_n = A e_n$. Astfel, orice aplicație liniară $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de forma

$$A(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

4.4.2 Conform definiției, o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă într-un punct $a \in \overset{\circ}{D}$ dacă există o aplicație liniară

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n,$$

astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{\|x - a\|} = 0. \quad (4.5)$$

În particular, pentru x de forma $x = a + t e_j$ avem relația

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(a + t e_j) - f(a) - A(t e_j)|}{\|t e_j\|} = 0,$$

echivalentă cu

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_j) - f(a)}{t}.$$

4.4.3 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Spunem că f este *derivabilă parțial* în raport cu variabila x_j

în punctul $a \in \overset{\circ}{D}$ dacă există și este finită limita

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_j) - f(a)}{t}, \quad (4.6)$$

numită *derivata parțială* a lui f în raport cu x_j în a .

4.4.4 Pentru a putea defini derivata parțială a lui f în raport cu x_j în a nu este necesar ca a să fie punct interior al mulțimii D . Este suficient ca D să conțină un segment de dreaptă paralel cu axa Ox_j care trece prin a .

4.4.5 Propoziție. Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă în $a \in \overset{\circ}{D}$, atunci ea este derivabilă parțial în a și diferențiala ei în a este aplicația

$$df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) u_n,$$

adică aplicația liniară $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei matrice în raport cu bazele canonice este

$$df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

4.4.6 În cazul unei funcții de două variabile $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, relația (4.6) devine

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t},$$

sau în notații alternative

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) &= \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) &= \lim_{y \rightarrow a_2} \frac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2}. \end{aligned}$$

4.4.7 Definiție. Spunem că funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe o mulțime deschisă

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, este o funcție *derivabilă parțial în raport cu x_j* dacă $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ există, oricare ar fi $a \in D$. În acest caz, funcția

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}: D \rightarrow \mathbb{R}: a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

se numește *derivata parțială a lui f în raport cu x_j* .

4.4.8 Exemplu. Funcția $f: \{(x, y) \mid y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$, este derivabilă parțial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}: \{(x, y) \mid y \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}: \{(x, y) \mid y \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

4.4.9 MATHEMATICA: $D[f[x, y], x], \quad D[f[x, y], y]$

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := D[f[x, y], x] &\mapsto \text{Out}[1] = f^{(1,0)}[x, y] \\ \text{In}[2] := D[f[x, y], y] &\mapsto \text{Out}[2] = f^{(0,1)}[x, y] \\ \text{In}[3] := D[x/y, x] &\mapsto \text{Out}[3] = \frac{1}{y} \\ \text{In}[4] := D[x/y, y] &\mapsto \text{Out}[4] = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

4.4.10 Pentru ca o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ să fie diferențiabilă într-un punct $a \in \overset{\circ}{D}$, nu este suficient ca ea să fie derivabilă parțial în a . Funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

necontinuă în $(0, 0)$ (a se vedea pag. 76-13), este derivabilă parțial în $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0. \end{aligned}$$

Nefiind continuă în $(0, 0)$, f nu este diferențiabilă în $(0, 0)$ (a se vedea pag. 101-10).

4.4.11 Teoremă. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și fie $a \in \overset{\circ}{D}$.

Dacă f este derivabilă parțial într-o vecinătate a lui a și dacă derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue în a , atunci f este diferențiabilă în a .

Demonstrație (Cazul $n=2$). Conform ipotezei, există $r > 0$ astfel încât $B_r(a) \subset D$ și f este derivabilă parțial în $B_r(a)$. Fie $(x_k, y_k)_{k \geq 0}$ un șir convergent din $B_r(a)$ cu $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2)$. Avem de arătat că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| f(x_k, y_k) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_k - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y_k - a_2) \right|}{\sqrt{(x_k - a_1)^2 + (y_k - a_2)^2}} = 0. \quad (4.7)$$

Conform teoremei lui Lagrange, există ξ_k între x_k și a_1 și η_k între y_k și a_2 astfel încât

$$\begin{aligned} f(x_k, y_k) - f(a_1, a_2) &= f(x_k, y_k) - f(a_1, y_k) + f(a_1, y_k) - f(a_1, a_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k, y_k)(x_k - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta_k)(y_k - a_2). \end{aligned}$$

Relația (4.7) se obține trecând la limită în

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\left| f(x_k, y_k) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_k - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y_k - a_2) \right|}{\sqrt{(x_k - a_1)^2 + (y_k - a_2)^2}} \\ &\leq \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k, y_k)(x_k - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta_k)(y_k - a_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x_k - a_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y_k - a_2) \right|}{\sqrt{(x_k - a_1)^2 + (y_k - a_2)^2}} \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k, y_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right| \frac{|x_k - a_1|}{\sqrt{(x_k - a_1)^2 + (y_k - a_2)^2}} \\ &\quad + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right| \frac{|y_k - a_2|}{\sqrt{(x_k - a_1)^2 + (y_k - a_2)^2}} \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_k, y_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \eta_k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \right|. \end{aligned}$$

4.4.12 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Spunem că f este o funcție de clasă C^1 în D și scriem

$$f \in C^1(D)$$

dacă este derivabilă parțial și $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue în orice punct din D .

4.4.13 (*Derivarea funcțiilor compuse*). Știm că:

a) Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, atunci

$$\frac{d}{dt}g(f(t)) = g'(f(t)) \cdot f'(t);$$

b) Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$ sunt funcții derivabile, atunci

$\frac{d}{dt}(g_1(f(t)), g_2(f(t)), \dots, g_k(f(t))) = (g'_1(f(t)), g'_2(f(t)), \dots, g'_k(f(t))) \cdot f'(t),$
adică matriceal

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g_1(f(t)) \\ \vdots \\ g_k(f(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_1(f(t)) \\ \vdots \\ g'_k(f(t)) \end{pmatrix} \cdot f'(t).$$

4.4.14 Se poate arăta că:

c) Dacă $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții diferențiabile, atunci

$$\frac{d}{dt}g(f_1(t), \dots, f_n(t)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f_1(t), \dots, f_n(t)) \cdot f'_1(t) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(f_1(t), \dots, f_n(t)) \cdot f'_n(t),$$

adică matriceal

$$\frac{d}{dt}g(f(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}.$$

d) Dacă $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții diferențiabile, atunci

$$\frac{\partial}{\partial x_j}g(f(x_1, \dots, x_n)) = g'(f(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n).$$

e) Dacă $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții diferențiabile, atunci

$$\frac{\partial}{\partial x_j}g(f_1(x), \dots, f_k(x)) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial g}{\partial y_i}(f_1(x), \dots, f_k(x)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),$$

adică matriceal

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}g(f(x)) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}g(f(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) & \dots & \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

4.4.15 MATHEMATICA: $D[g[f[t], h[t]], t], D[g[f[x, y]], x], D[g[f[x, y], h[x, y]], x]$

$\text{In}[1] := D[g[f[t], h[t]], t]$	$\mapsto$	$\text{Out}[1] = h'[t] \cdot g^{(0,1)}[f[t], h[t]] + f'[t] \cdot g^{(1,0)}[f[t], h[t]]$
$\text{In}[2] := D[g[f[x, y]], x]$	$\mapsto$	$\text{Out}[2] = g'[f[x, y]] \cdot f^{(1,0)}[x, y]$
$\text{In}[3] := D[g[f[x, y]], y]$	$\mapsto$	$\text{Out}[3] = g'[f[x, y]] \cdot f^{(0,1)}[x, y]$
$\text{In}[4] := D[g[f[x, y], h[x, y]], x]$	$\mapsto$	$\text{Out}[4] = f^{(1,0)}[x, y] \cdot g^{(1,0)}[f[x, y], h[x, y]]$ $+ g^{(0,1)}[f[x, y], h[x, y]] \cdot h^{(1,0)}[x, y]$
$\text{In}[5] := D[g[f[x, y], h[x, y]], y]$	$\mapsto$	$\text{Out}[5] = f^{(0,1)}[x, y] \cdot g^{(1,0)}[f[x, y], h[x, y]]$ $+ g^{(0,1)}[f[x, y], h[x, y]] \cdot h^{(0,1)}[x, y]$

4.4.16 Exemple. a) Dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) &= g'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial y}g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) &= g'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

b) Dacă $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto g(u, v)$ este diferențiabilă, atunci

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g(\sqrt{t}, e^{t^2}) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\sqrt{t}, e^{t^2}) \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{\partial g}{\partial v}(\sqrt{t}, e^{t^2}) 2te^t, \\ \frac{\partial}{\partial x}g\left(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) &= \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{1}{y} + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial y}g\left(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) &= \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{-x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

4.4.17 MATHEMATICA: $D[g[f[t], h[t]], t], D[g[f[x, y]], x], D[g[f[x, y], h[x, y]], x]$

$$\begin{aligned}\text{In}[1] := D[g[\text{Sqrt}[x^2+y^2]], x] &\mapsto \text{Out}[1] = \frac{x g'[\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{In}[2] := D[g[\text{Sqrt}[x^2+y^2]], y] &\mapsto \text{Out}[2] = \frac{y g'[\sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{In}[3] := D[g[\text{Sqrt}[t], \text{Exp}[t^2]], t] &\mapsto \text{Out}[3] = 2e^t t g^{(0,1)}[\sqrt{t}, e^{t^2}] + \frac{g^{(1,0)}[\sqrt{t}, e^{t^2}]}{2\sqrt{t}} \\ \text{In}[4] := D[g[x/y, \text{Sqrt}[x^2+y^2]], x], x] &\mapsto \text{Out}[4] = \frac{x g^{(0,1)}[\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{g^{(1,0)}[\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}]}{y} \\ \text{In}[5] := D[g[x/y, \text{Sqrt}[x^2+y^2]], y] &\mapsto \text{Out}[5] = \frac{y g^{(0,1)}[\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}]}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x g^{(1,0)}[\frac{x}{y}, \sqrt{x^2+y^2}]}{y^2}\end{aligned}$$

4.4.18 Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $a \in \overset{\circ}{D}$, $r > 0$ astfel încât $B_r(a) \subset D$ și $w \in \mathbb{R}^n$ cu $\|w\| = 1$. Spunem că f este *derivabilă în a după versorul w* dacă funcția

$$\varphi : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(a + tw),$$

este derivabilă în punctul $t = 0$. Numărul

$$\frac{df}{dw}(a) = \varphi'(0) = \left. \frac{d}{dt} f(a + tw) \right|_{t=0}$$

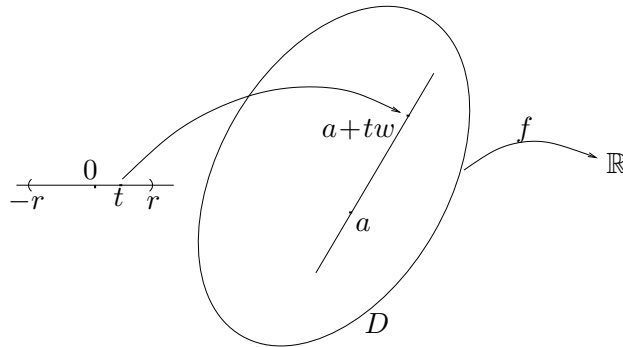
se numește *derivata lui f după versorul w în a* .

4.4.19 Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $a \in \overset{\circ}{D}$ și $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, atunci

$$\frac{df}{dw}(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a + tw) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) w_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) w_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) w_n. \quad (4.8)$$

În particular, derivatele parțiale corespund derivatelor după vectorii bazei canonice

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a + te_j) \right|_{t=0} = \frac{df}{de_j}(a).$$

Figura 4.2: Derivata lui f după versorul w în a .

4.4.20 Utilizând produsul scalar și operatorul gradient

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

relația (4.8) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{df}{dw}(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a+tw) \right|_{t=0} = \langle \nabla f(a), w \rangle = \|\nabla f(a)\| \cos \angle(\nabla f(a), w)$$

și arată că, în jurul lui a , creșterea/descrășterea funcției f este maximă în direcția

$$w = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

4.4.21 O aplicație liniară $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}^n$ și diferențiala ei este chiar A , adică $dA(a) = A$. În particular, funcțiile coordonate

$$x_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1,$$

$$x_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_2(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_2,$$

.....

$$x_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_n,$$

fiind liniare avem $dx_1(a) = x_1$, $dx_2(a) = x_2$, ..., $dx_n(a) = x_n$, adică

$$dx_1(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1, \quad \dots, \quad dx_n(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_n$$

și relația (a se vedea pag. 103-5)

$$df(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) u_n$$

se mai poate scrie

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2(a) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n(a)$$

sau

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

4.4.22 Ultima relație poate fi scrisă simbolic sub forma

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f$$

și sugerează introducerea *operatorului de diferențiere*

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k.$$

4.4.23 În notații alternative, în cazurile $n = 2$ și $n = 3$ avem:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy; & d &= \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy; \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz; & d &= \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

4.5 Funcții vectoriale de mai multe variabile

4.5.1 Dacă $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ este aplicație liniară, atunci

$$\begin{aligned} A(u_1, u_2, \dots, u_n) &= A(u_1(1, 0, \dots, 0) + u_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + u_n(0, \dots, 0, 1)) \\ &= u_1 A(1, 0, \dots, 0) + u_2 A(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + u_n A(0, \dots, 0, 1) \\ &= (\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \cdots + \alpha_{1n}u_n, \dots, \alpha_{k1}u_1 + \alpha_{k2}u_2 + \cdots + \alpha_{kn}u_n), \end{aligned}$$

unde $A(1, 0, \dots, 0) = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{k1})$, $\dots$, $A(0, \dots, 0, 1) = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{kn})$.

Dacă în loc de vectori linie utilizăm vectori coloană, relația anterioară devine

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \cdots + \alpha_{1n}u_n \\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \cdots + \alpha_{2n}u_n \\ \vdots \\ \alpha_{k1}u_1 + \alpha_{k2}u_2 + \cdots + \alpha_{kn}u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Matricea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

este matricea asociată aplicației liniare A în raport cu bazele canonice în $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^k$.

4.5.2 Conform definiției, o funcție $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă în $a \in \overset{\circ}{D}$ dacă există o aplicație liniară

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0. \quad (4.9)$$

4.5.3 Propoziție. Funcția $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$, este diferențiabilă în $a \in \overset{\circ}{D}$ dacă și numai dacă toate funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_k$ sunt diferențiabile în a și avem

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} i \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{matrix}$$

adică diferențiala lui f în a este aplicația liniară

$$df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

a cărei matrice în raport cu bazele canonice este matricea Jacobi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

În cazul $n=k$, determinantul

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_k)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

este numit *jacobianul* lui f în a .

4.5.4 Orice aplicație de clasă C^1

$$S: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(u, v) = (S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v)),$$

cu proprietatea

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = 2, \quad \text{oricare ar fi } (u, v) \in D,$$

este o parametrizare a unei suprafețe $S \subset \mathbb{R}^3$. Pentru orice $(u_0, v_0) \in [a, b] \times [c, d]$ fixat, aplicațiile

$$\gamma_u: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_u(t) = S(t, v_0) = (S_1(t, v_0), S_2(t, v_0), S_3(t, v_0)),$$

$$\gamma_v: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_v(t) = S(u_0, t) = (S_1(u_0, t), S_2(u_0, t), S_3(u_0, t)),$$

reprezintă drumuri pe suprafața S . Ele trec prin punctul $S(u_0, v_0)$ și vectorii tangenți

$$\vec{\tau}_u(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \gamma_u(u_0) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$\vec{\tau}_v(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \gamma_v(v_0) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

determină planul tangent la S în $S(u_0, v_0)$. În particular, produsul lor vectorial

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \vec{\tau}_u(u_0, v_0) \times \vec{\tau}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} =$$

$$\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \vec{k} \right|$$

cu coordonatele $(A(u_0, v_0), B(u_0, v_0), C(u_0, v_0))$ definite prin relațiile

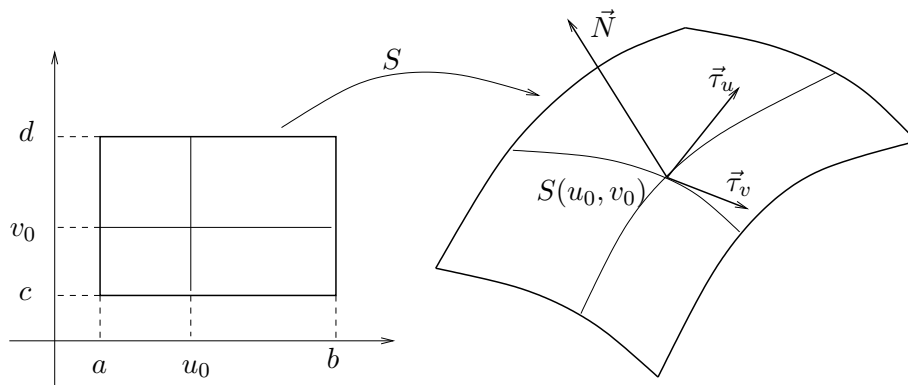


Figura 4.3: Normala la o suprafață.

$A(u_0, v_0) = \frac{D(S_2, S_3)}{D(u, v)}(u_0, v_0)$, $B(u_0, v_0) = \frac{D(S_3, S_1)}{D(u, v)}(u_0, v_0)$, $C(u_0, v_0) = \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0)$
 este un vector perpendicular pe planul tangent la suprafața S în punctul $S(u_0, v_0)$.

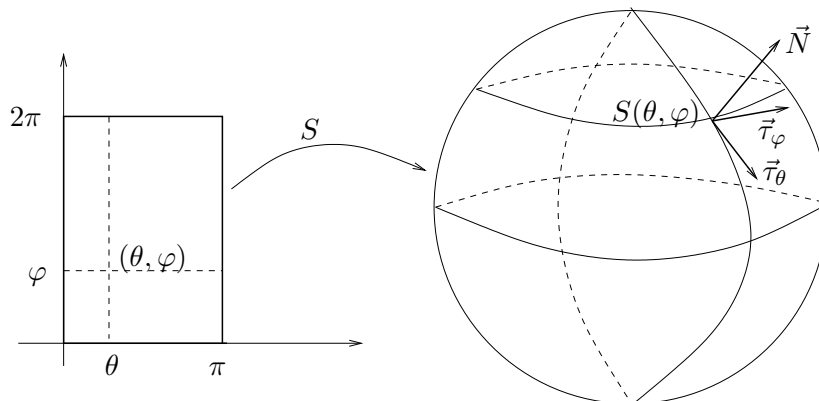


Figura 4.4: Normala la sferă.

4.5.5 Exemplu. Aplicația $S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$S(\theta, \varphi) = (S_1(\theta, \varphi), S_2(\theta, \varphi), S_3(\theta, \varphi))$$

$$= (x_0 + R \sin \theta \cos \varphi, y_0 + R \sin \theta \sin \varphi, z_0 + R \cos \theta)$$

reprezintă o parametrizare a sferei de rază R și centru (x_0, y_0, z_0) .

4.5.6 Știm că tangenta la graficul unui drum de clasă C^1

$$\gamma: D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

într-un punct $\gamma(t_0)$ cu $\gamma'(t_0) \neq 0$ este imaginea aplicației

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3: \alpha \mapsto \gamma(t_0) + \alpha \gamma'(t_0),$$

adică

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3: \alpha \mapsto (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0), \gamma_3(t_0)) + \alpha(\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), \gamma'_3(t_0)),$$

și admite reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t_0) + \gamma'_1(t_0) \alpha \\ y = \gamma_2(t_0) + \gamma'_2(t_0) \alpha \\ z = \gamma_3(t_0) + \gamma'_3(t_0) \alpha, \end{cases} \quad \text{unde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Planul tangent la o suprafață

$$S: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(u, v) = (S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v)),$$

într-un punct $S(u_0, v_0)$ coincide cu imaginea aplicației

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: (\alpha, \beta) \mapsto S(u_0, v_0) + dS(u_0, v_0)(\alpha, \beta),$$

adică

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} S_1(u_0, v_0) \\ S_2(u_0, v_0) \\ S_3(u_0, v_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

și admite reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = S_1(u_0, v_0) + \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) \alpha + \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) \beta \\ y = S_2(u_0, v_0) + \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) \alpha + \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) \beta \\ z = S_3(u_0, v_0) + \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \alpha + \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \beta. \end{cases}$$

Eliminând parametrii α și β rezultă ecuația planului tangent în $S(u_0, v_0)$:

$$A(u_0, v_0)(x - S_1(u_0, v_0)) + B(u_0, v_0)(y - S_2(u_0, v_0)) + C(u_0, v_0)(z - S_3(u_0, v_0)) = 0.$$

4.6 Derivate parțiale de ordin superior

4.6.1 Definiție. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în vecinătatea $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D$ a unui punct $a \in D$. Spunem că f este *derivabilă de două ori în a* dacă

$$f' : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$$

este derivabilă în a . Numărul

$$f''(a) = (f')'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

se numește *derivata a doua a lui f în a* .

4.6.2 Definiție. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Spunem că f este o *funcție derivabilă de două ori* dacă f' este derivabilă în orice punct din D . În acest caz, aplicația $D \rightarrow \mathbb{R} : a \mapsto f''(a)$ se numește *derivata a doua a lui f* și se notează cu f'' .

4.6.3 În unele situații este avantajoasă utilizarea notațiilor alternative

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = \frac{df}{dx} = f', \quad f^{(2)} = \frac{d^2f}{dx^2} = f'', \quad \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}.$$

4.6.4 Definiție. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n-1$ ori și $a \in D$.

Spunem că f este *derivabilă de n ori în a* dacă $f^{(n-1)}: D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în a . Numărul

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$$

se numește *derivata de ordinul n a lui f în a* .

4.6.5 Definiție.

- Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o *funcție de clasă C^n* în D și scriem

$$f \in C^n(D)$$

dacă f este derivabilă de n ori și $f^{(n)}: D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă.

- Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o *funcție de clasă C^∞* în D și scriem

$$f \in C^\infty(D)$$

dacă f este *indefinit derivabilă*, adică este derivabilă de n ori, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

4.6.6 Exemple:

$$\begin{array}{lll} (x^k)' = k x^{k-1}; & \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; & (\sin x)' = \cos x; \\ (x^k)'' = k(k-1) x^{k-2}; & \left(\frac{1}{x}\right)'' = \frac{2}{x^3}; & (\sin x)'' = -\sin x; \\ (x^k)^{(3)} = k(k-1)(k-2) x^{k-3}; & \left(\frac{1}{x}\right)^{(3)} = -\frac{6}{x^4}; & (\sin x)^{(3)} = -\cos x. \end{array}$$

4.6.7 MATHEMATICA: $D[f[x], \{x, n\}]$

$$\begin{array}{llll}
\text{In}[1] := D[1/x, x] & \mapsto & \text{Out}[1] = -\frac{1}{x^2} & \text{In}[4] := D[\text{Sin}[x], x] & \mapsto & \text{Out}[4] = \text{Cos}[x] \\
\text{In}[2] := D[1/x, \{x, 2\}] & \mapsto & \text{Out}[2] = \frac{2}{x^3} & \text{In}[5] := D[\text{Sin}[x], \{x, 2\}] & \mapsto & \text{Out}[5] = -\text{Sin}[x] \\
\text{In}[3] := D[1/x, \{x, 3\}] & \mapsto & \text{Out}[3] = -\frac{6}{x^4} & \text{In}[6] := D[\text{Sin}[x], \{x, 3\}] & \mapsto & \text{Out}[6] = -\text{Cos}[x]
\end{array}$$

4.6.8 Propoziție. Dacă funcțiile $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile de n ori și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci funcțiile $f+g$, λf și fg sunt derivabile de n ori și

$$\begin{aligned}
(f+g)^{(n)} &= f^{(n)} + g^{(n)}, \\
(\lambda f)^{(n)} &= \lambda f^{(n)}, \\
(fg)^{(n)} &= C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \dots + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)}.
\end{aligned}$$

4.6.9 MATHEMATICA: $D[f[x], \{x, n\}]$

$$\begin{array}{llll}
\text{In}[1] := D[f[x] g[x], x] & \mapsto & \text{Out}[1] = g[x] f'[x] + f[x] g'[x] \\
\text{In}[2] := D[f[x] g[x], \{x, 2\}] & \mapsto & \text{Out}[2] = 2 f'[x] g'[x] + g[x] f''[x] + f[x] g''[x] \\
\text{In}[3] := D[f[x] g[x], \{x, 3\}] & \mapsto & \text{Out}[3] = 3 g'[x] f''[x] + 3 f'[x] g''[x] + g[x] f^{(3)}[x] + f[x] g^{(3)}[x]
\end{array}$$

4.6.10 Exemple:

$$\begin{aligned}
(x f(x))^{(n)} &= C_n^{n-1} f^{(n-1)}(x) + C_n^n x f^{(n)}(x) = n f^{(n-1)}(x) + x f^{(n)}(x); \\
(x^2 f(x))^{(n)} &= 2 C_n^{n-2} f^{(n-2)}(x) + 2 C_n^{n-1} x f^{(n-1)}(x) + C_n^n x^2 f^{(n)}(x) \\
&= n(n-1) f^{(n-1)}(x) + 2n x f^{(n-1)}(x) + x^2 f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

4.6.11 MATHEMATICA: $D[x^k f[x], \{x, n\}]$

$$\begin{array}{llll}
\text{In}[1] := D[x^2 f[x], x] & \mapsto & \text{Out}[1] = 2x f[x] + x^2 f'[x] \\
\text{In}[2] := D[x^2 f[x], \{x, 2\}] & \mapsto & \text{Out}[2] = 2 f[x] + 4x f'[x] + x^2 f''[x] \\
\text{In}[3] := D[x^2 f[x], \{x, 3\}] & \mapsto & \text{Out}[3] = 6 f'[x] + 6x f''[x] + x^2 f^{(3)}[x]
\end{array}$$

4.6.12 Definiție. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$, derivabilă parțial într-o vecinătate $B_r(a) \subset D$ a unui punct $a \in \overset{\circ}{D}$.

Dacă derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_k} : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$

sunt derivabile parțial în a , derivatele lor parțiale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)(a)$$

se numesc *derivatele parțiale de ordinul al doilea* ale lui f în a .

4.6.13 Derivatele parțiale de ordin mai înalt se pot defini asemenea:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)(a), \quad \text{etc.}$$

4.6.14 În cazul unei funcții $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se pot defini derivatele de ordinul al 2-lea:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

4.6.15 Exemplu. Funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ admite derivate parțiale de orice ordin și

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x^2+y^2} = 4xy e^{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} e^{x^2+y^2} = 4xy e^{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

4.6.16 MATHEMATICA: $D[f[x, y], \{x, 2\}]$ $D[f[x, y], x, y]$

$$\begin{aligned}\text{In}[1] := D[\text{Exp}[x^2 + y^2], \{x, 2\}] &\mapsto \text{Out}[1] = 2e^{x^2+y^2} + 4e^{x^2+y^2} x^2 \\ \text{In}[2] := D[\text{Exp}[x^2 + y^2], \{y, 2\}] &\mapsto \text{Out}[2] = 2e^{x^2+y^2} + 4e^{x^2+y^2} y^2 \\ \text{In}[3] := D[\text{Exp}[x^2 + y^2], x, y] &\mapsto \text{Out}[3] = 4e^{x^2+y^2} xy \\ \text{In}[4] := D[\text{Exp}[x^2 + y^2], y, x] &\mapsto \text{Out}[4] = 4e^{x^2+y^2} xy\end{aligned}$$

4.6.17 Exercițiu. Să se arate că funcția

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

verifică ecuația căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

4.6.18 Exercițiu. Să se arate că funcția

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

verifică ecuația Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

4.6.19 Funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

este derivabilă parțial și

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

În punctul $(0, 0)$ derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea au valori diferite:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = -1.$$

4.6.20 Teoremă (Schwarz) Dacă funcția $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ într-o vecinătate $(a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r)$ a unui punct $(a_1, a_2) \in \overset{\circ}{D}$ și dacă ele sunt continue în (a_1, a_2) , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

Demonstrație. Fie $(x_n, y_n)_{n \geq 0}$ un șir din $B_r(a)$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2)$ și $(x_n, y_n) \neq (a_1, a_2)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Funcțiile

$$\varphi_n: (a_1 - r, a_1 + r) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = f(x, y_n) - f(x, a_2),$$

$$\psi_n: (a_2 - r, a_2 + r) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_n(y) = f(x_n, y) - f(a_1, y),$$

verifică condițiile din teorema lui Lagrange (pag. 95-25) și relația

$$\varphi_n(x_n) - \varphi_n(a_1) = \psi_n(y_n) - \psi_n(a_2).$$

Rezultă că există α_n între x_n și a_1 și există β_n între y_n și a_2 astfel încât

$$\varphi'_n(\alpha_n)(x_n - a_1) = \psi'_n(\beta_n)(y_n - a_2),$$

adică

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_n, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_n, a_2) \right) (x_n - a_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \beta_n) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \beta_n) \right) (y_n - a_2).$$

Din teorema lui Lagrange rezultă că există ξ_n între x_n și a_1 și η_n între y_n și a_2 încât

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha_n, \eta_n) (y_n - a_2)(x_n - a_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_n, \beta_n) (x_n - a_1)(y_n - a_2),$$

adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha_n, \eta_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_n, \beta_n).$$

Derivatele parțiale mixte fiind continue în $(0, 0)$, din relația anterioară rezultă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha_n, \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_n, \beta_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

4.6.21 Definiție. Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ că este *funcție de clasă C^k* și scriem

$$f \in C^k(D)$$

dacă toate derivatele parțiale de ordin mai mic sau egal cu k există și sunt continue în orice punct din D .

Prin $f \in C^0(D)$ se înțelege că f este funcție continuă.

Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ că este *funcție de clasă C^∞* și scriem

$$f \in C^\infty(D)$$

dacă $f \in C^k(D)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

4.6.22 Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă și $f \in C^2(D)$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a),$$

oricare ar fi $a \in D$ și $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Demonstrația este similară celei de mai sus.

4.6.23 Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^3$ este o mulțime deschisă și $f \in C^3(D)$, atunci

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \quad \text{etc.}$$

4.6.24 (*Derivate de ordin superior ale funcțiilor compuse*).

a) Dacă $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt derivabile de două ori, atunci

$$\frac{d^2}{dt^2}g(f(t)) = g'(f(t)) f''(t) + g''(f(t)) f'^2(t).$$

b) Dacă $I \xrightarrow{(\varphi, \psi)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă C^2 , atunci

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}g(\varphi(t), \psi(t)) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\varphi(t), \psi(t)) (\varphi'(t))^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) \psi'(t) \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\varphi(t), \psi(t)) (\psi'(t))^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \varphi''(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \psi''(t). \end{aligned}$$

c) Dacă $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă C^2 , atunci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2}g(f(u, v)) &= g''(f(u, v)) \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right)^2 + g'(f(u, v)) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v); \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}g(f(u, v)) &= g''(f(u, v)) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) + g'(f(u, v)) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v); \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2}g(f(u, v)) &= g''(f(u, v)) \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right)^2 + g'(f(u, v)) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v).\end{aligned}$$

e) Dacă $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(\varphi, \psi)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă C^2 , atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^2}g(\varphi(u, v), \psi(u, v)) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}(u, v).\end{aligned}$$

4.6.25 MATHEMATICA: $D[g[f[x, y]], \{x, 2\}]$ $D[g[f[x, y], h[x, y]], x, y]$

$$\begin{aligned}\text{In}[1] := D[g[f[t]], \{t, 2\}] &\quad \mapsto \quad \text{Out}[1] = g'[f[t]] f''[t] + f'[t]^2 g''[f[t]] \\ \text{In}[2] := D[g[f[t], h[t]], \{t, 2\}] &\quad \mapsto \quad \text{Out}[2] = h''[t] g^{(0,1)}[f[t], h[t]] + f''[t] g^{(1,0)}[f[t], h[t]] \\ &\quad + h'[t] (h'[t] g^{(0,2)}[f[t], h[t]] + f'[t] g^{(1,1)}[f[t], h[t]]) \\ &\quad + f'[t] (h'[t] g^{(1,1)}[f[t], h[t]] + f'[t] g^{(2,0)}[f[t], h[t]]) \\ \text{In}[3] := D[g[f[u, v]], \{u, 2\}] &\quad \mapsto \quad \text{Out}[3] = g''[f[u, v]] f^{(1,0)}[u, v]^2 + g'[f[u, v]] f^{(2,0)}[u, v] \\ \text{In}[4] := D[g[f[u, v]], u, v] &\quad \mapsto \quad \text{Out}[4] = g''[f[u, v]] f^{(0,1)}[u, v] f^{(1,0)}[u, v] + g'[f[u, v]] f^{(1,1)}[u, v] \\ \text{In}[5] := D[g[f[u, v]], \{v, 2\}] &\quad \mapsto \quad \text{Out}[5] = g''[f[u, v]] f^{(0,1)}[u, v]^2 + g'[f[u, v]] f^{(0,2)}[u, v] \\ \text{In}[6] := D[g[f[u, v], h[u, v]], \{u, 2\}] &\quad \mapsto \quad \text{Out}[6] = h^{(1,0)}[u, v] (g^{(0,2)}[f[u, v], h[u, v]] h^{(1,0)}[u, v] \\ &\quad + f^{(1,0)}[u, v] g^{(1,1)}[f[u, v], h[u, v]]) \\ &\quad + g^{(1,0)}[f[u, v], h[u, v]] f^{(2,0)}[u, v] \\ &\quad + f^{(1,0)}[u, v] (h^{(1,0)}[u, v] g^{(1,1)}[f[u, v], h[u, v]] \\ &\quad + f^{(1,0)}[u, v] g^{(2,0)}[f[u, v], h[u, v]]) \\ &\quad + g^{(0,1)}[f[u, v], h[u, v]] h^{(2,0)}[u, v]\end{aligned}$$

4.6.26 În cazul ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

unde $a > 0$, schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

conduce la ecuația

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

cu soluții de forma $U(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Într-adevăr, din relația

$$u(x, t) = U(x - at, x + at),$$

prin derivare, se obține că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -4a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(x - at, x + at).$$

4.7 Diferențiale de ordin superior

4.7.1 Propoziție. Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în a , atunci

$$df(a)u = \frac{d}{dt} f(a + tu)|_{t=0}.$$

Demonstrație. Știm că (a se vedea pag. 103-5)

$$df(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) u_n.$$

Pe de altă parte, ținând seama de derivarea funcțiilor compuse (pag. 105-13), avem

$$\frac{d}{dt} f(a_1 + tu_1, \dots, a_n + tu_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tu) \frac{d}{dt}(a_1 + tu_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + tu) \frac{d}{dt}(a_n + tu_n)$$

și prin urmare

$$\frac{d}{dt} f(a + tu)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) u_n.$$

4.7.2 Dacă funcția continuă $f: [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în intervalul $(\alpha, \beta) \neq \emptyset$, atunci există $\xi \in (\alpha, \beta)$ astfel încât (a se vedea pag. 95-25)

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi) (\beta - \alpha),$$

adică astfel încât

$$f(\beta) = f(\alpha) + df(\xi) (\beta - \alpha).$$

4.7.3 Teoremă. Dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$, atunci, oricare ar fi punctele $a, x \in D$, există ξ aparținând segmentului $[a, x] = \{a + t(x - a) \mid t \in [0, 1]\}$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + df(\xi)(x - a).$$

Demonstrație. Funcția continuă $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(a + t(x - a))$, este derivabilă în intervalul $(0, 1)$. Conform teoremei lui Lagrange, există $t_0 \in (0, 1)$ astfel încât

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0),$$

adică

$$f(x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t_0(x - a))(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + t_0(x - a))(x_n - a_n).$$

Punând $\xi = a + t_0(x - a)$, ultima relație devine

$$f(x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)(x_n - a_n) = df(\xi)(x - a).$$

4.7.4 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f \in C^k(D)$. Prin *diferențiala de ordinul k* a lui f în punctul $a \in D$ se înțelege aplicația

$$d^k f(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^k f(a)(u) = \frac{d^k}{dt^k} f(a + tu)|_{t=0}.$$

4.7.5 Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este mulțime deschisă și $f \in C^3(D)$, atunci (v. pag. 109-23):

$$df(a): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad df(a)u = \frac{\partial f}{\partial x}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)u_2,$$

$$d^2 f(a): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^2 f(a)u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_2^2,$$

$$d^3 f(a): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^3 f(a)u = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)u_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a)u_1^2 u_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a)u_1 u_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)u_2^3,$$

oricare ar fi $a \in D$ și $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, adică formal avem

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f,$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f,$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f.$$

4.7.6 Se poate arăta că, în cazul unei funcții $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^k , avem

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f.$$

4.7.7 Deoarece

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \alpha_2)^k &= \sum_{j=0}^k C_k^j \alpha_1^{k-j} \alpha_2^j = \sum_{j_1+j_2=k} \frac{k!}{j_1! j_2!} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2}, \\
(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^k &= \sum_{j_1+j_2+j_3=k} \frac{k!}{j_1! j_2! j_3!} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \alpha_3^{j_3}, \\
(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^k &= \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k} \frac{k!}{j_1! j_2! \dots j_n!} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \dots \alpha_n^{j_n},
\end{aligned}$$

în cazul unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^k , avem

$$d^k f(a)(u) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k} \frac{k!}{j_1! j_2! \dots j_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}}(a) u_1^{j_1} u_2^{j_2} \dots u_n^{j_n}.$$

4.8 Dezvoltări Taylor

4.8.1 Definiție. Spunem despre o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ că este *de clasă C^k* și scriem $f \in C^k(D)$ dacă f este derivabilă de k ori în orice punct $a \in D$ și aplicația $f^{(k)} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă.

4.8.2 Teoremă (Taylor). Dacă $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^{k+1} , atunci pentru orice $a, x \in (\alpha, \beta)$ cu $x \neq a$, există ξ între a și x astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Demonstrație. În cazul $a < x$, funcția continuă $h : [a, x] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{\delta}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}$$

cu constanta δ alesă astfel încât $h(a) = 0$, este derivabilă pe intervalul (a, x) și $h(x) = 0$. Conform teoremei lui Rolle există ξ între a și x astfel încât $h'(\xi) = 0$, adică

$$\begin{aligned}
&-f'(\xi) - \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!} - \frac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \frac{f''(\xi)}{2!} 2(x-\xi) - \dots \\
&- \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} k(x-\xi)^{k-1} + \frac{\delta}{(k+1)!}(k+1)(x-\xi)^k = 0.
\end{aligned}$$

După reducerea termenilor rămâne $\delta = f^{(k+1)}(\xi)$. Cazul $a > x$ este similar.

4.8.3 Teoremă (Taylor). *Dacă funcția $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^{k+1} într-o vecinătate $B_r(a) \subset D$ a unui punct $a \in \overset{\circ}{D}$, atunci pentru orice $x \in B_r(a)$, există pe segmentul care unește a cu x un punct c astfel încât*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{k!} d^k f(a)(x-a) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(c)(x-a). \quad (4.10)$$

Demonstrație. Dacă $x \in B_r(a)$, atunci $\|x-a\| < r$. Aplicația

$$F : \left(-\frac{r}{\|x-a\|}, \frac{r}{\|x-a\|}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = f(a+t(x-a)),$$

este de clasă C^k . Conform teoremei precedente, există $\xi \in (0, 1)$ astfel încât

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!},$$

adică

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} \frac{d}{dt} f(a+t(x-a))|_{t=0} + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} f(a+t(x-a))|_{t=0} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} f(a+t(x-a))|_{t=0} + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f(a+t(x-a))|_{t=\xi}.$$

Ultima relație coincide pentru $c = a + \xi(x-a)$ cu (4.10) deoarece

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f(a+t(x-a))|_{t=\xi} = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f(a+\xi(x-a)+t(x-a))|_{t=0} = d^{k+1} f(c)(x-a).$$

4.8.4 În cazul unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 , relația (4.10) devine

$$f(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y-a_2) \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2)(x-a_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2)(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2)(y-a_2)^2 \right),$$

iar în cazul unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 , relația (4.10) devine

$$f(x, y, z) = f(a_1, a_2, a_3) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)(y-a_2) + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)(z-a_3) \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2, c_3)(x-a_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2, c_3)(y-a_2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(c_1, c_2, c_3)(z-a_3)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2, c_3)(x-a_1)(y-a_2) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(c_1, c_2, c_3)(y-a_2)(z-a_3) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(c_1, c_2, c_3)(z-a_3)(x-a_1) \right).$$

4.9 Extremele funcțiilor de mai multe variabile

4.9.1 Propoziție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

- Avem: a) Dacă $f' > 0$, atunci funcția f este strict crescătoare;
b) Dacă $f' < 0$, atunci funcția f este strict descrescătoare.

Demonstrație. Utilizăm teorema lui Lagrange (pag. 95-25). Pentru orice $x, y \in I$ există ξ între x și y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Dacă $f' > 0$, atunci: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Dacă $f' < 0$, atunci: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

4.9.2 Definiție. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și fie $a \in D$.

- Spunem că a este *punct de minim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$f(a) \leq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in B_\varepsilon(a) \cap D.$$

- Spunem că a este *punct de maxim local* al lui f dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$f(a) \geq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in B_\varepsilon(a) \cap D.$$

- Spunem că a este *punct de minim global* al lui f dacă

$$f(a) \leq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in D.$$

- Spunem că a este *punct de maxim global* al lui f dacă

$$f(a) \geq f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in D.$$

- Spunem că a este *punct de extrem local (global)* al lui f dacă este punct de maxim local (respectiv, global) sau punct de minim local (respectiv, global).

4.9.3 Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $a \in D$ un punct de extrem local al lui f .

Dacă $a \in \overset{\circ}{D}$ și f este derivabilă în a , atunci știm că $f'(a) = 0$ (v. pag. 95-23).

4.9.4 Definiție. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $a \in \overset{\circ}{D}$ un punct în care f este diferențiabilă. Spunem că a este *punct staționar* (sau *punct critic*) al lui f dacă

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0, \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

4.9.5 Teoremă. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Orice punct de extrem local din interiorul lui D în care funcția este diferențiabilă este punct staționar.

Demonstrație (Cazul $n=2$). Fie $a \in \overset{\circ}{D}$ un punct de extrem în care f este diferențiabilă

și $r > 0$ cu $B_r(a) \subset D$. Deoarece a_1 este punct de extrem pentru funcția derivabilă

$$\varphi_1 : (a_1 - r, a_1 + r) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(t) = f(t, a_2),$$

din teorema lui Fermat (a se vedea pag. 95-23) rezultă că $\varphi'_1(a_1) = 0$ și avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{t \rightarrow a_1} \frac{f(t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t - a_1} = \lim_{t \rightarrow a_1} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(a_1)}{t - a_1} = \varphi'_1(a_1) = 0.$$

Similar, a_2 fiind punct de extrem pentru funcția derivabilă

$$\varphi_2 : (a_2 - r, a_2 + r) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2(t) = f(a_1, t),$$

din teorema lui Fermat rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \lim_{t \rightarrow a_2} \frac{f(a_1, t) - f(a_1, a_2)}{t - a_2} = \lim_{t \rightarrow a_2} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(a_2)}{t - a_2} = \varphi'_2(a_2) = 0.$$

4.9.6 Propoziție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 într-o vecinătate $(a - r, a + r) \subset D$ a unui punct staționar $a \in \overset{\circ}{D}$. Avem:

- Dacă $f''(a) < 0$, atunci a este punct de maxim;
- Dacă $f''(a) > 0$, atunci a este punct de minim.

Demonstrație. În cazul $f''(a) \neq 0$, derivata a doua f'' păstrează același semn pe o vecinătate $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (a - r, a + r)$ a lui a . Pentru orice $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, există ξ între a și x astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - a)^2.$$

4.9.7 Teoremă. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^k într-o vecinătate $(a - r, a + r) \subset D$ a unui punct $a \in \overset{\circ}{D}$ cu proprietățile:

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Avem:

- Dacă k este par, atunci a este punct de extrem :
 - Dacă $f^{(k)}(a) < 0$, atunci a este punct de maxim;
 - Dacă $f^{(k)}(a) > 0$, atunci a este punct de minim.
- Dacă k este impar, atunci a nu este punct de extrem.

Demonstrație. Derivata $f^{(k)}$ păstrează același semn pe o vecinătate $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (a - r, a + r)$ a lui a . Pentru orice $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ există ξ între a și x astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - a)^k.$$

Dacă k este impar, atunci $(x - a)^k < 0$ pentru $x < a$ și $(x - a)^k > 0$ pentru $x > a$.

4.9.8 Dacă funcția $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a)$ a unui punct staționar $a \in \overset{\circ}{D}$, atunci pentru orice $x \in B_r(a)$ există c pe segmentul care unește a cu x astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} d^2(f)(c)(x - a).$$

4.9.9 Dacă funcția $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a) \subset D$ a unui punct $a \in \overset{\circ}{D}$, atunci

$$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(u, v) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) u_j v_k,$$

este o formă biliniară simetrică. Forma pătratică asociată este diferențiala de ordinul doi

$$d^2 f(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^2 f(a)(u) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) u_j u_k.$$

Matricea acestei forme pătratice în raport cu baza canonică este matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

numită *hessiana* lui f în a (după numele matematicianului O. Hesse).

4.9.10 Definiție. Spunem despre o formă pătratică

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(u) = \sum_{j,k=1}^n g_{jk} u_j u_k,$$

că este *pozitiv definită* (respectiv, *negativ definită*) dacă

$$Q(u) > 0 \quad (\text{respectiv, } Q(u) < 0), \quad \text{oricare ar fi } u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0.$$

4.9.11 Matricea formei pătratice Q ,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

fiind reală și simetrică, valorile ei proprii sunt reale. Ele sunt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22}-\lambda & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Forma pătratică Q este pozitiv (respectiv, negativ) definită dacă are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv, negative).

4.9.12 Exemple.

- a) Forma pătratică $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(u_1, u_2) = \alpha u_1^2 + 2\beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2$ cu matricea asociată

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

este pozitiv (respectiv, negativ) definită dacă valorile proprii

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\alpha + \gamma \pm \sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2})}{2}$$

sunt pozitive (respectiv, negative).

- b) Forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(u_1, u_2, u_3) = 2u_1 u_2 + 2u_2 u_3 + 2u_3 u_1$ nu este nici pozitiv definită, nici negativ definită deoarece matricea asociată

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ și $\lambda_3 = -1$.

4.9.13 MATHEMATICA: Eigenvalues[{a, b}, {b, c}]

```
In[1]:=Eigenvalues[{a, b}, {b, c}]
```

```
Out[1]={1/2 (a+c-√(a²+4b²-2ac+c²)), 1/2 (a+c+√(a²+4b²-2ac+c²))}
```

```
In[2]:=Eigenvalues[{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}]
```

```
Out[2]={2,-1,-1}
```

4.9.14 Teoremă. Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a)$ a unui punct staționar $a \in \overset{\circ}{D}$. Avem:

- Dacă $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, atunci a este punct de minim;
- Dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită, atunci a este punct de maxim;
- Dacă $d^2 f(a) \neq 0$ nu este nici pozitiv nici negativ definită, atunci a nu este punct de extrem.

Demonstrație. Dacă $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, atunci avem

$$m = \min_{\|u\|=1} \frac{1}{2!} d^2 f(a)(u) > 0$$

deoarece funcția continuă $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto d^2 f(a)(u)$ este mărginită pe mulțimea compactă $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|=1\}$ și își atinge marginile. Pentru orice punct $x \in B_r(a)$ există un punct c pe segmentul ce unește a cu x astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} d^2 f(c)(x-a) = \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(c) (x_j - a_j)(x_k - a_k).$$

Ultima relație se poate scrie sub forma

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} d^2 f(a) \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) \|x-a\|^2 + \omega(x-a) \|x-a\|^2,$$

unde

$$\omega(x-a) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(c) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right) \frac{(x_j - a_j)(x_k - a_k)}{\|x-a\|^2}.$$

Deoarece funcția f este de clasă C^2 în $B_r(a)$ și

$$|\omega(x-a)| \leq \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(c) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right|,$$

există $\varepsilon \in (0, r)$ astfel încât pentru $x \in B_\varepsilon(a)$ avem $|\omega(x-a)| \leq \frac{m}{2}$ și prin urmare

$$f(x) - f(a) = \left[\frac{1}{2!} d^2 f(a) \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right) + \omega(x-a) \right] \|x-a\|^2 \geq \left[m - \frac{m}{2} \right] \|x-a\|^2 \geq 0.$$

Celelalte afirmații pot fi justificate asemănător.

4.9.15 Pentru a obține informații privind punctele de extrem ale unei funcții de clasă C^2 , $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, determinăm punctele staționare (critice) rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0. \end{cases}$$

Apoi, pentru fiecare punct staționar a găsit studiem forma pătratică $d^2 f(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Matricea asociată acestei forme în raport cu o bază a lui $\mathbb{R}^n$ depinde de baza aleasă.

4.9.16 Teoremă (Jacobi). Fie $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică și fie

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea ei în raport cu o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a spațiului $\mathbb{R}^n$. Dacă

$$\Delta_1 = g_{11} \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

.....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci există o bază $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ în raport cu care Q are expresia

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2,$$

$$\text{unde } x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = x_1' e'_1 + x_2' e'_2 + \cdots + x_n' e'_n.$$

4.9.17 Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, atunci Q este pozitiv definită.

Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, atunci Q este negativ definită.

4.9.18 Propoziție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $a \in D$ un punct staționar. Dacă f este de clasă C^2 într-o vecinătate $B_r(a)$ a lui a , atunci:

- Dacă $\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right)^2 > 0$, atunci a este punct de extrem :
 - Dacă $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$, atunci a este punct de minim
 - Dacă $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, atunci a este punct de maxim
- Dacă $\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right)^2 < 0$, atunci a nu este punct de extrem.

Demonstrație. Utilizăm teorema lui Jacobi. Matricea formei pătratice $d^2 f(a)$ în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

4.9.19 Propoziția nu oferă informații despre punctele de extrem în cazul $\Delta_2=0$.

4.9.20 Exercițiu. Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy + 1.$$

Rezolvarea 1. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = 3a_1^2 + 3a_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = -3a_2^2 + 3a_1 = 0 \end{cases}$$

obținem punctele staționare $(0, 0)$ și $(1, -1)$. Punctul $a = (0, 0)$ nu este punct de extrem deoarece matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Punctul $a = (1, -1)$ este punct de minim deoarece

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

are valorile proprii $\lambda_1 = 3$ și $\lambda_2 = 9$.

Rezolvarea 2. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = 3a_1^2 + 3a_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = -3a_2^2 + 3a_1 = 0 \end{cases}$$

obținem punctele staționare $(0, 0)$ și $(1, -1)$. Punctul $a = (0, 0)$ nu este punct de extrem deoarece

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2 = -9 < 0.$$

Punctul $a = (1, -1)$ este punct de minim deoarece

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) \right)^2 = 27 > 0 \quad \text{și} \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 6 > 0.$$

4.10 Teorema funcțiilor implicite

4.10.1 Fie funcția $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Mulțimea

$$C = \{ (x, y) \mid F(x, y) = 0 \} = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

nu reprezintă graficul unei funcții de forma $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ deoarece la anumite valori ale lui x corespund două valori ale lui y :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \implies y = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{oricare ar fi } x \in [-1, 1].$$

Totuși, pentru orice punct $(a, b) \in C$ diferit de punctele $(1, 0)$ și $(-1, 0)$, există $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ astfel încât $((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \delta, b + \delta)) \cap C$ este graficul unei funcții $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow (b - \delta, b + \delta)$ cu proprietățile $f(a) = b$ și $F(x, f(x)) = 0$ (v. Fig. 4.5). Spunem că f este o *funcție definită implicit* de ecuația $F(x, y) = 0$.

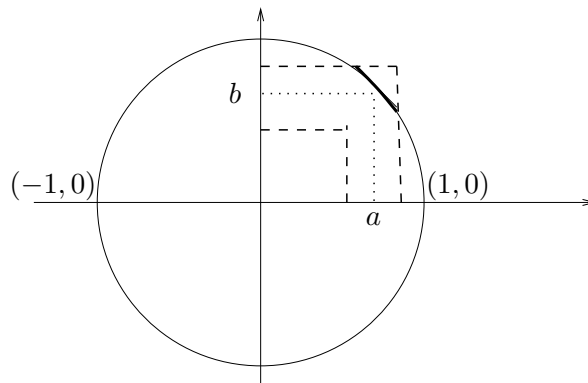


Figura 4.5: Cercul $C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$.

4.10.2 Punctele în jurul cărora o curbă de forma $\{ (x, y) \mid F(x, y) = 0 \}$, definită de o funcție $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 , nu reprezintă graficul unei funcții $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt cele în care tangenta la curbă este paralelă cu Oy (normala paralelă cu Ox).

4.10.3 Fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 și $(a, b) \in D$ astfel încât $F(a, b) = 0$ și $dF(a, b) \neq 0$. Dacă $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow D : t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ este un drum de clasă C^1 astfel încât

$$(\varphi(0), \psi(0)) = (a, b) \quad \text{și} \quad F(\varphi(t), \psi(t)) = 0, \quad \text{oricare ar fi } t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

atunci

$$\left. \frac{d}{dt} F(\varphi(t), \psi(t)) \right|_{t=0} = 0,$$

adică avem relația

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \varphi'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \psi'(0) = 0,$$

care se mai poate scrie

$$\left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right), (\varphi'(0), \psi'(0)) \right\rangle = 0.$$

Din ultima relație rezultă că vectorul $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)$ este perpendicular pe tangenta la $\{(x, y) | F(x, y) = 0\}$. Este paralel cu Ox dacă și numai dacă $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0$.

4.10.4 Teoremă. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ funcție de clasă C^1 .

Dacă $(a, b) \in D$ este astfel încât

$$F(a, b) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

atunci există $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ astfel încât $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \delta, b + \delta) \subset D$ și există o funcție $f: (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow (b - \delta, b + \delta)$ cu proprietățile:

- 1) $f(a) = b$;
- 2) $F(x, f(x)) = 0$, oricare ar fi $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$;
- 3) funcția f este de clasă C^1 și

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Demonstrație. Considerăm cazul $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$. Funcția f fiind de clasă C^1 în D , există $r > 0$, $\delta > 0$ astfel încât $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$, oricare ar fi $(x, y) \in (a - r, a + r) \times [b - \delta, b + \delta]$. Deoarece $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y) > 0$ și $F(a, b) = 0$, rezultă că $F(a, b - \delta) < 0$ și $F(a, b + \delta) > 0$. Funcția F fiind continuă, rezultă că există $\varepsilon \in (0, r)$ astfel încât $F(x, b - \delta) < 0$ și $F(x, b + \delta) > 0$, oricare ar fi $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Pentru orice $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, funcția continuă

$$[b - \delta, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto F(x, y)$$

este crescătoare, $F(x, b - \delta) < 0$ și $F(x, b + \delta) > 0$. Rezultă că există $y_x \in (b - \delta, b + \delta)$ astfel încât $F(x, y_x) = 0$. Funcția

$$f: (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow (b - \delta, b + \delta), \quad f(x) = y_x,$$

îndeplinește condițiile $f(a) = b$ și $F(x, f(x)) = 0$, oricare ar fi $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Fie $x_0 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ fixat. Oricare ar fi $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ diferit de x_0 , există (ξ, η) pe

segmentul ce unește $(x_0, f(x_0))$ cu $(x, f(x))$ astfel încât (v. pag. 121-3)

$$F(x, f(x)) - F(x_0, f(x_0)) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)(f(x) - f(x_0)).$$

Deoarece $F(x, f(x)) = F(x_0, f(x_0)) = 0$, obținem

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, f(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0))}.$$

Cazul $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$ poate fi analizat asemănător.

4.10.5 Teoremă. Fie $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k: (x, y) \mapsto F(x, y)$ o funcție de clasă C^1 definită pe o mulțime deschisă D . Dacă $(a, b) \in D$ este astfel încât

$$F(a, b) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_k)}(a, b) \neq 0,$$

atunci există $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ astfel încât $B_\varepsilon(a) \times B_\delta(b) \subset D$ și există o funcție $f: B_\varepsilon(a) \rightarrow B_\delta(b)$ cu proprietățile:

- 1) $f(a) = b$;
- 2) $F(x, f(x)) = 0$, oricare ar fi $x \in B_\varepsilon(a)$;
- 3) funcția f este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = - \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(y_1, \dots, y_k)}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x, f(x)).$$

4.10.6 În cazul $n = k = 2$, relația anterioară devine

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x, f(x)) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x, f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x, f(x)) \end{pmatrix}$$

și este echivalentă cu:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x, f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x, f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x, f(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x, f(x)) \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x_i, y_2)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(x, f(x))};$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x, f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x, f(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x, f(x)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x, f(x)) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x, f(x)) \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, x_i)}(x, f(x))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(x, f(x))}.$$

4.11 Teorema de inversiune locală

4.11.1 Teoremă. Dacă funcția continuă și bijectivă $f: I \rightarrow J$ definită pe un interval I este derivabilă în $a \in I$ și dacă $f'(a) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}: J \rightarrow I$ este derivabilă în punctul $b = f(a)$ și

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{adică} \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demonstrație. Funcția f^{-1} fiind continuă (a se vedea pag. 84-5), avem

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))} \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \end{aligned}$$

4.11.2 Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă definită pe un interval I cu $f'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$. Funcția f' având proprietatea lui Darboux (v. pag. 95-27), păstrează semn constant pe I și prin urmare, f este strict monotonă. Funcția $f: I \rightarrow f(I)$ este bijectivă și pentru orice $y \in f(I)$, avem

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

4.11.3 Dacă funcția bijectivă $f: I \rightarrow J$ și inversa ei sunt derivabile, atunci

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \quad (f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1,$$

oricare ar fi $x \in I$. Din această relație rezultă

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{dacă} \quad f'(x) \neq 0.$$

4.11.4 Exemple.

a) Inversa funcției bijective $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ este $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ și

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \quad (\arcsin)'(\sin x) \cos x = 1.$$

Pentru orice $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, avem

$$(\arcsin)'(\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \quad \text{adică} \quad (\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

b) Inversa funcției bijective $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ este $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \quad (\operatorname{arctg})'(\operatorname{tg} x) \frac{1}{\cos^2 x} = 1,$$

relație din care rezultă

$$(\operatorname{arctg})'(\operatorname{tg} x) = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \text{adică} \quad (\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1 + t^2}.$$

c) Inversa funcției bijective $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto e^x$ este $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ și

$$\ln(e^x) = x \quad \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \quad (\ln)'(e^x) e^x = 1,$$

relație din care rezultă

$$(\ln)'(e^x) = \frac{1}{e^x}, \quad \text{adică} \quad (\ln t)' = \frac{1}{t}.$$

4.11.5 Teoremă. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ o funcție de clasă C^1 definită pe o mulțime deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dacă $a \in D$ este astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci există $\varepsilon > 0$ și o funcție $g: B_\varepsilon(f(a)) \rightarrow D$ astfel încât:

- 1) $g(f(a)) = a$;
- 2) $f(g(y)) = y$, oricare ar fi $y \in B_\varepsilon(f(a))$;
- 3) funcția g este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}(y) = \left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(g(y)) \right)^{-1}.$$

Demonstrație. Funcția $F: D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, y) = f(x) - y$ este de clasă C^1 și

$$F(a, f(a)) = 0, \quad \det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a, f(a)) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a) \neq 0.$$

Conform teoremei funcțiilor implicite, există $\delta > 0$ și $g: B_\delta(f(a)) \rightarrow D$ astfel încât:

- 1) $g(f(a)) = a$;
- 2) $F(g(y), y) = f(g(y)) - y = 0$, oricare ar fi $y \in B_\delta(f(a))$;
- 3) funcția g este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(y) = - \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(g(y), y) \right)^{-1} \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(g(y), y).$$

4.11.6 Definiție. O funcție $f:D \longrightarrow U$ de clasă C^1 între două mulțimi deschise D și U din $\mathbb{R}^n$ se numește *difeomorfism* dacă este bijectivă și inversa ei $f^{-1}:U \longrightarrow D$ este de clasă C^1 .

4.11.7 Se poate arăta ([29], pag. 220) că o funcție bijectivă $f:D \rightarrow U$ de clasă C^1 între două mulțimi deschise D și U din $\mathbb{R}^n$ este difeomorfism dacă și numai dacă f^{-1} este continuă și

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{oricare ar fi } a \in D.$$

Capitolul 5

Primitive și integrale simple

5.1 Primitive

5.1.1 Propoziție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Dacă $f' = 0$, atunci f este funcție constantă.

Demonstrație. Utilizăm teorema lui Lagrange (pag. 95-25). Pentru orice $x, y \in I$, există ξ între x și y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, adică avem $f(x) - f(y) = 0$.

5.1.2 Fie $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dacă $f' = g'$, atunci $g - f = \text{const}$, adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = f(x) + c, \quad \text{oricare ar fi } x \in I.$$

5.1.3 Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Prin *primitivă* a lui f se înțelege o funcție derivabilă $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$F'(x) = f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in I.$$

5.1.4 Dacă $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale unei funcții $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definite pe intervalul I , atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1 = F_2 + c$.

5.1.5 Mulțimea primitivelor unei funcții $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se notează cu $\int f(x)dx$, adică

$$\int f(x)dx = \{ F: I \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ este primitivă a lui } f \}.$$

Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor constante definite pe intervalul considerat.

5.1.6 Primitivalele unor funcții uzuale $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

(I este un interval inclus în domeniul maxim de derivabilitate al primitivelor)

Funcția	Mulțimea primitivelor	Intervalul	Condiții
$f(x) = 1$	$\int dx = x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$f(x) = x^\alpha$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$	$I \subseteq (0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$0 < a \neq 1$
$f(x) = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$	
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$I \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$	
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$I \subseteq (-a, a)$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right + C$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus [-a, a]$	$a > 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$	$a \neq 0$
$f(x) = \operatorname{sh} x$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	
$f(x) = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$	

5.1.7 MATHEMATICA: Integrate[f[x], x]

In[1]:=Integrate[f[x], x]	$\mapsto$	Out[1]= $\int f(x) dx$
In[2]:=Integrate[x^a, x]	$\mapsto$	Out[2]= $\frac{x^{1+a}}{1+a}$
In[3]:=Integrate[a^x, x]	$\mapsto$	Out[3]= $\frac{a^x}{\operatorname{Log}[a]}$
In[4]:=Integrate[1/Sqrt[x^2+a^2], x]	$\mapsto$	Out[4]= $\operatorname{Log}[x + \sqrt{a^2 + x^2}]$

5.1.8 Teoremă. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ definite pe un interval I admit primitive și $\lambda \in \mathbb{R}^*$, atunci funcțiile $f+g$ și λf admit primitive și

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

Demonstrație. Dacă $F \in \int f(x) dx$ și $G \in \int g(x) dx$, atunci $(F+G)' = f+g$, $(\lambda F)' = \lambda f$.

5.1.9 Teoremă. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I , atunci f are proprietatea lui Darboux pe I .

Demonstrație. Dacă f admite primitive, atunci există $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f = F'$. Dar, derivata unei funcții pe un interval are proprietatea lui Darboux (pag. 95-27).

5.1.10 Teoremă. O funcție continuă definită pe un interval admite primitive.

Demonstrație. A se vedea pag. 149-25.

5.1.11 Teoremă (Integrarea prin părți). Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții de clasă C^1 definite pe un interval I , atunci funcțiile $f'g$ și fg' admit primitive și

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Demonstrație. Funcțiile $f'g$ și fg' fiind continue, admit primitive și

$$f(x) g(x) + C = \int (f \cdot g)'(x) dx = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx.$$

5.1.12 Exercițiu. Să se calculeze integralele

$$\int x e^x dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int \sqrt{4-x^2} dx.$$

Rezolvare. Avem:

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C;$$

$$\int \ln x dx = \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int x \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \arcsin \frac{x}{2} + \int x (\sqrt{4-x^2})' dx \\ &= 4 \arcsin \frac{x}{2} + x \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx. \end{aligned}$$

Din ultima relație rezultă că $\int \sqrt{4-x^2} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C$.

5.1.13 MATHEMATICA: Integrate[f[x], x]

In[1]:=Integrate[x Exp[x], x] $\mapsto$ Out[1]=e^x(-1+x)

In[2]:=Integrate[Log[x], x] $\mapsto$ Out[2]=-x+x Log[x]

In[3]:=Integrate[Sqrt[4-x^2], x] $\mapsto$ Out[3]= $\frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + 2 \text{ArcSin}[\frac{x}{2}]$

5.1.14 Teoremă (Schimbarea de variabilă). Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale și $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcții. Dacă $\varphi: I \rightarrow J$ este derivabilă și F este o primitivă a lui f , atunci $I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x))$ este o primitivă a funcției $I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(\varphi(x)) \varphi'(x)$, adică

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left(\int f(t) dt \right) \circ \varphi.$$

Demonstrație. Avem $\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

5.1.15 Exercițiu. Să se calculeze integralele

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}, \quad \int \sqrt{-x^2+6x-5} dx.$$

Rezolvare. Avem (a se vedea exercițiul anterior):

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' dx = 2 \left(\int e^t dt \right)_{t=\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + C; \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= 2 \int \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2-1} (\sqrt{x+1})' dx = \left(\int \frac{dt}{t^2-1} \right)_{t=\sqrt{x+1}} = \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} + C; \\ \int \sqrt{-x^2+6x-5} dx &= \int \sqrt{4-(x-3)^2} (x-3)' dx \\ &= \left(\int \sqrt{4-t^2} dt \right)_{t=x-3} = 2 \arcsin \frac{x-3}{2} + \frac{x-3}{2} \sqrt{-x^2+6x-5} + C. \end{aligned}$$

5.1.16 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[Exp[Sqrt[x]]/Sqrt[x], x]     $\mapsto$     Out[1]=2e√x`

`In[2]:=Integrate[1/(x Sqrt[x+1]), x]     $\mapsto$     Out[2]=Log[-1+√(1+x)]-Log[1+√(1+x)]`

`In[3]:=Integrate[Sqrt[-x^2+6x-5], x]     $\mapsto$     Out[3]=1/2 (-3+x) √(-5+6x-x^2)+2 ArcSin[1/2 (-3+x)]`

5.1.17 Teoremă Fie I, J intervale și $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, unde f este o funcție continuă și u este o funcție de clasă C^1 bijectivă cu $u'(t) \neq 0$, oricare ar fi $t \in I$. Dacă G este o primitivă a funcției $I \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto f(u(t))u'(t)$, atunci $J \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto G(u^{-1}(x))$ este o primitivă a lui f , adică

$$\int f(x) dx = G \circ u^{-1} + C.$$

Demonstrație. Utilizând teorema de derivare a funcției inverse (pag. 134-1), obținem

$$(G \circ u^{-1})'(x) = G'(u^{-1}(x)) (u^{-1})'(x) = f(u(u^{-1}(x))) u'(u^{-1}(x)) \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = f(x).$$

5.1.18 Exercițiu. Să se determine mulțimea primitivelor funcției

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

Rezolvare. Funcția $u: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $u(t) = t^2$ este bijectivă și $u^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Deoarece

$$\int f(u(t)) u'(t) dt = \int \frac{2t^2}{1+t} dt = 2 \int \frac{(t^2-1)+1}{1+t} dt = t^2 - 2t + 2 \ln(1+t) + C,$$

avem

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \left(\int f(u(t)) u'(t) dt \right)_{t=\sqrt{x}} = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

5.1.19 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], x]`

`In[1]:=Integrate[Sqrt[x]/(1+Sqrt[x]), x]     $\mapsto$     Out[1]=-2  $\sqrt{x} + x + 2 \text{Log}[1+\sqrt{x}]$`

5.2 Integrala definită

5.2.1 Definiție. Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval închis și mărginit. Prin *diviziune* a intervalului $[a, b]$ se înțelege un sistem de puncte $\delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ astfel încât

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Lungimea celui mai mare dintre intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, adică

$$\|\delta\| = \max_{i=1, n} (x_i - x_{i-1}),$$

este numită *norma diviziunii* δ .

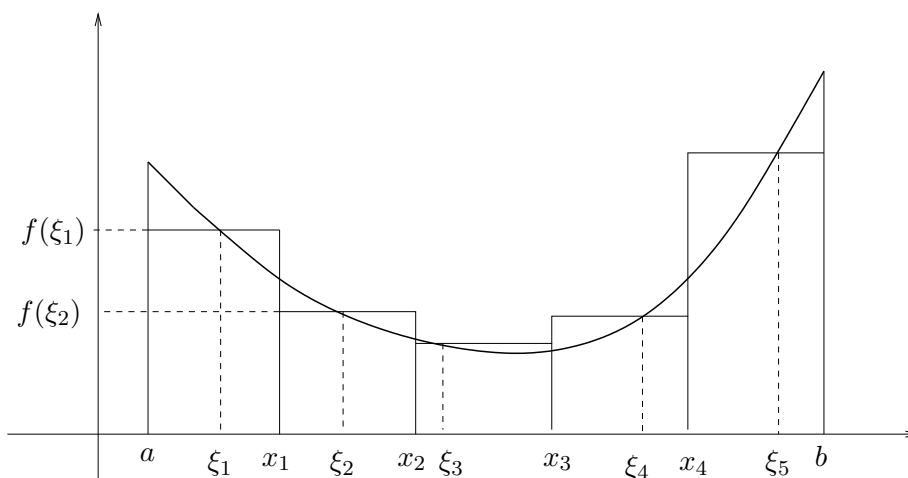


Figura 5.1: Integrala definită.

5.2.2 Exemplu. Punctele

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, \quad x_n = b$$

formează o diviziune (echidistantă) δ cu norma $\|\delta\| = \frac{b-a}{n}$.

5.2.3 Definiție. Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $\delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $\{\xi_i\}_{i=1, n}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii cu

$$\xi_1 \in [x_0, x_1], \quad \xi_2 \in [x_1, x_2], \quad \dots \quad \xi_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Prin *sumă Riemann* asociată funcției f , diviziunii δ și sistemului de puncte intermediare $\{\xi_i\}_{i=1, n}$ se înțelege numărul

$$\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}).$$

În cazul în care $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, numărul $\sigma_\delta(f, \{\xi_i\})$ reprezintă suma ariilor unor dreptunghiuri. Ea aproximează aria de sub grafic (v. Fig. 5.1).

5.2.4 Definiție. Spunem că funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (Riemann) pe $[a, b]$ dacă există un număr $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\nu > 0$ astfel încât relația

$$|\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$$

are loc pentru orice diviziune δ cu $\|\delta\| < \nu$ și pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\{\xi_i\}_{i=1, n}$.

Numărul I_f se numește *integrala* funcției f pe $[a, b]$ și se utilizează pentru el notația $\int_a^b f(x) dx$.

5.2.5 Teoremă. *Funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă (Riemann) pe $[a, b]$ dacă și numai dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice șir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ și pentru orice alegere a sistemelor de puncte intermediare asociate $\{\xi_i^n\}$, avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = I.$$

În cazul în care f este integrabilă, avem $I = \int_a^b f(x) dx$.

Demonstrație. “ $\Rightarrow$ ” Arătăm că pentru orice șir $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = I_f$, oricare ar fi $\{\xi_i^n\}$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform ipotezei există $\nu > 0$ astfel încât $|\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$ pentru orice diviziune δ cu $\|\delta\| < \nu$ și orice $\{\xi_i\}_{i=1, n}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|\delta_n\| < \nu$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. Rezultă $|\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) - I_f| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq n_\varepsilon$. “ $\Leftarrow$ ” Arătăm prin reducere la absurd că f este integrabilă și $I_f = I$. Presupunând că $\int_a^b f(x) dx \neq I$,

există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\nu > 0$, există o diviziune δ_ν și un sistem de puncte intermediare $\{\xi_i^\nu\}$ cu $|\sigma_{\delta_\nu}(f, \{\xi_i^\nu\}) - I| \geq \varepsilon_0$. În particular, alegând $\nu = \frac{1}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, obținem un șir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\|\delta_n\| < \frac{1}{n}$ și $|\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) - I| \geq \varepsilon_0$ pentru anumite sisteme de puncte $\{\xi_i^n\}$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) \neq I$, deși $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, în contradicție cu ipoteza.

5.2.6 Propoziție.

a) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci funcția αf este integrabilă și

$$\int_a^b (\alpha f)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

b) Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci funcțiile $f \pm g$ sunt integrabile și

$$\int_a^b (f \pm g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstrație. Pentru orice $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ și orice $\{\xi_i^n\}$ avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(\alpha f, \{\xi_i^n\}) &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = \alpha \int_a^b f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f \pm g, \{\xi_i^n\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) \\ &\quad \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(g, \{\xi_i^n\}) = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

5.2.7 Se poate arăta că:

- 1) Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci fg este funcție integrabilă;
- 2) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

5.2.8 Propoziție.

a) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

b) Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile și $f(x) \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

c) Dacă funcțiile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Demonstrație. a) Fie $(\delta_n)_{n=1}^\infty = (\{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n\})_{n=1}^\infty$ un șir de diviziuni astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ și $\{\xi_i^n\}$ puncte intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$. Avem

$$\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n) (x_i^n - x_{i-1}^n) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) \geq 0.$$

b) Utilizând a), obținem

$$f \leq g \implies g - f \geq 0 \implies \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0.$$

c) Avem

$$-|f| \leq f \leq |f| \implies -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

5.2.9 Definiție. Spunem că $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă există $M \in \mathbb{R}$ încât

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b].$$

În caz contrar, spunem că f este *nemărginită*.

5.2.10 Propoziție. Dacă funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este nemărginită, atunci există un șir $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ în $[a, b]$ astfel încât

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_k) = -\infty \quad \text{sau} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_k) = \infty.$$

Demonstrație. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in [a, b]$ astfel încât $|f(x_n)| \geq n$. Cel puțin una dintre mulțimile $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n\}$ și $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq -n\}$ este infinită și elementele ei corespund unui subșir $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ al lui $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_k) = \pm\infty$.

5.2.11 Teoremă. Dacă funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci este mărginită.

Demonstrație. Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție nemărginită superior și $\delta = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ o diviziune a lui $[a, b]$. Există un șir $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ în $[a, b]$ astfel încât $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\alpha_k) = \infty$. Cel puțin unul dintre intervalele $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ conține un număr infinit de termeni ai șirului $(\alpha_k)_{k \geq 0}$. Fie $[x_{j-1}, x_j]$ un astfel de interval. Există un șir $(\xi_j^n)_{n \geq 0}$ în $[x_{j-1}, x_j]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_j^n)(x_j - x_{j-1}) = \infty$. Valoarea unei sume Riemann $\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ asociate diviziunii δ poate fi făcută oricât de mare modificând convenabil alegerea lui ξ_j . O relație de tipul $|\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$ nu poate avea loc pentru orice alegere a punctelor intermediare $\{\xi_i\}$.

5.2.12 Propoziție. Dacă $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

unde $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ și $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

Demonstrație. Funcția integrabilă f fiind mărginită, există marginile m și M cu

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b],$$

și prin urmare (a se vedea pag. 143-8)

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a).$$

5.2.13 Definiție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Sumele (v. Fig. 5.2)

$$s_\delta(f) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \text{unde} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

și

$$S_\delta(f) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \quad \text{unde} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

se numesc *suma Darboux inferioară* și respectiv, *suma Darboux superioară*.

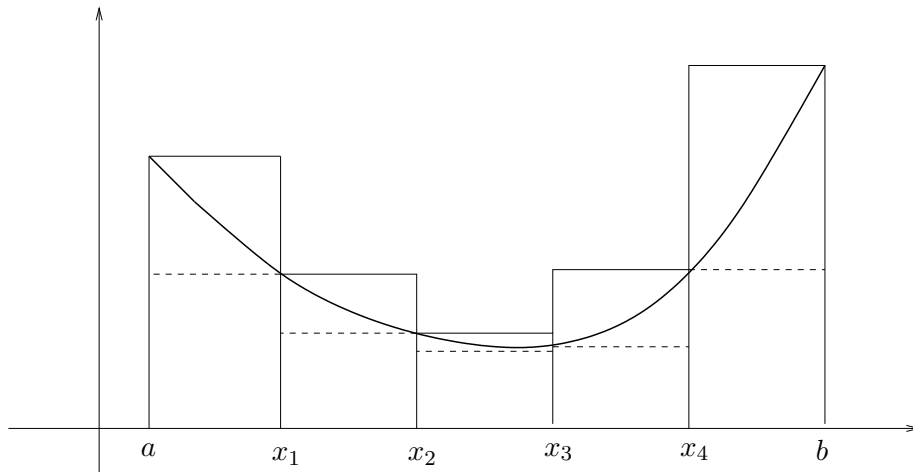


Figura 5.2: Sumele Darboux inferioară și superioară.

5.2.14 Propoziție. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită și δ o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci $s_\delta(f) \leq \sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) \leq S_\delta(f)$, oricare ar fi punctele $\{\xi_i\}$.

Demonstrație. Dacă $\delta = \{x_0, \dots, x_n\}$, avem $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, pentru orice $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

5.2.15 Propoziție. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită și δ o diviziune fixată, atunci

$$s_\delta(f) = \inf_{\{\xi_i\}} \sigma_\delta(f, \{\xi_i\}), \quad S_\delta(f) = \sup_{\{\xi_i\}} \sigma_\delta(f, \{\xi_i\}),$$

unde marginea inferioară și cea superioară se consideră pentru toate alegerile posibile ale punctelor intermediere ξ_i .

Demonstrație. Fie $\delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ și $\varepsilon > 0$. Alegând pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ un punct ξ_i cu $f(\xi_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (a se vedea pag. 32-30), avem

$$\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) - s_\delta(f) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - m_i) (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon,$$

adică $s_\delta(f) \leq \sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) < s_\delta(f) + \varepsilon$. A doua relație se poate dovedi similar.

5.2.16 Teoremă. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, atunci pentru orice șir de diviziuni $(\delta_n)_{n \geq 0}$ ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta_n}(f) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta_n}(f).$$

Demonstrație. Fie $I_f = \int_a^b f(x) dx$ și $\varepsilon > 0$. Funcția f fiind integrabilă, există $\nu > 0$ astfel încât, pentru orice diviziune δ cu $\|\delta\| \leq \nu$, avem $|\sigma_\delta(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor ξ_i . Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|\delta_n\| < \nu$ și prin urmare $|\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i\}) - I_f| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice alegere a punctelor ξ_i . Ținând seama de rezultatul prezentat la pag. 32-30 și propoziția anterioară, deducem că $|s_{\delta_n}(f) - I_f| \leq \varepsilon$ și $|S_{\delta_n}(f) - I_f| \leq \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

5.2.17 Propoziție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $\delta' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ două diviziuni ale intervalului $[a, b]$. Dacă $\delta \subset \delta'$, atunci

$$s_\delta(f) \leq s_{\delta'}(f) \leq S_{\delta'}(f) \leq S_\delta(f).$$

Demonstrație. Diviziunea δ' se obține din δ prin adăugarea de noi puncte de diviziune. Este suficient să analizăm cazul în care δ' conține un singur punct suplimentar $y \in (x_{j-1}, x_j)$, adică $\delta' = \delta \cup \{y\} = \{x_0, \dots, x_{j-1}, y, x_j, \dots, x_n\}$. Avem

$$\begin{aligned} s_\delta(f) &= \sum_{i \neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{i \neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(y - x_{j-1}) + m_j(x_j - y) \\ &\leq \sum_{i \neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + \inf_{x \in [x_{j-1}, y]} f(x) (y - x_{j-1}) \\ &\quad + \inf_{x \in [y, x_j]} f(x) (x_j - y) = s_{\delta'}(f). \end{aligned}$$

Inegalitatea $S_{\delta'}(f) \leq S_{\delta}(f)$ se poate obține asemănător.

5.2.18 Propoziție. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită, atunci

$$m(b-a) \leq s_{\delta}(f) \leq S_{\delta'}(f) \leq M(b-a), \quad (5.1)$$

unde $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, oricare ar fi diviziunile δ și δ' .

Demonstrație. Fie $\delta_0 = \{a, b\}$ și $\tilde{\delta} = \delta \cup \delta'$. Deoarece $\delta_0 \subset \delta \subset \tilde{\delta}$ și $\delta_0 \subset \delta' \subset \tilde{\delta}$, avem

$$s_{\delta_0}(f) \leq s_{\delta}(f) \leq s_{\tilde{\delta}}(f) \leq S_{\tilde{\delta}}(f) \leq S_{\delta'}(f) \leq S_{\delta_0}(f).$$

5.2.19 Din relația (5.1) rezultă

$$m(b-a) \leq \sup_{\delta} s_{\delta}(f) \leq \inf_{\delta} S_{\delta}(f) \leq M(b-a).$$

Numerele

$$\underline{I} = \sup_{\delta} s_{\delta}(f), \quad \bar{I} = \inf_{\delta} S_{\delta}(f)$$

se numesc *integrala Darboux inferioară* și respectiv, *integrala Darboux superioară*.

Pentru orice diviziune δ , are loc relația

$$s_{\delta}(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_{\delta}(f).$$

5.2.20 Lemă. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită astfel încât, pentru orice șir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0,$$

atunci există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice șir $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \dots$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta_n}(f) = I.$$

Demonstrație. Dacă $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \dots$, atunci $s_{\delta_1}(f) \leq s_{\delta_2}(f) \leq \dots$ și $S_{\delta_1}(f) \geq S_{\delta_2}(f) \geq \dots$.

Orice șir monoton și mărginit de numere reale fiind convergent, există $I \in \mathbb{R}$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta_n}(f) = I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta_n}(f).$$

Dacă $\delta'_1 \subset \delta'_2 \subset \dots$ este un alt șir de diviziuni cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta'_n\| = 0$, există $I' \in \mathbb{R}$ cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta'_n}(f) = I' = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta'_n}(f).$$

Deoarece $(\delta_n \cup \delta'_n)_{n \geq 1}$ are proprietățile $\delta_1 \cup \delta'_1 \subset \delta_2 \cup \delta'_2 \subset \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n \cup \delta'_n\| = 0$ și

$$s_{\delta_n}(f) \leq s_{\delta_n \cup \delta'_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f), \quad s_{\delta'_n}(f) \leq s_{\delta_n \cup \delta'_n}(f) \leq S_{\delta'_n}(f),$$

rezultă $I' = I$. În particular, avem $s_{\delta_n}(f) \leq I \leq S_{\delta_n}(f)$, pentru orice $n \geq 1$.

5.2.21 Teoremă (Criteriul lui Darboux). *Funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă dacă și numai dacă este mărginită și, pentru orice șir de diviziuni $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0.$$

În cazul în care f este integrabilă, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta_n}(f) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta_n}(f).$$

Demonstrație. “ $\Rightarrow$ ” A se vedea pag. 146-16. “ $\Leftarrow$ ” Utilizăm lema precedentă. Fie $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ un șir de diviziuni cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ și fie $\tilde{\delta}_n = \bigcup_{k=1}^n \delta_k$, pentru orice $n \geq 1$. Deoarece $\tilde{\delta}_1 \subset \tilde{\delta}_2 \subset \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}_n\| = 0$ și $s_{\delta_n}(f) \leq s_{\tilde{\delta}_n}(f) \leq I \leq S_{\tilde{\delta}_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f)$, avem

$$0 \leq S_{\delta_n}(f) - I \leq S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f), \quad 0 \leq I - s_{\delta_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f).$$

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta_n}(f) = I$. Dar $s_{\delta_n}(f) \leq \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i\}) \leq S_{\delta_n}(f)$ și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i\}) = I$.

5.2.22 Teoremă *Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție integrabilă și $c \in (a, b)$, atunci restricțiile funcției f la intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$ sunt integrabile și*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui Darboux. Fie $(\delta'_n)_{n=1}^\infty$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, c]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta'_n\| = 0$, $s_{\delta'_n}(f)$, $S_{\delta'_n}(f)$ sumele Darboux corespunzătoare restricției $f|_{[a, c]}$ și fie $(\delta''_n)_{n=1}^\infty$ un șir de diviziuni ale intervalului $[c, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta''_n\| = 0$, $s_{\delta''_n}(f)$, $S_{\delta''_n}(f)$ sumele Darboux corespunzătoare restricției $f|_{[c, b]}$. Șirul $(\delta_n)_{n=1}^\infty$, unde $\delta_n = \delta'_n \cup \delta''_n$, fiind un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0$. Din

$$S_{\delta'_n}(f) - s_{\delta'_n}(f) + S_{\delta''_n}(f) - s_{\delta''_n}(f) = S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)$$

rezultă relațiile

$$0 \leq S_{\delta'_n}(f) - s_{\delta'_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f), \quad 0 \leq S_{\delta''_n}(f) - s_{\delta''_n}(f) \leq S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f),$$

care conduc la $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta'_n}(f) - s_{\delta'_n}(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta''_n}(f) - s_{\delta''_n}(f)) = 0$, relație din care rezultă că funcțiile $f|_{[a, c]}$ și $f|_{[c, b]}$ sunt integrabile. Egalitatea din enunț se obține din $S_{\delta_n}(f) = S_{\delta'_n}(f) + S_{\delta''_n}(f)$ prin trecere la limită.

5.2.23 Teoremă Dacă pentru $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ există $c \in (a, b)$ astfel încât restricțiile funcției f la $[a, c]$ și $[c, b]$ sunt integrabile, atunci funcția f este integrabilă pe $[a, b]$.

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui Darboux. Funcția f este mărginită. Fie $(\delta_n)_{n=0}^\infty$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ și fie $\tilde{\delta}_n = \delta_n \cup \{c\}$. Șirul $(\tilde{\delta}'_n)_{n=0}^\infty$, unde $\tilde{\delta}'_n = \tilde{\delta}_n \cap [a, c]$, este o diviziune a intervalului $[a, c]$ iar șirul $(\tilde{\delta}''_n)_{n=0}^\infty$, unde $\tilde{\delta}''_n = \tilde{\delta}_n \cap [c, b]$, este o diviziune a intervalului $[c, b]$. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tilde{\delta}'_n}(f) = \int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\tilde{\delta}'_n}(f), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tilde{\delta}''_n}(f) = \int_c^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\tilde{\delta}''_n}(f).$$

Deoarece $s_{\tilde{\delta}_n}(f) = s_{\tilde{\delta}'_n}(f) + s_{\tilde{\delta}''_n}(f)$ și $S_{\tilde{\delta}_n}(f) = S_{\tilde{\delta}'_n}(f) + S_{\tilde{\delta}''_n}(f)$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tilde{\delta}_n}(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\tilde{\delta}_n}(f)$$

și prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\tilde{\delta}_n}(f) - s_{\tilde{\delta}_n}(f)) = 0$. Notând $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, avem

$$|s_{\tilde{\delta}_n}(f) - s_{\delta_n}(f)| \leq 2M \|\delta_n\|, \quad |S_{\tilde{\delta}_n}(f) - S_{\delta_n}(f)| \leq 2M \|\delta_n\|.$$

Rezultă relațiile $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tilde{\delta}_n}(f)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\tilde{\delta}_n}(f)$ care conduc la $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0$.

5.2.24 Teoremă. Orice funcție monotonă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui Darboux. Fie $(\delta_n)_{n=0}^\infty$, unde $\delta_n = \{x_0^n, \dots, x_{k_n}^n\}$, un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$. Dacă f este crescătoare, atunci este mărginită și avem relația

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f) &= \sum_{i=1}^{k_n} (f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n))(x_i^n - x_{i-1}^n) \\ &\leq \|\delta_n\| \sum_{i=1}^{k_n} (f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n)) = \|\delta_n\| (f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

din care rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0$.

5.2.25 Teoremă. Orice funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. Utilizăm criteriul lui Darboux. Fie $(\delta_n)_{n=0}^\infty$, unde $\delta_n = \{x_0^n, \dots, x_{k_n}^n\}$, un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$ și fie $\varepsilon > 0$. Funcția f fiind continuă pe mulțimea compactă $[a, b]$, este uniform continuă (v. pag. 82-11). Există $\eta > 0$ astfel încât $|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|\delta_n\| < \eta$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. Funcția f își

atinge extremele pe fiecare interval $[x_{i-1}^n, x_i^n]$. Dacă $n \geq n_\varepsilon$, atunci

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f) &= \sum_{i=1}^{k_n} \left(\max_{x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]} f(x) - \min_{x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]} f(x) \right) (x_i^n - x_{i-1}^n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k_n} (x_i^n - x_{i-1}^n) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\delta_n}(f) - s_{\delta_n}(f)) = 0$.

5.2.26 Propoziție. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe (a, b) și limitele laterale

$$l_a = \lim_{x \searrow a} f(x), \quad l_b = \lim_{x \nearrow b} f(x)$$

există și sunt finite, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Demonstrație. Funcția f este integrabilă deoarece este suma a trei funcții integrabile

$$f = \tilde{f} + g + h,$$

unde $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția continuă

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} l_a & \text{dacă } x = a, \\ f(x) & \text{dacă } x \in (a, b), \\ l_b & \text{dacă } x = b, \end{cases}$$

iar $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcțiile monotone

$$g(x) = \begin{cases} f(a) - l_a & \text{dacă } x = a, \\ 0 & \text{dacă } x \in (a, b), \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (a, b), \\ f(b) - l_b & \text{dacă } x = b. \end{cases}$$

5.2.27 Definiție. Un punct $c \in (a, b)$ în care funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este discontinuă este numit *punct de discontinuitate de prima speță* dacă limitele laterale $\lim_{x \nearrow c} f(x)$, $\lim_{x \searrow c} f(x)$ există și sunt finite.

5.2.28 Teoremă. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă cu excepția unui număr finit de puncte, unde are discontinuități de prima speță, este integrabilă.

Demonstrație (Cazul a două puncte de discontinuitate). Fie x_1, x_2 punctele de discontinuitate, $a < x_1 < x_2 < b$. Conform propoziției anterioare f , este integrabilă pe $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$ și $[x_2, b]$. Funcția f fiind integrabilă pe $[a, x_1]$ și $[x_1, x_2]$ este integrabilă pe $[a, x_2]$ (v. pag. 149-23). Similar, f fiind integrabilă pe $[a, x_2]$ și $[x_2, b]$, este integrabilă pe $[a, b]$ (v. pag. 149-23).

5.2.29 Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și dacă $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care diferă de f într-un număr finit de puncte, atunci se poate arăta că g este integrabilă și

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

5.2.30 Teoremă (Teorema de medie).

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a).$$

Demonstrație. Funcția f fiind continuă pe $[a, b]$, este mărginită și își atinge marginile, adică există $u, v \in [a, b]$ astfel încât

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(u), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(v).$$

Relația (v. pag. 144-12)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

se mai poate scrie

$$f(u) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(v).$$

Funcția continuă f având proprietatea lui Darboux, există ξ între u și v astfel încât

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi).$$

5.2.31 Teoremă (Primitivăle unei funcții continue definite pe un interval).

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci pentru orice $c \in [a, b]$, funcția

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_c^x f(t) dt,$$

este o primitivă a lui f ,

$$F'(x) = f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b],$$

adică avem

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt = f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b].$$

Demonstrație. Fie $x_0 \in [a, b]$. Conform definiției derivatei

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_c^x f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0}.$$

Pentru fiecare $x \neq x_0$, există conform teoremei de medie ξ_x între x_0 și x astfel încât

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = f(\xi_x)(x - x_0)$$

și prin urmare

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(\xi_x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi_x) = f(x_0).$$

5.2.32 Teoremă (Formula Leibniz-Newton).

Dacă funcția integrabilă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă arbitrară a lui f .

Demonstrație. Fie $\delta_n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n\}$ un șir de diviziuni cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$. Conform teoremei lui Lagrange (pag. 95-25), există $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ astfel încât

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Utilizând ξ_i^n drept puncte intermediare pentru sumele Riemann, obținem

$$\sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} (F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)) = F(b) - F(a)$$

și prin urmare (v. pag. 142-5)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(f, \{\xi_i^n\}) = F(b) - F(a).$$

5.2.33 Teoremă (Formula de integrare prin părți).

Dacă funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt de clasă C^1 pe intervalul I , atunci

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx,$$

oricare ar fi $a, b \in I$.

Demonstrație. Utilizând formula Leibniz-Newton, obținem

$$\begin{aligned} f(x) g(x)|_a^b &= \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx = \int_a^b (f'(x) g(x) + f(x) g'(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx. \end{aligned}$$

5.2.34 Exercițiu. Să se calculeze integralele

$$\int_0^\pi x \cos x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^x dx, \quad \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părți, obținem:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x \cos x \, dx &= \int_0^\pi x (\sin x)' \, dx = x (\sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = \cos x \Big|_0^\pi = -1 - 1 = -2; \\
\int_0^1 x^2 e^x \, dx &= \int_0^1 x^2 (e^x)' \, dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x \, dx = e - 2 \int_0^1 x (e^x)' \, dx \\
&= e - 2x e^x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x \, dx = -e + 2 e^x \Big|_0^1 = e - 2; \\
\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/4} x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, dx - \int_0^{\pi/4} x \, dx = \int_0^{\pi/4} x (\operatorname{tg} x)' \, dx - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/4} \\
&= x \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + (\ln |\cos x|) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

5.2.35 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]` `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[x Cos[x], {x, 0, Pi}]` $\mapsto$ `Out[1]=-2`
`In[2]:=Integrate[x^2 Exp[x], {x, 0, 1}]` $\mapsto$ `Out[2]=-2+e`
`In[3]:=Integrate[x Tan[x]^2, {x, 0, Pi/4}]` $\mapsto$ `Out[3]=1/32 (8\pi-\pi^2-16 Log[2])`
`In[4]:=NIntegrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 2}]` $\mapsto$ `Out[4]=1.24706`

5.2.36 Teoremă (Prima metodă de schimbare de variabilă).

Fie funcțiile $[a, b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, unde $J \subset \mathbb{R}$ este un interval.

Dacă f este continuă și φ este derivabilă cu derivata continuă, atunci

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

Demonstrație. Dacă $F' = f$, atunci $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ și

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = (F \circ \varphi)(t) \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

5.2.37 Exercițiu. Să se calculeze integralele

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, dt, \quad \int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{t}} \, dt, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}} \, dx.$$

Rezolvare. Utilizând schimbarea de variabilă, obținem:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, dt &= 2 \int_1^4 e^{\sqrt{t}} (\sqrt{t})' \, dt = 2 \int_1^2 e^x \, dx = 2e^x \Big|_1^2 = 2(e^2 - e); \\
\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{t}} \, dt &= 2 \int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} (\sqrt{t})' \, dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{x+1} \, dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \, dx \\
&= 2(x - \ln(1+x)) \Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 + \ln 4 - 2 \ln(1+\sqrt{2}); \\
\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x+\sqrt{x}} \, dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t + \sin t} (\sin^2 t)' \, dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t + 1} \, dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) \, dt \\
&= 2(t + \cos t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

5.2.38 MATHEMATICA: Integrate[f[x], {x, a, b}]

In[1]:=Integrate[Exp[Sqrt[t]]/Sqrt[t], {t, 1, 4}] $\mapsto$ Out[1]=2(-1+e) e

In[2]:=Integrate[1/(1 + Sqrt[t]), {t, 1, 2}] $\mapsto$ Out[2]=-2+2 $\sqrt{2}$ +Log[4]-2Log[1+ $\sqrt{2}$]

In[3]:=Integrate[Sqrt[1-x]/(x+Sqrt[x]), {x, 1/2, 1}] $\mapsto$ Out[3]= $\frac{1}{2}(-2\sqrt{2}+\pi)$

5.2.39 Teoremă (A doua metodă de schimbare de variabilă).

Fie $[a, b] \xrightarrow{u} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcții. Dacă f este continuă, u este bijectivă, u și u^{-1} sunt derivabile cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(u(t)) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) (u^{-1})'(x) dx.$$

Demonstrație. Funcția $f \circ u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și deci admite primitive. Dacă $P' = f \circ u$, adică $P'(t) = f(u(t))$, atunci $P \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcției $f \cdot (u^{-1})'$,

$$(P \circ u^{-1})'(x) = P'(u^{-1}(x)) (u^{-1})'(x) = f(u(u^{-1}(x))) (u^{-1})'(x) = f(x) (u^{-1})'(x),$$

și prin urmare

$$\int_a^b f(u(t)) dt = P(t)|_a^b = P(b) - P(a) = P \circ u^{-1}(x)|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) (u^{-1})'(x) dx.$$

5.2.40 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{t}} dt.$$

Rezolvare. Aplicația $u : [1, 4] \rightarrow [2, 3]$, $u(t) = 1 + \sqrt{t}$, este bijectivă, $u^{-1}(x) = (1-x)^2$ și

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{t}} dt = 2 \int_2^3 \sqrt{x} (x-1) dx = 2 \int_2^3 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{8}{15} (6\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

5.2.41 MATHEMATICA: Integrate[f[x], {x, a, b}]

In[1]:=Integrate[Sqrt[1+Sqrt[t]], {t, 1, 4}] $\mapsto$ Out[1]=- $\frac{8}{15}(\sqrt{2}-6\sqrt{3})$

5.3 Integrale improprii

5.3.1 În cazul integralelor definite considerate în liceu, intervalul de integrare era mărginit și se știe că pentru ca o funcție să fie integrabilă, trebuie să fie mărginită. Vom arăta că noțiunea de integrală se poate extinde pentru a include și cazul în care intervalul de integrare este nemărginit și/sau funcția integrată este nemărginită.

5.3.2 În cazul unei serii definim

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^k a_n, \quad \sum_{n=-\infty}^k a_n := \lim_{m \rightarrow -\infty} \sum_{n=m}^k a_n$$

dacă limita există și este finită, adică dacă seria este *convergentă*. Prin analogie definim *integralele improprii* (de prima speță)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

dacă limita există și este finită, adică dacă integrala improprie este *convergentă* (C).

O integrală improprie neconvergentă este numită *divergentă* (D). Prin analogie cu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n := \lim_{\substack{m \rightarrow -\infty \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{n=m}^k a_n \quad \text{definim} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx$$

în cazul în care limita există și este finită, adică integrala improprie este *convergentă*.

5.3.3 Exemplu (v. Fig. 5.3).

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-x})|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

5.3.4 Exemplu (v. Fig. 5.4).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} (\arctg b - \arctg a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

5.3.5 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Exp[-x], {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[1]=1`

`In[2]:=Integrate[1/(1+x^2), {x, -Infinity, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[2]=π`

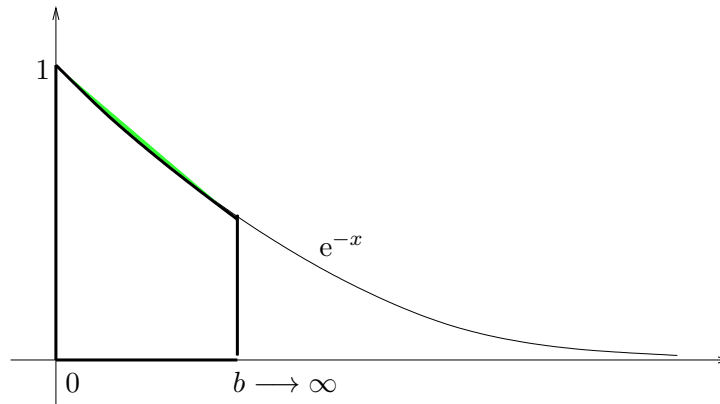


Figura 5.3: Calculul integralei $\int_0^\infty e^{-x} dx$.

5.3.6 Știm că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & \text{dacă } \lambda > 1, \\ \text{divergentă} & \text{dacă } \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Fie $a > 0$ fixat. Deoarece pentru $\lambda \neq 1$,

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{dacă } \lambda > 1, \\ \infty & \text{dacă } \lambda < 1, \end{cases}$$

și

$$\int_a^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = \infty$$

rezultă că *integrala improprie*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda} dx \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & \text{dacă } \lambda > 1, \\ \text{divergentă} & \text{dacă } \lambda \leq 1. \end{cases}$$

5.3.7 MATHEMATICA: NIntegrate[f[x], {x, a, b}]

In[1]:=NIntegrate[1/x^2, {x, 1, Infinity}] $\mapsto$ Out[1]=1

5.3.8 O serie $\sum_{k=0}^\infty a_k$ este numită absolut convergentă dacă seria $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$ este convergentă. Se știe că orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă și că, în general, este mai ușor de studiat absolut convergența unei serii decât direct convergența ei. Spunem că integrala improprie

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

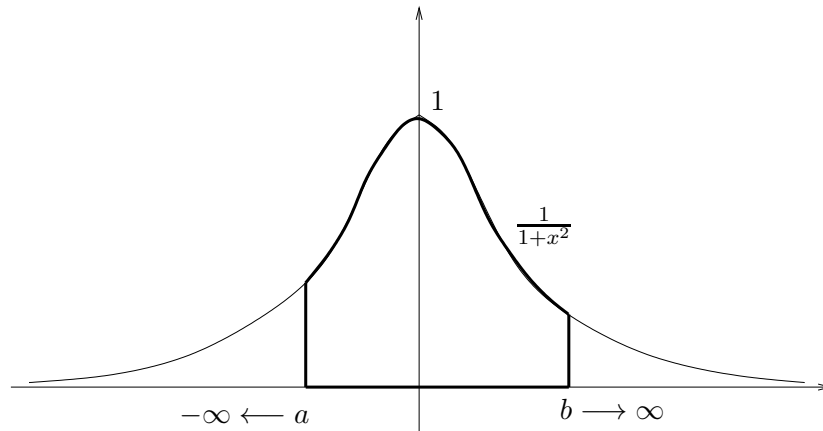


Figura 5.4: Calculul integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

este *absolut* convergentă (AC) dacă integrala

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

este convergentă.

5.3.9 Teoremă Orice integrală improprie absolut convergentă este convergentă.

5.3.10 Criteriul comparației. Dacă pentru seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 \leq a_n \leq b_n$, oricare ar fi $n \geq n_0$, atunci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ C} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ C}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ D} \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ D}.$$

Similar, dacă pentru funcțiile continue $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ există $b \geq a$ astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in [b, \infty)$, atunci:

$$\int_a^{\infty} g(x) dx \text{ C} \implies \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ C}, \quad \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ D} \implies \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ D}.$$

5.3.11 Exercițiu. Să se arate că integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

este convergentă.

Rezolvare. Convergența integralei rezultă din relația $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, care are loc oricare ar fi $x \in [1, \infty)$, și din convergența integralei $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$.

5.3.12 Exercițiu. Să se arate că integrala

$$\int_a^\infty x^\lambda e^{-x} dx,$$

unde $a > 0$, este convergentă, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Fie n un număr natural astfel încât $n > \lambda + 1$. Afirmatia rezultă din relația

$$x^\lambda e^{-x} = \frac{x^\lambda}{e^x} = \frac{x^\lambda}{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n} < \frac{x^\lambda}{\frac{1}{n!}x^n} = \frac{n!}{x^{n-\lambda}},$$

adevărată oricare ar fi $x > 0$, și din convergența integralei $\int_a^\infty \frac{1}{x^{n-\lambda}} dx$.

5.3.13 Exercițiu. Fie $P(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$, $Q(x) = \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m$ polinoame cu coeficienți reali și fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $Q(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \geq a$. Integrala improprie

$$\int_a^\infty \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m} dx \quad \text{este convergentă dacă } m > n+1.$$

Rezolvare. Funcția $f(x) = x^{m-n} \frac{P(x)}{Q(x)}$ este mărginită deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$. Rezultă că există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, oricare ar fi $x \in [a, \infty)$, și prin urmare

$$\left| \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n}{\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \dots + \beta_m} \right| \leq M \frac{1}{x^{m-n}}.$$

5.3.14 Teoremă. Dacă funcțiile continue $f, g : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sunt astfel încât limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ este finită și nenulă, atunci integralele improprii

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \text{și} \quad \int_a^\infty g(x) dx$$

au aceeași natură (sunt ambele convergente sau ambele divergente).

Demonstrație. Fie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$. Din definiția limitei, rezultă că există $b > a$ astfel încât

$$\frac{1}{2}\lambda < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\lambda, \quad \text{oricare ar fi } x \in (b, \infty),$$

adică

$$\frac{1}{2}\lambda g(x) < f(x) < \frac{3}{2}\lambda g(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in (b, \infty),$$

ceea ce arată că integralele $\int_b^\infty f(x) dx$ și $\int_b^\infty g(x) dx$ au aceeași natură. Dar

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx \quad \text{și} \quad \int_a^\infty g(x) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_b^\infty g(x) dx.$$

5.3.15 Funcția

$$f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

nu este integrabilă pe $[0, 1]$ deoarece nu este mărginită,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty,$$

dar (v. Fig. 5.5)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0} 2\sqrt{x}|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{a}) = 2.$$

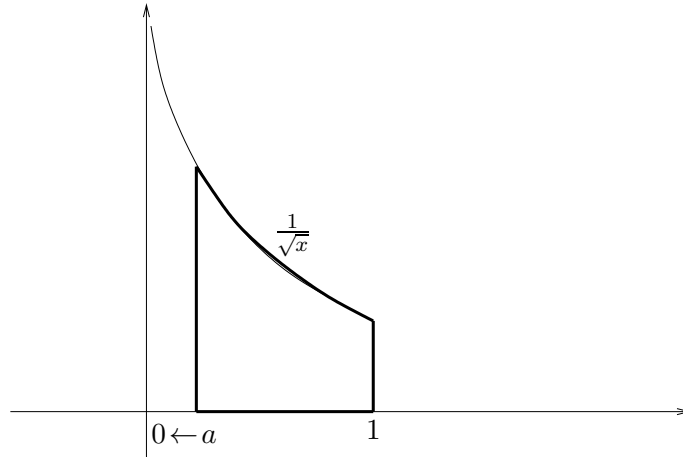


Figura 5.5: Calculul integralei $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

5.3.16 Definiție. Fie $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție nemărginită în vecinătatea lui a , integrabilă pe $[c, b]$, oricare ar fi $c \in (a, b)$. Dacă limita există și este finită, definim

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx$$

și spunem că integrala este *convergentă* (C). În caz contrar spunem că integrala este *divergentă* (D). Similar, pentru $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătatea lui b , integrabilă pe $[a, c]$, oricare ar fi $c \in (a, b)$, definim în caz de convergență

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx.$$

5.3.17 Exercițiu. Să se arate că

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda} dx \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & \text{dacă } \lambda < 1, \\ \text{divergentă} & \text{dacă } \lambda \geq 1, \end{cases}$$

și

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda} dx \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergentă} & \text{dacă } \lambda < 1, \\ \text{divergentă} & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Avem

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)} dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b \frac{1}{(x-a)} dx = \lim_{c \rightarrow a} \ln(x-a)|_c^b = \lim_{c \rightarrow a} \ln \frac{b-a}{c-a} = \infty$$

și

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda} dx = \frac{1}{1-\lambda} \lim_{c \rightarrow a} [(b-a)^{1-\lambda} - (c-a)^{1-\lambda}] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \text{dacă } \lambda < 1, \\ \infty & \text{dacă } \lambda > 1, \end{cases}$$

în cazul $\lambda \neq 1$.

5.3.18 Propoziție (*Criteriul comparației*).

Dacă funcțiile continue $f, g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in (a, b]$, atunci:

$$\int_a^b g(x) dx < \infty \implies \int_a^b f(x) dx < \infty,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \infty \implies \int_a^b g(x) dx = \infty.$$

5.3.19 Exercițiu. Să se studieze convergența integralei

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Rezolvare. Funcția continuă $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x/\sqrt{1-x^2}$, este mărginită pe $[0, 1]$. Rezultă că există $M > 0$ astfel încât $f(x) \leq M$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

Integrala din exercițiu este convergentă deoarece

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{M}{(1-x)^{1/2}}$$

și integrala $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}} dx$ este convergentă.

5.3.20 MATHEMATICA: `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=NIntegrate[Exp[x]/Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 1}]` $\mapsto$ `Out[1]=3.10438`

5.3.21 Exercițiu. Să se studieze convergența integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Rezolvare. În acest caz, atât intervalul de integrare cât și funcția de integrat sunt nemărginite. Integrala este convergentă deoarece este o sumă de integrale convergente:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

5.3.22 MATHEMATICA: `NIntegrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=NIntegrate[Exp[-x]/Sqrt[x], {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[1]=1.77245`

5.4 Integrale în sensul valorii principale

5.4.1 Dacă $a < 0 < b$, atunci integrala improprie

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx$$

nu este convergentă. Funcția este nemărginită în jurul lui 0 și limita

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\delta}^b \frac{1}{x} dx \right) = \ln \left| \frac{b}{a} \right| + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \ln \frac{\varepsilon}{\delta}$$

nu există. Considerând însă o trecere la limită mai puțin restrictivă (cazul $\varepsilon = \delta$),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx \right) = \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$$

Spunem că integrala este *convergentă în sensul valorii principale* și scriem

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx \right) = \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$$

5.4.2 Integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} dx,$$

unde n un număr natural, nu este convergentă deoarece limita

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \Big|_a^b = \frac{1}{2n+2} \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} (b^{2n+2} - a^{2n+2})$$

nu există. Există însă limita mai puțin restrictivă

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0.$$

Spunem că integrala este *convergentă în sensul valorii principale* și scriem

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0.$$

5.5 Integrale cu parametru

5.5.1 Teoremă. Dacă funcția

$$F : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

este continuă, atunci funcția

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_c^d F(t, x) dx,$$

definită cu ajutorul unei integrale cu parametru este continuă, adică avem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0), \quad (5.2)$$

oricare ar fi $t_0 \in [a, b]$.

Demonstrație. Fie $t_0 \in [a, b]$ arbitrar și $\varepsilon > 0$. Funcția F fiind continuă pe mulțimea compactă $[a, b] \times [c, d]$, este uniform continuă (v. pag. 82-11). Rezultă că pentru $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât

$$\|(t, x) - (t', x')\| < \delta \implies |F(t, x) - F(t', x')| < \varepsilon.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= \left| \int_c^d F(t, x) dx - \int_c^d F(t_0, x) dx \right| \\ &= \left| \int_c^d [F(t, x) - F(t_0, x)] dx \right| \leq \int_c^d |F(t, x) - F(t_0, x)| dx \end{aligned}$$

și $|(t, x) - (t_0, x)| = \sqrt{(t - t_0)^2 + (x - x)^2} = |t - t_0|$, are loc relația

$$|t - t_0| < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon(d - c),$$

care arată că funcția f este continuă în punctul t_0 .

5.5.2 Relația (5.2) se mai poate scrie

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_c^d F(t, x) dx = \int_c^d [\lim_{t \rightarrow t_0} F(t, x)] dx.$$

Teorema precedentă prezintă condiții suficiente ca limita să comute cu integrala.

5.5.3 Teoremă. Dacă funcția continuă

$$F : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto F(t, x)$$

este derivabilă partial în raport cu t și

$$\frac{\partial F}{\partial t} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

este continuă, atunci funcția

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_c^d F(t, x) dx,$$

este derivabilă în (a, b) , are derivata continuă și

$$f'(t) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx. \quad (5.3)$$

Demonstrație. Fie $t_0 \in [a, b]$ arbitrar. Funcția $\Phi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{F(t, x) - F(t_0, x)}{t - t_0} & \text{dacă } t \neq t_0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x) & \text{dacă } t = t_0, \end{cases}$$

este continuă. Din teorema precedentă rezultă că funcția

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \int_c^d \Phi(t, x) dx,$$

este continuă și prin urmare $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0)$, adică avem relația

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_c^d \frac{F(t, x) - F(t_0, x)}{t - t_0} dx = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, x) dx.$$

Dar

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_c^d \frac{F(t, x) - F(t_0, x)}{t - t_0} dx.$$

Continuitatea lui f' rezultă pe baza teoremei precedente din continuitatea lui Φ .

5.5.4 Regula lui Leibniz de derivare a integralelor cu parametru se mai scrie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_c^d F(t, x) dx = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx.$$

Teorema prezintă condiții suficiente pentru ca derivata să comute cu integrala.

5.5.5 Teoremă (Leibniz). *Dacă funcția continuă*

$$F : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

este derivabilă parțial în raport cu t ,

$$\frac{\partial F}{\partial t} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

este continuă și dacă

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d], \quad \psi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

sunt două funcții derivabile pe (a, b) , atunci funcția

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} F(t, x) dx,$$

este derivabilă în (a, b) și

$$f'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx + F(t, \psi(t)) \psi'(t) - F(t, \varphi(t)) \varphi'(t). \quad (5.4)$$

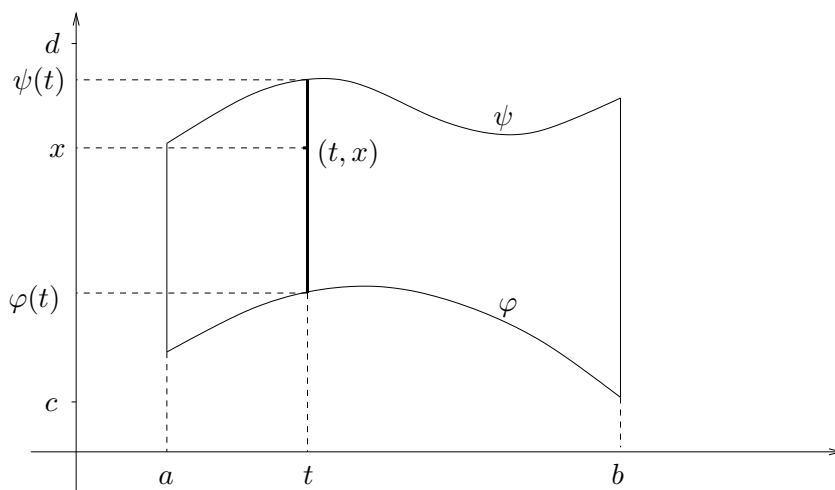


Figura 5.6: Derivarea integralelor cu parametru.

Demonstrație. Știm că în cazul unei funcții continue $g : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ avem

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(t) dt = g(x),$$

oricare ar fi $x_0 \in [\alpha, \beta]$ fixat. Funcția de trei variabile $\Phi : [a, b] \times [c, d] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(t, y, z) = \int_y^z F(t, x) dx = \int_{t_0}^z F(t, x) dx - \int_{t_0}^y F(t, x) dx,$$

unde $t_0 \in (a, b)$ este un punct fixat, admite derivate parțiale continue

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, y, z) = \int_y^z \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Phi(t, y, z) = -F(t, y), \quad \frac{\partial}{\partial z} \Phi(t, y, z) = F(t, z)$$

și prin urmare este diferențiabilă în $[a, b] \times (c, d) \times (c, d)$. Deoarece

$$f(t) = \Phi(t, \phi(t), \psi(t)),$$

din formula de derivare a funcțiilor compuse, rezultă

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \phi(t), \psi(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t, \phi(t), \psi(t)) \phi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(t, \phi(t), \psi(t)) \psi'(t) \\ &= \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dx + F(t, \psi(t)) \psi'(t) - F(t, \varphi(t)) \varphi'(t). \end{aligned}$$

5.5.6 Regula generală (Leibniz) de derivare a integralelor cu parametru se mai scrie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} F(t, x) dx = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx + F(t, \psi(t)) \psi'(t) - F(t, \varphi(t)) \varphi'(t).$$

5.5.7 Definiție. Fie $F : [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Spunem că integrala

$$\int_c^\infty F(t, x) dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d F(t, x) dx$$

este *uniform convergentă* în $[a, b]$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left| \int_\alpha^\beta F(t, x) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} t \in [a, b], \\ [\alpha, \beta] \subset [M, \infty). \end{matrix}$$

5.5.8 Exercițiu. Să se arate că dacă $c > 0$, integrala improprie

$$\int_c^\infty \frac{\sin x}{t^2 + x^2} dx$$

este uniform convergentă în $[a, b]$, oricare ar fi intervalul $[a, b]$.

Rezolvare. Afirmatia rezultă din relația

$$\left| \frac{\sin x}{t^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

și din convergența integralei improprii $\int_c^\infty \frac{1}{x^2} dx$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_M^\infty \frac{1}{x^2} dx < \varepsilon$. Dacă $[\alpha, \beta] \subset [M, \infty)$, atunci

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{t^2 + x^2} dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{\sin x}{t^2 + x^2} \right| dx \leq \int_M^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \varepsilon.$$

5.5.9 Teoremă. Dacă funcția $F : [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și dacă integrala

$$\int_c^{\infty} F(t, x) dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d F(t, x) dx$$

este uniform convergentă, atunci funcția

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_c^{\infty} F(t, x) dx,$$

este continuă și prin urmare

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_c^{\infty} F(t, x) dx = \int_c^{\infty} \left[\lim_{t \rightarrow t_0} F(t, x) \right] dx, \text{ oricare ar fi } t_0 \in [a, b].$$

5.5.10 Teoremă. Dacă funcția continuă $F : [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în raport cu t , $\frac{\partial F}{\partial t} : [a, b] \times [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, integrala improprie

$$\int_c^{\infty} F(t, x) dx \quad \text{este convergentă pentru } t \in (a, b)$$

și integrala improprie

$$\int_c^{\infty} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx \quad \text{este uniform convergentă pentru } t \in (a, b),$$

atunci funcția

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_c^{\infty} F(t, x) dx,$$

este derivabilă în (a, b) și

$$f'(t) = \int_c^{\infty} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx, \tag{5.5}$$

adică

$$\frac{d}{dt} \int_c^{\infty} F(t, x) dx = \int_c^{\infty} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) dx.$$

5.6 Funcția Γ a lui Euler

5.6.1 Exercițiu. Să se arate că integrala improprie

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

este convergentă, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Fie $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n > x$. Deoarece (v. pag. 64-11)

$$0 < e^{-t} t^{x-1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \leq \begin{cases} t^{x-1} & \text{pentru orice } t \in (0, 1], \\ \frac{n!}{t^{n-x+1}} & \text{pentru orice } t \in [1, \infty), \end{cases}$$

și integralele

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{n-x+1}}$$

sunt convergente, rezultă că integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

este convergentă, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

5.6.2 Se poate arăta că funcția definită cu ajutorul unei integrale cu parametru

$$\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

este o funcție continuă.

5.6.3 Teoremă. *Avem:*

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x), & \text{oricare ar fi } x \in (0, \infty); \\ \Gamma(n+1) &= n!, & \text{oricare ar fi } n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Integrând prin părți, obținem

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -\int_0^{\infty} (e^{-t})' t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} (e^{-t}) t^{x-1} dt = x \Gamma(x).$$

Avem

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad \text{și} \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n!.$$

5.6.4 Se poate arăta că

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad \text{oricare ar fi } x \in (0, 1).$$

5.6.5 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

5.6.6 Definiție. Funcția $\Gamma: \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt & \text{dacă } x > 0, \\ \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} & \text{dacă } x > -n \text{ pentru } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

se numește *funcția gamma a lui Euler*.

5.6.7 Graficul funcției Γ se poate obține utilizând **MATHEMATICA**:

```
In[1]:=Plot[Gamma[x], {x, -3, 3}]
```

și este prezentat în figura 5.7 .

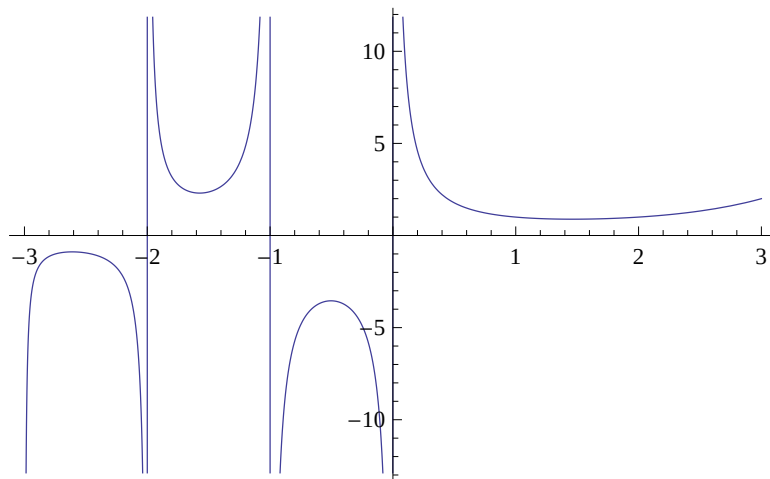


Figura 5.7: Funcția gamma a lui Euler.

Capitolul 6

Integrale curbilinii

6.1 Integrala curbilinie de primul tip

6.1.1 Definiție. Prin *drum de clasă C^1* în $\mathbb{R}^2$ se înțelege o aplicație de forma

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

cu $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile și cu derivată continuă.

Drumul γ este numit *drum închis* dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$,

adică $\varphi(a) = \varphi(b)$ și $\psi(a) = \psi(b)$.

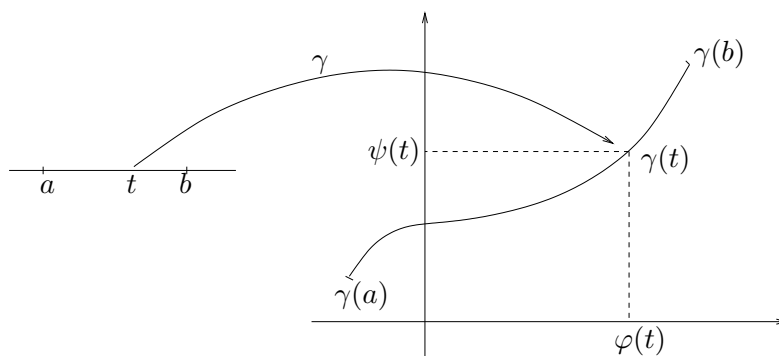


Figura 6.1: Drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$.

6.1.2 Exemple.

a) Fie $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ puncte fixate. Aplicația

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(t) &= (1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) \\ & & &= ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1) \\ & & &= (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)),\end{aligned}$$

este drum de clasă C^1 . Imaginea lui este segmentul ce unește (x_0, y_0) cu (x_1, y_1) .

b) Fie $r \in (0, \infty)$ și fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punct fixat. Aplicația

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(t) &= (x_0, y_0) + r(\cos t, \sin t) \\ & & &= (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t),\end{aligned}$$

este drum de clasă C^1 . Imaginea lui este cercul de rază r cu centrul în (x_0, y_0) .

c) Fie $a, b \in (0, \infty)$. Aplicația

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t),$$

este drum de clasă C^1 . Imaginea lui este elipsa $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

6.1.3 Definiție. Spunem că drumurile $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ și $\gamma_0 : [a_0, b_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 sunt *echivalente* dacă există o aplicație

$$\chi : [a_0, b_0] \longrightarrow [a, b]$$

bijectivă, derivabilă și cu $\chi'(t) \neq 0$, oricare ar fi $t \in [a_0, b_0]$, astfel încât

$$\gamma_0(t) = \gamma(\chi(t)), \quad \text{oricare ar fi } t \in [a_0, b_0].$$

6.1.4 Relația astfel definită este o relație de echivalență pe mulțimea tuturor drumurilor de clasă C^1 care permite împărțirea ei în clase. Fiecare clasă de drumuri echivalente este numită *curbă*. Despre drumurile aparținând unei curbe spunem că sunt reprezentanți sau *parametrizări* ale curbei.

6.1.5 Exemplu. Drumul $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este echivalent cu

$$\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_0(t) = \gamma((1-t)a + tb).$$

6.1.6 Fie $(\delta_n)_{n \geq 1}$ un șir de diviziuni

$$\delta_n = \{t_i^n\}_{i=0, k_n}, \quad a = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_{k_n-1}^n < t_{k_n}^n = b,$$

cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$. Un drum de clasă C^1 de forma

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, \psi(t)),$$

poate fi aproximat cu drumul poligonal γ_n cu vârfurile

$$\gamma(a) = \gamma(t_0^n), \quad \gamma(t_1^n), \quad \gamma(t_2^n), \quad \dots, \quad \gamma(t_{k_n-1}^n), \quad \gamma(b) = \gamma(t_{k_n}^n)$$

alegând n suficient de mare. Lungimea drumului poligonal γ_n este

$$l(\gamma_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \sqrt{(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 + (\psi(t_i^n) - \psi(t_{i-1}^n))^2}.$$

Deoarece, din teorema creșterilor finite rezultă că există $\xi_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$ cu

$$\psi(t_i^n) - \psi(t_{i-1}^n) = \psi'(\xi_i^n) (t_i^n - t_{i-1}^n),$$

lungimea lui γ_n se poate scrie sub forma sumei Riemann

$$l(\gamma_n) = \sum_{i=1}^{k_n} \sqrt{1 + (\psi'(\xi_i^n))^2} (t_i^n - t_{i-1}^n)$$

corespunzătoare funcției $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{1 + (\psi'(t))^2}$ și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \sqrt{1 + (\psi'(\xi_i^n))^2} (t_i^n - t_{i-1}^n) = \int_a^b \sqrt{1 + (\psi'(t))^2} dt.$$

În cazul unui drum de clasă C^1 oarecare $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, se poate arăta că limita lungimilor drumurilor poligonale corespunzătoare este

$$\int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

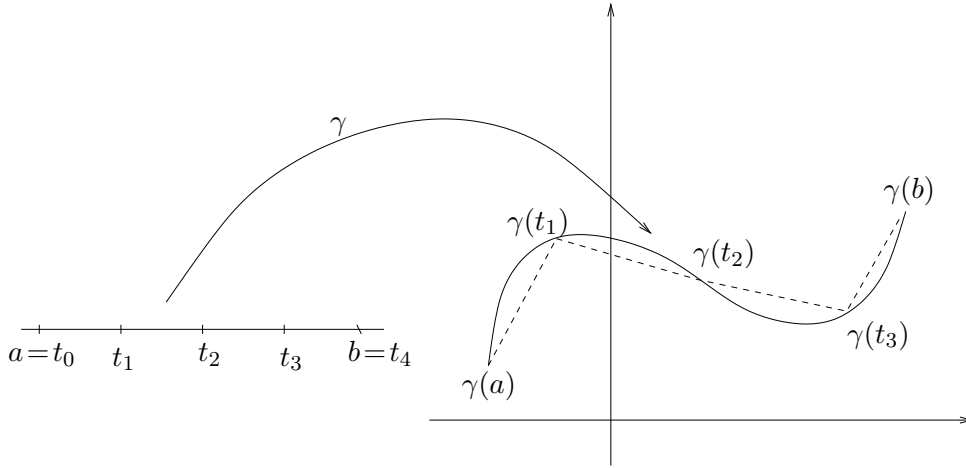


Figura 6.2: Aproximarea cu un drum poligonal.

6.1.7 Definiție. Prin *lungimea* drumului de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

se înțelege numărul

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

6.1.8 Exemplu. În cazul drumului circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t),$$

avem $\varphi(t) = x_0 + r \cos t$, $\psi(t) = y_0 + r \sin t$ și

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

6.1.9 Pentru a aproxima masa unui fir material descris de un drum de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

plecând de la densitatea firului (de exemplu, în g/cm) descrisă de o funcție continuă

$$\varrho : \{ (\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [a, b] \} \longrightarrow \mathbb{R},$$

putem considera partiții ale firului corespunzătoare unor diviziuni $\delta_n = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_{k_n}^n\}$,

$$\gamma(a) = \gamma(t_0^n), \quad \gamma(t_1^n), \quad \gamma(t_2^n), \quad \dots, \quad \gamma(t_{k_n-1}^n), \quad \gamma(b) = \gamma(t_{k_n}^n)$$

și aproxima pe fiecare segment $\gamma(t_{i-1}^n), \gamma(t_i^n)$ densitatea cu o valoare intermediară $\varrho(\varphi(c_i^n), \psi(c_i^n))$, unde $c_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$. Se poate arăta că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\| = 0$, atunci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} \varrho(\varphi(c_i^n), \psi(c_i^n)) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \\ = \int_a^b \varrho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

6.1.10 Definiție. Fie un drum de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

și o funcție continuă (câmp scalar) definită pe imaginea drumului

$$f : \{ (\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [a, b] \} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Prin *integrala curbilinie* a lui f de-a lungul drumului γ se înțelege numărul

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

6.1.11 Exemplu. În cazul drumului $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, avem

$$\int_{\gamma} x \, ds = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\theta} \, d\theta = \frac{1}{12} (1 + 4\theta)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

6.1.12 Propoziție. Dacă drumurile de clasă C^1 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ și $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sunt echivalente și dacă $f : \{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\gamma_0} f \, ds.$$

Demonstrație. Conform ipotezei, există o aplicație $\chi : [a_0, b_0] \rightarrow [a, b]$ bijectivă, derivabilă și cu $\chi'(t) \neq 0$, oricare ar fi $t \in [a_0, b_0]$, astfel încât

$$\gamma_0(t) = \gamma(\chi(t)), \quad \text{oricare ar fi } t \in [a_0, b_0].$$

Notând $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $\varphi_0(t) = \varphi(\chi(t))$ și $\psi_0(t) = \psi(\chi(t))$, avem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f \, ds &= \int_{a_0}^{b_0} f(\varphi_0(t), \psi_0(t)) \sqrt{(\varphi'_0(t))^2 + (\psi'_0(t))^2} \, dt \\ &= \int_{a_0}^{b_0} f(\varphi(\chi(t)), \psi(\chi(t))) \sqrt{(\varphi'(\chi(t)))^2 + (\psi'(\chi(t)))^2} |\chi'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b f(\varphi(\theta), \psi(\theta)) \sqrt{(\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2} \, d\theta = \int_{\gamma} f \, ds. \end{aligned}$$

6.1.13 Fiecare curbă este o clasă de drumuri echivalente. Putem defini integrala unei funcții de-a lungul unei curbe folosind o parametrizare particulară a curbei pentru că valoarea integralei nu depinde de parametrizarea aleasă.

6.1.14 Definiție. Prin *lungimea* drumului în $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

se înțelege numărul

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + (\gamma'_3(t))^2} \, dt.$$

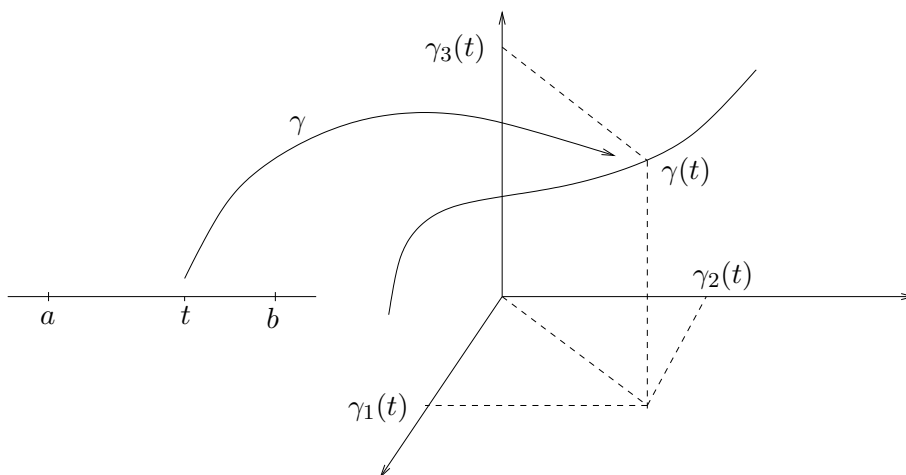
6.1.15 Definiție. Fie un drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

și o funcție continuă (câmp scalar) definită pe imaginea $\gamma([a, b])$ a drumului

$$f : \{ (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \mid t \in [a, b] \} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Prin *integrala curbilinie* a lui f de-a lungul drumului γ se înțelege numărul

Figura 6.3: Drum în $\mathbb{R}^3$.

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + (\gamma'_3(t))^2} dt.$$

6.2 Integrala curbilinie de al doilea tip

6.2.1 Definiție. Fie un drum de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

și o funcție continuă (câmp vectorial) definită pe imaginea drumului

$$\vec{F} : \{ (\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [a, b] \} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Prin *integrala curbilinie* a lui $\vec{F}$ de-a lungul drumului γ se înțelege numărul

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt.$$

Folosind o notație alternativă, ultima relație se mai scrie

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt.$$

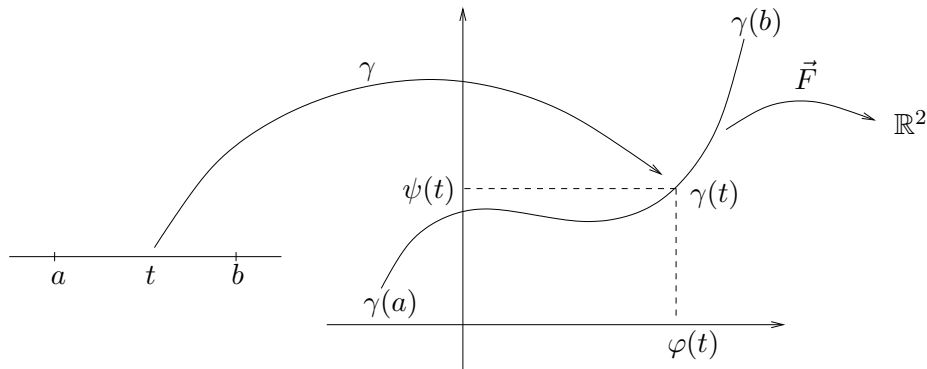


Figura 6.4: Integrala unui câmp vectorial definit de-a lungul unui drum.

6.2.2 Exemplu. În cazul drumului $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t)$, avem

$$\int_{\gamma} y^2 dx - x^2 dy = - \int_0^{2\pi} (2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t) dt = -4\pi.$$

6.2.3 Integrala curbilinie de al doilea tip permite calculul *lucrului mecanic* efectuat de o forță care deplasează un punct material de-a lungul unui drum.

6.2.4 Definiție. Spunem că drumurile $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ și $\gamma_0: [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 sunt *echivalente cu păstrarea sensului* dacă există o aplicație $\chi: [a_0, b_0] \rightarrow [a, b]$ bijectivă, derivabilă și cu $\chi'(t) > 0$, oricare ar fi $t \in [a_0, b_0]$, astfel încât

$$\gamma_0(t) = \gamma(\chi(t)), \quad \text{oricare ar fi } t \in [a_0, b_0].$$

6.2.5 Propoziție. Dacă drumurile de clasă C^1 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ și $\gamma_0: [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sunt echivalente cu păstrarea sensului și dacă

$$\vec{F}: \{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

este o funcție continuă, atunci

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma_0} P dx + Q dy.$$

Demonstrație. Conform ipotezei, există o aplicație $\chi: [a_0, b_0] \rightarrow [a, b]$ bijectivă, derivabilă și cu $\chi'(t) > 0$, oricare ar fi $t \in [a_0, b_0]$, astfel încât

$$\gamma_0(t) = \gamma(\chi(t)), \quad \text{oricare ar fi } t \in [a_0, b_0].$$

Notând $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $\varphi_0(t) = \varphi(\chi(t))$ și $\psi_0(t) = \psi(\chi(t))$, avem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} P dx + Q dy &= \int_{a_0}^{b_0} [P(\varphi_0(t), \psi_0(t)) \varphi'_0(t) + Q(\varphi_0(t), \psi_0(t)) \psi'_0(t)] dt \\ &= \int_{a_0}^{b_0} [P(\varphi(\chi(t)), \psi(\chi(t))) \varphi'(\chi(t)) + Q(\varphi(\chi(t)), \psi(\chi(t))) \psi'(\chi(t))] \chi'(t) dt \\ &= \int_a^b [P(\varphi(\theta), \psi(\theta)) \varphi'(\theta) + Q(\varphi(\theta), \psi(\theta)) \psi'(\theta)] d\theta = \int_{\gamma} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

6.2.6 Propoziție. Dacă $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, este un drum de clasă C^1 ,

$$\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) = (\varphi(a+b-t), \psi(a+b-t)) = \gamma(a+b-t),$$

este opusul lui γ (adică drumul γ parcurs în sens invers) și

$$\vec{F}: \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

o funcție continuă, atunci

$$\int_{\tilde{\gamma}} P dx + Q dy = - \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

Demonstrație. Utilizând schimbarea de variabilă $\theta = a + b - t$, obținem

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} P dx + Q dy &= \int_a^b [P(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) \tilde{\varphi}'(t) + Q(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) \tilde{\psi}'(t)] dt \\ &= \int_b^a [P(\varphi(\theta), \psi(\theta)) \varphi'(\theta) + Q(\varphi(\theta), \psi(\theta)) \psi'(\theta)] d\theta \\ &= - \int_{\gamma} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

6.2.7 Definiție. Fie un drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^3$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

și o funcție continuă (câmp vectorial) definită pe imaginea drumului

$$\vec{F}: \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Prin *integrala curbilinie* a lui $\vec{F}$ de-a lungul drumului γ se înțelege numărul

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [P(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + Q(\gamma(t)) \gamma'_2(t) + R(\gamma(t)) \gamma'_3(t)] dt.$$

Folosind o notație alternativă, ultima relație se mai scrie

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_a^b [P(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + Q(\gamma(t)) \gamma'_2(t) + R(\gamma(t)) \gamma'_3(t)] dt.$$

Capitolul 7

Integrale duble

7.1 Definiție și proprietăți

7.1.1 Definiție. Fie dreptunghiul $A = [a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d \}$.

Plecând de la o diviziune a intervalului $[a, b]$

$$\delta = \{x_i\}_{i=0, \overline{n}}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

și o diviziune a intervalului $[c, d]$

$$\tilde{\delta} = \{y_j\}_{j=0, \overline{k}}, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1} < y_k = d,$$

obținem o *diviziune a dreptunghiului* A ,

$$\Delta = \{A_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, k}}}, \quad A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Diametrul celui mai mare dintre dreptunghiurile diviziunii

$$\|\Delta\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

se numește *norma diviziunii* Δ .

7.1.2 Definiție. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe dreptunghiul $A = [a, b] \times [c, d]$,

$\Delta = \{A_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, k}}}$ o diviziune a lui A și fie $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, k}}}$ un

sistem de puncte intermediare asociat diviziunii, adică astfel încât

$(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in A_{ij}$, oricare ar fi i, j . Prin *sumă Riemann* asociată

funcției f , diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$

se înțelege numărul (v. Fig. 7.1)

$$\sigma_{\delta}(f, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}).$$

În cazul în care $f(x, y) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in A$, numărul $\sigma_{\Delta}(f, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\})$ reprezintă suma volumelor unor prisme.

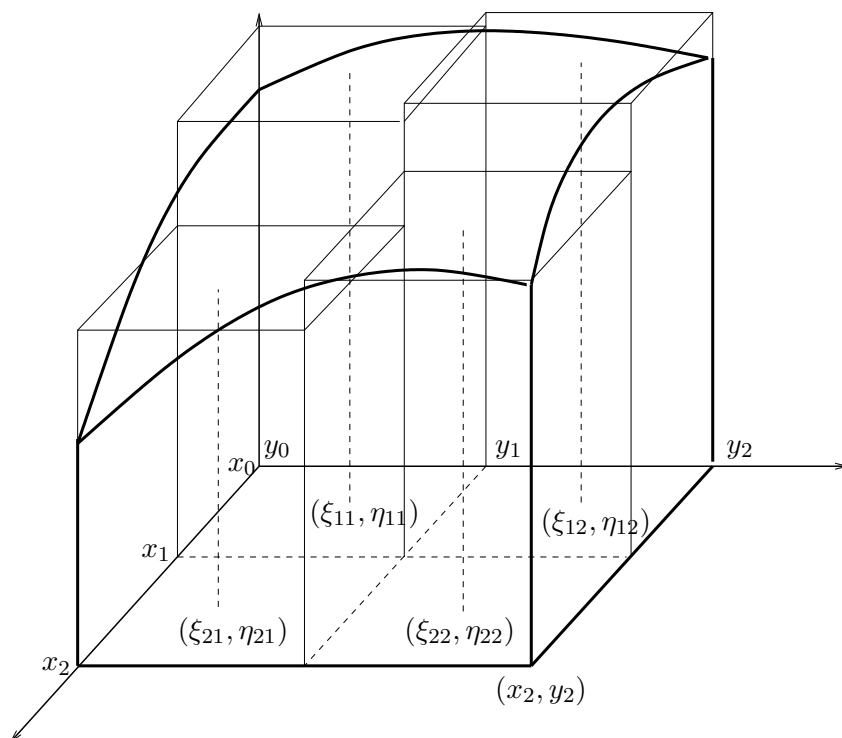


Figura 7.1: Aproximarea cu suma volumelor unor prisme.

7.1.3 Definiție. Spunem că funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (Riemann) pe A dacă există un număr $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\nu > 0$ astfel încât relația

$$|\sigma_{\delta}(f, \{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}) - I_f| < \varepsilon$$

are loc pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \nu$ și pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ij}, \eta_{ij})\}$. Numărul I_f se

numește *integrala* funcției f pe A și se utilizează pentru el notația

$$\iint_A f(x, y) dx dy.$$

7.1.4 Teoremă. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă (Riemann) pe A dacă și numai dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ și pentru orice alegere a sistemelor de puncte intermediare asociate $\{(\xi_{ij}^n, \eta_{ij}^n)\}$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_\delta(f, \{(\xi_{ij}^n, \eta_{ij}^n)\}) = I.$$

În cazul în care f este integrabilă, avem $I = \iint_A f(x, y) dx dy$.

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 142-5).

7.1.5 Propoziție.

a) Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci funcția αf este integrabilă și

$$\iint_A (\alpha f)(x, y) dx dy = \alpha \iint_A f(x, y) dx dy.$$

b) Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci funcțiile $f \pm g$ sunt integrabile și

$$\iint_A (f \pm g)(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy \pm \iint_A g(x, y) dx dy.$$

Demonstrație. Similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 143-6).

7.1.6 Se poate arăta că:

- 1) O funcție integrabilă pe A este integrabilă pe orice dreptunghi $B \subset A$;
- 2) Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci fg este funcție integrabilă;
- 3) Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

7.1.7 Propoziție.

a) Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $f(x, y) \geq 0$, oricare ar fi $(x, y) \in A$, atunci

$$\iint_A f(x, y) dx dy \geq 0.$$

b) Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile și $f(x, y) \leq g(x, y)$, oricare ar fi $(x, y) \in A$, atunci

$$\iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy.$$

c) Dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci

$$\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy.$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 143-8).

7.1.8 Definiție. Spunem că $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă există $M \in \mathbb{R}$ încât

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in A.$$

În caz contrar, spunem că f este *nemărginită*.

7.1.9 Teoremă. Dacă funcția $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci este mărginită.

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 144-11).

7.1.10 Definiție. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\Delta = \{A_{ij}\}_{i=1, n \atop j=1, k}$

o diviziune a dreptunghiului A . Sumele

$$s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad \text{unde } m_{ij} = \inf_{(x,y) \in A_{ij}} f(x, y),$$

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad \text{unde } M_{ij} = \sup_{(x,y) \in A_{ij}} f(x, y),$$

se numesc *suma Darboux inferioară* și respectiv, *suma Darboux superioară*.

7.1.11 Definiție. Fie dreptunghiul $A = [a, b] \times [c, d]$ și diviziunile

$$\Delta = \{A_{ij}\}_{i=1, n \atop j=1, k}, \quad \Delta' = \{A'_{ij}\}_{i=1, n' \atop j=1, k'},$$

obținute plecând de la diviziunile $\delta = \{x_i\}_{i=0, n}$, $\delta' = \{x'_i\}_{i=0, n'}$ ale lui $[a, b]$ și de la diviziunile $\tilde{\delta} = \{y_j\}_{j=0, k}$, $\tilde{\delta}' = \{y'_j\}_{j=0, k'}$ ale lui $[c, d]$, adică

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad A'_{ij} = [x'_{i-1}, x'_i] \times [y'_{j-1}, y'_j].$$

Spunem că diviziunea Δ este *mai fină* decât Δ' dacă $\delta \subset \delta'$ și $\tilde{\delta} \subset \tilde{\delta}'$.

7.1.12 Propoziție. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și Δ, Δ' două diviziuni ale dreptunghiului A . Dacă Δ este mai fină decât Δ' , atunci

$$s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \quad \text{și} \quad S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 146-17).

7.1.13 Propoziție. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită, atunci

$$s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta'}(f),$$

oricare ar fi diviziunile Δ și Δ' .

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 147-18).

7.1.14 Teoremă (Criteriul lui Darboux). Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă dacă și numai dacă este mărginită și pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) = 0.$$

În cazul în care f este integrabilă, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}(f) = \iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f).$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate la pag. 148-21.

7.1.15 Teoremă. Dacă funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe dreptunghiul $A = [a, b] \times [c, d]$ este integrabilă, există integrala

$$\int_c^d f(x, y) dy, \quad \text{oricare ar fi } x \in [a, b],$$

și dacă funcția

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

este integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Demonstrație. Pentru orice diviziune Δ , cu notațiile de mai sus, avem relațiile

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}, \quad \forall (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

din care rezultă, pentru orice i, j , că

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Existența integralelor $\int_c^d f(x, y) dy$ implică existența integralelor $\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy$ și

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(x, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Funcția F fiind integrabilă pe $[a, b]$, obținem relațiile

$$(x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

din care, prin sumare, rezultă că

$$s_{\Delta}(f) \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq S_{\Delta}(f).$$

Alegând un șir de diviziuni $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$, din

$$s_{\Delta_n}(f) \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq S_{\Delta_n}(f)$$

obținem prin trecere la limită relația cerută.

7.1.16 Teoremă. Orice funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 149-25).

7.1.17 Exercițiu. Fie $A = [1, 3] \times [0, 2]$. Calculați

$$\iint_A (2xy + 1) dx dy.$$

Rezolvare. Funcția continuă $f : [1, 3] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2xy + 1$, este integrabilă și

$$\begin{aligned} \iint_A (2xy + 1) dx dy &= \int_1^3 \left(\int_0^2 (2xy + 1) dy \right) dx = \int_1^3 (xy^2 + y)|_0^2 dx \\ &= \int_1^3 (4x + 2) dx = (2x^2 + 2x)|_1^3 = 20. \end{aligned}$$

7.1.18 MATHEMATICA: Integrate[f[x,y], {x, a, b}, {y, c, d}]

In[1]:=Integrate[2 x y +1, {x, 1, 3}, {y, 0, 2}] $\mapsto$ Out[1]=20

7.1.19 Definiție. Spunem despre o mulțime $S \subset \mathbb{R}^2$ că are *aria nulă* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, mulțimea S poate fi acoperită cu o familie de dreptunghiuri având suma ariilor mai mică decât ε .

7.1.20 Exercițiu.

a) Orice mulțime numărabilă $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ are aria nulă.

b) Imaginea unui drum de clasă C^1 , adică a unei aplicații

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

cu φ, ψ derivabile și cu derivată continuă, are aria nulă.

c) Circumferința $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ are arie nulă.

Rezolvare. a) Alegând pentru fiecare punct (x_n, y_n) un pătrat cu latura mai mică decât $\sqrt{\varepsilon/2^n}$, suma ariilor va fi mai mică decât

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \varepsilon \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n = \varepsilon.$$

b) Funcțiile $\varphi', \psi' : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ fiind continue, rezultă că există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\varphi'(t)| \leq M$ și $|\psi'(t)| \leq M$, oricare ar fi $t \in [\alpha, \beta]$. Pentru orice $n > 1$, punctele

$$t_0 = \alpha, \quad t_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}, \quad t_2 = \alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{n}, \quad \dots \quad t_{n-1} = \alpha + (n-1)\frac{\beta - \alpha}{n}, \quad t_n = \beta$$

determină o diviziune echidistantă a intervalului $[\alpha, \beta]$. Conform teoremei creșterilor finite (Lagrange), pentru orice $t \in [t_{i-1}, t_i]$ există $c_i, d_i \in [t, t_i]$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_i) - \gamma(t)\| &= \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(c_i))^2 + (\psi'(d_i))^2} (t_i - t) \leq \frac{\sqrt{2}M(\beta - \alpha)}{n}. \end{aligned}$$

Pătratele de latură $2\sqrt{2}M(\beta - \alpha)/n$ centrate în $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n)$ acoperă imaginea drumului γ și suma ariilor lor este $8M^2(\beta - \alpha)^2/n$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, se poate alege $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $8M^2(\beta - \alpha)^2/n < \varepsilon$.

c) Circumferința $\mathcal{S}$ este imaginea drumului $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

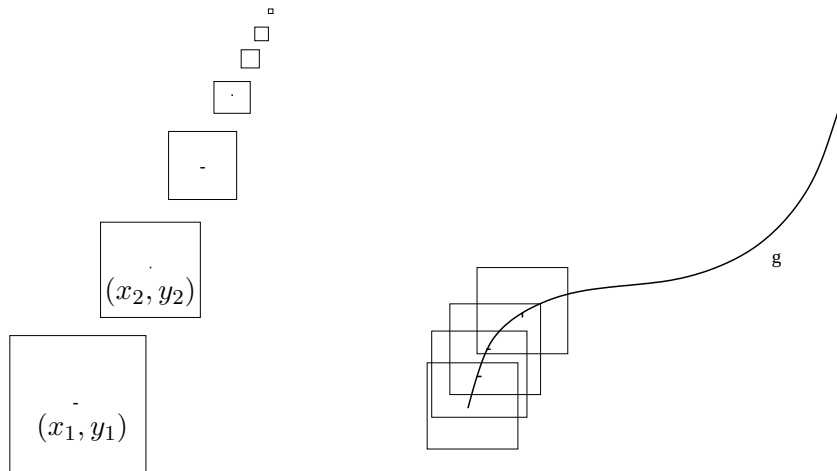


Figura 7.2: Mulțimile numărabile și imaginile drumurilor de clasă C^1 au arie nulă.

7.1.21 Se poate arăta că orice funcție $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, cu excepția imaginilor unui număr finit de drumuri de clasă C^1

$$\gamma_i : [\alpha_i, \beta_i] \longrightarrow [a, b] \times [c, d], \quad i \in \{1, 2, \dots, k\},$$

este integrabilă.

7.1.22 Fie D un domeniu mărginit, cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1 și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

o funcție continuă. Funcția

$$\tilde{f} : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dacă } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{dacă } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

definită pe dreptunghiul $A = [a, b] \times [c, d]$ care include pe D , este integrabilă. Numărul

$$\iint_A \tilde{f}(x, y) dx dy$$

nu depinde de alegerea dreptunghiului A conținând D , și prin definiție

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_A \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

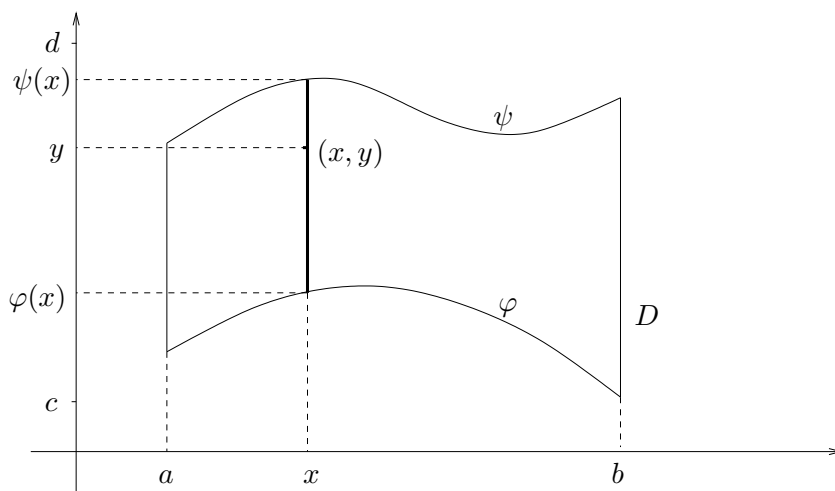


Figura 7.3: Domeniu simplu în raport cu Ox .

7.1.23 Definiție. Prin *domeniu simplu în raport cu Ox* se înțelege un domeniu de forma (v. Fig. 7.3)

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \},$$

unde $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue, de clasă C^1 în (a, b) . Analog, prin *domeniu simplu în raport cu Oy* se înțelege un domeniu de forma

$$D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \},$$

unde $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue, de clasă C^1 în (c, d) .

7.1.24 Propoziție.

a) Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe domeniul simplu în raport cu Ox

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \},$$

este continuă, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

b) Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe domeniul simplu în raport cu Oy

$$D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \},$$

este continuă, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Demonstrație. a) Fie intervalul $[c, d]$ astfel încât $D \subset [a, b] \times [c, d]$ și

$$\tilde{f} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dacă } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{dacă } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^{\varphi(x)} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx \\ &\quad + \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

7.1.25 În loc de

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{se mai scrie} \quad \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y).$$

7.1.26 Exercițiu. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D y \, dx \, dy,$$

$$\text{unde } D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \}.$$

Rezolvare. Funcția considerată $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y$, este integrabilă deoarece este continuă și D are frontiera formată din imaginile a două drumuri de clasă C^1

$$\gamma_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{și} \quad \gamma_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t).$$

Domeniul D fiind simplu în raport cu Ox ,

$$D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\},$$

obținem

$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

Deoarece domeniul D este simplu și în raport cu Oy ,

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\},$$

o variantă alternativă de calcul este

$$\iint_D y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \, dx = 2 \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} \, dy = \frac{2}{3}.$$

7.1.27 MATHEMATICA: `Integrate[f[x,y], {x, a, b}, {y, c, d}]`

$$\text{In[1]:=Integrate[y, {x, -1, 1}, {y, 0, Sqrt[1-x^2]}} \quad \mapsto \quad \text{Out[1]}=\frac{2}{3}$$

$$\text{In[2]:=Integrate[y, {y, 0, 1}, {x, -Sqrt[1-y^2], Sqrt[1-y^2]}} \quad \mapsto \quad \text{Out[2]}=\frac{2}{3}$$

7.2 Schimbări de variabile

7.2.1 În cazul integralei simple avem

$$\int_a^b dx = b - a = \text{lungimea intervalului } [a, b],$$

iar în cazul unui domeniu simplu $D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$,

$$\iint_D dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \right) dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx = \text{aria domeniului } D.$$

În general, dacă $\iint_D dx \, dy$ există, atunci $\iint_D dx \, dy$ este aria lui D .

7.2.2 Plecând de la produsul scalar a doi vectori nenuli calculat în două feluri

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cos \alpha,$$

putem deduce sinusul unghiului format de ei

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

și apoi aria paralelogramului determinat de cei doi vectori

$$aria = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \sin \alpha = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

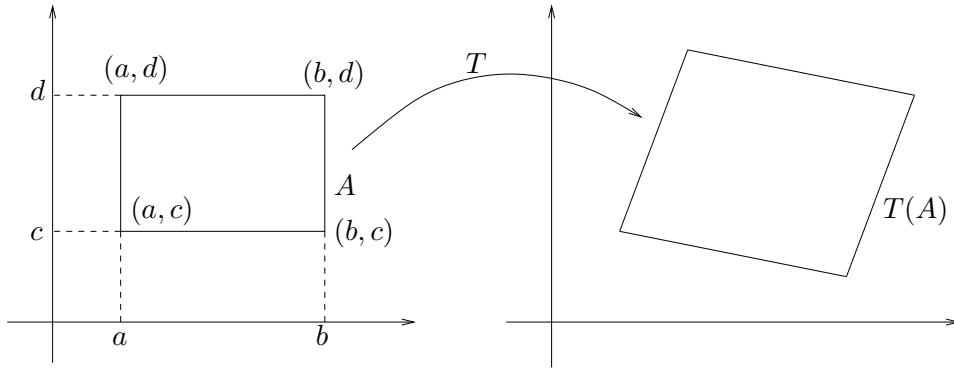


Figura 7.4: Transformarea liniară T .

7.2.3 Prin transformarea liniară (v Fig. 7.4)

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

dreptunghiului $A = [a, b] \times [c, d]$ îi corespunde paralelogramul $T(A)$ cu vârfurile

$$(\alpha a + \beta c, \gamma a + \delta c), \quad (\alpha b + \beta c, \gamma b + \delta c),$$

$$(\alpha a + \beta d, \gamma a + \delta d), \quad (\alpha b + \beta d, \gamma b + \delta d)$$

și

$$\begin{aligned} \iint_{T(A)} dx dy &= \text{aria}(T(A)) = \left| \det \begin{pmatrix} \alpha(b-a) & \beta(b-a) \\ \gamma(d-c) & \delta(d-c) \end{pmatrix} \right| \\ &= |\det T| (b-a)(d-c) = |\det T| \iint_A du dv = \iint_A |\det T| du dv. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, transformarea T fiind liniară, avem

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \det T$$

și prin urmare, putem scrie

$$\iint_{T(A)} dx dy = \iint_A \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

7.2.4 Se știe că orice funcție continuă definită pe un interval are proprietatea lui Darboux și prin urmare, pentru a fi injectivă trebuie să fie monotonă. Fie aplicațiile

$$[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

cu f continuă iar φ injectivă, derivabilă și cu derivata continuă. Deoarece

$$\varphi([\alpha, \beta]) = \begin{cases} [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] & \text{dacă } \varphi \text{ este crescătoare,} \\ [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)] & \text{dacă } \varphi \text{ este descrescătoare,} \end{cases}$$

formula de schimbare de variabilă

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

se mai poate scrie

$$\int_{\varphi([\alpha, \beta])} f(x) dx = \int_{[\alpha, \beta]} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

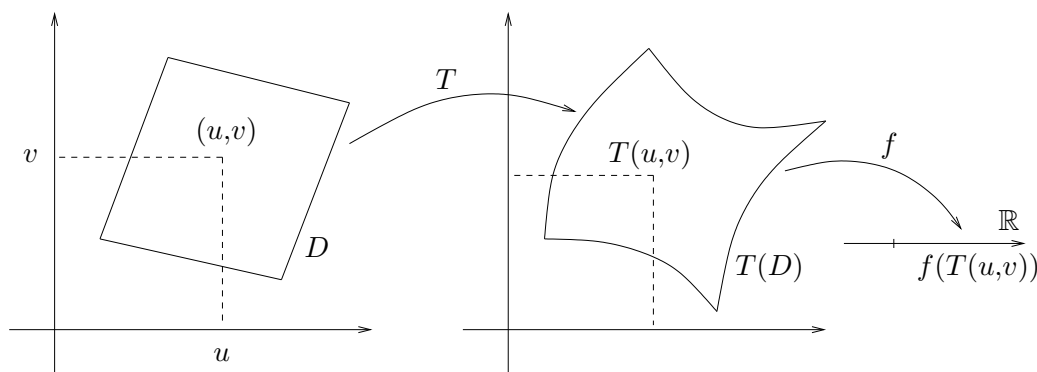


Figura 7.5: Schimbarea de variabile.

7.2.5 Teoremă (Formula de schimbare de variabile). Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1 și fie

$$T : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

o aplicație injectivă, de clasă C^1 cu proprietatea că

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{oricare ar fi } (u, v) \in D.$$

Dacă $f : T(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci

$$\iint_{T(D)} f(x, y) dx dy = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

7.2.6 Exercițiu. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D y dx dy, \quad \text{unde } D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \}.$$

Rezolvare. Alegem $A = [0, 1] \times [0, \pi]$ și utilizăm coordonate polare. Aplicația

$$T : A \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

este injectivă, $T(A) = D$ și

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Utilizând formula de schimbare de variabile, obținem

$$\iint_{T(A)} y dx dy = \iint_A r \sin \theta \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| dr d\theta = \int_0^1 dr \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta = 2 \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3}.$$

7.2.7 Exercițiu. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D x dx dy, \quad \text{unde } D = \left\{ (x, y) \mid x > 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2 \right\}.$$

Rezolvare. Alegând $A = [1, 2] \times [1, 2]$ și transformarea bijectivă

$$T : A \longrightarrow D : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v)) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right)$$

cu jacobianul

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

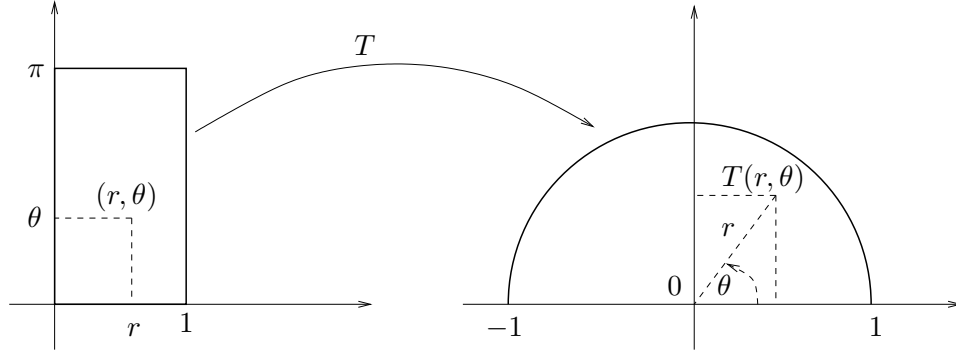


Figura 7.6: Schimbarea de variabile $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

obținem

$$\iint_D x \, dx \, dy = \iint_{T(A)} x \, dx \, dy = \iint_A \sqrt{\frac{u}{v}} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{v} \sqrt{\frac{u}{v}} \, dv = \frac{1}{3} (5\sqrt{2} - 6).$$

7.3 Formula lui Green

7.3.1 Definiție. Prin *drum de clasă C^1 pe porțiuni* se înțelege o aplicație continuă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

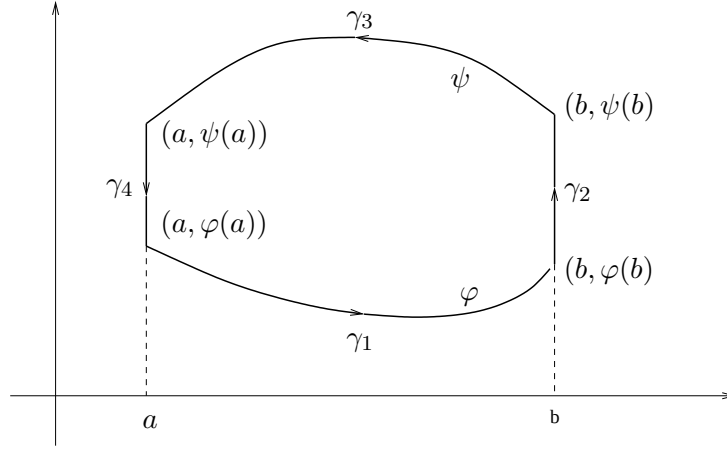
cu $\gamma' = (\varphi', \psi')$ continuă pe porțiuni.

7.3.2 Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact a cărui frontieră este imaginea unui drum de clasă C^1 pe porțiuni și fie $\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, o funcție continuă. Vom utiliza notația

$$\int_{\partial D} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$$

pentru integrala curbilinie a lui $\vec{F}$ de-a lungul frontierei lui D , parcursă în sens direct (cu domeniul în stânga).

7.3.3 Teoremă (Formula lui Green) *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact, simplu în raport cu ambele axe și a cărui frontieră este imaginea unui drum*

Figura 7.7: Frontiera domeniului D simplu în raport cu Ox .

de clasă C^1 pe porțiuni. Dacă funcția continuă

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

este astfel încât există $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe D , atunci

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy.$$

Demonstrație. Domeniul D fiind simplu în raport cu axa Ox , există un interval $[a, b]$ și funcțiile continue $\varphi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de clasă C^1 în (a, b) , astfel încât

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}.$$

Frontiera lui D parcursă în sens direct se compune din drumurile:

$$\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, \varphi(t));$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (b, (1-t)\varphi(b) + t\psi(b));$$

$$\gamma_3 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (a+b-t, \psi(a+b-t));$$

$$\gamma_4 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(t) = (a, (1-t)\psi(a) + t\varphi(a)).$$

Prin calcul direct, obținem

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P(x, y) dx &= \int_{\gamma_1} P(x, y) dx + \int_{\gamma_2} P(x, y) dx + \int_{\gamma_3} P(x, y) dx + \int_{\gamma_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(t, \varphi(t)) dt + 0 + \int_a^b P(a+b-t, \psi(a+b-t))(-1)dt + 0 \\ &= \int_a^b [P(t, \varphi(t)) - P(t, \psi(t))] dt. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b [P(t, \psi(t)) - P(t, \varphi(t))] dt,$$

rezultă că

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Plecând de la faptul că domeniul D este simplu în raport cu Oy , se obține relația

$$\int_{\partial D} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy,$$

care adunată cu precedenta conduce la formula lui Green.

7.3.4 Formula lui Green se poate extinde la domenii care se pot descompune în domenii de tipul celui din enunțul teoremei. Relația

$$\int_{\partial D} x dy - y dx = 2 \iint_D dx dy,$$

bazată pe formula lui Green, poate fi utilizată pentru calculul ariei unui domeniu

$$aria(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

7.3.5 Exercițiu. Să se afle aria domeniului D limitat de elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rezolvare. Utilizând pentru ∂D parametrizarea

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t),$$

obținem

$$aria(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab \cos^2 t + ab \sin^2 t] dt = \pi ab.$$

7.3.6 Exercițiu. Să se calculeze

$$\int_{\partial D} y^2 dx + x^2 dy, \quad \text{unde } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

Rezolvare. Utilizând formula lui Green și apoi coordonate polare, obținem

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} y^2 dx + x^2 dy &= 2 \iint_D (x - y) dx dy = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr \\ &= 2 \int_0^\pi (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3} (\sin \theta + \cos \theta) \Big|_0^\pi = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

7.4 Integrale curbilinii în plan independente de drum

7.4.1 Orice drum $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este echivalent cu drumul

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \gamma((1-t)a + tb).$$

Fără a restrânge generalitatea, putem utiliza doar drumuri definite pe $[0, 1]$.

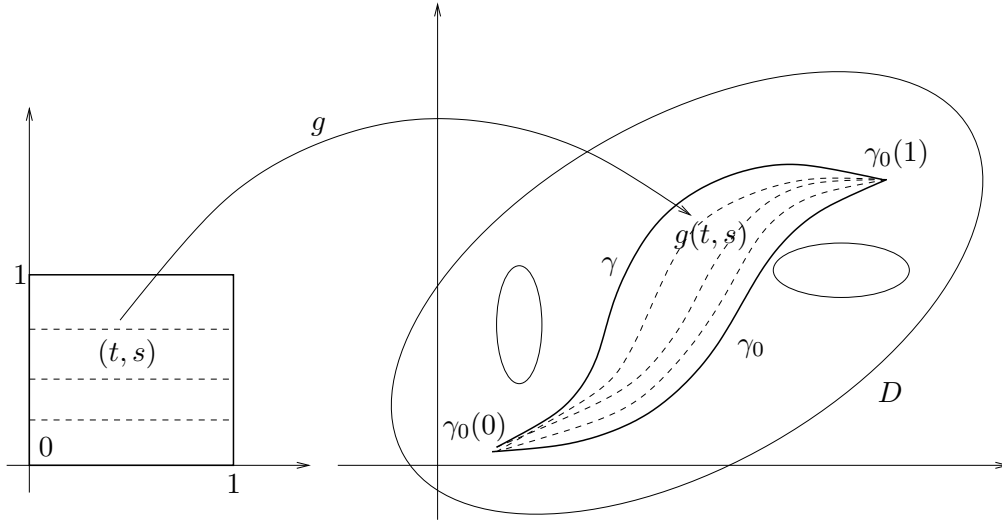


Figura 7.8: Drumul γ se poate deforma continuu în γ_0 fără a ieși din D .

7.4.2 Definiție. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu și $\gamma_0, \gamma : [0, 1] \rightarrow D$ două drumuri de clasă C^1 din D cu aceleași extremități, adică astfel încât $\gamma_0(0) = \gamma(0)$ și $\gamma_0(1) = \gamma(1)$. Spunem că drumul γ se poate *deforma continuu* în γ_0 fără a ieși din D dacă există o aplicație continuă $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ astfel încât:

- 1) $g(t, 0) = \gamma_0(t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$;
- 2) $g(t, 1) = \gamma(t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$;
- 3) $g(0, s) = \gamma_0(0)$, oricare ar fi $s \in [0, 1]$;
- 4) $g(1, s) = \gamma_0(1)$, oricare ar fi $s \in [0, 1]$.

7.4.3 Definiție. Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că, orice două drumuri din D cu aceleași extremități se pot deforma continuu unul în altul fără a ieși din D , este numit *domeniu simplu conex*.
Intuitiv, D este un domeniu “fără găuri”.

7.4.4 Teoremă. Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu simplu conex și

$$\vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

este o aplicație de clasă C^1 , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) Oricare ar fi drumul închis de clasă C^1 pe porțiuni $\gamma[a, b] \longrightarrow D$, avem

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

b) Dacă γ_0 și γ_1 sunt două drumuri din D cu aceleași extremități, atunci

$$\int_{\gamma_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

c) Există o funcție $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât

$$P(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y),$$

oricare ar fi $(x, y) \in D$.

d) Are loc relația

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in D.$$

Demonstrație. “a) $\Rightarrow$ b)” Fie două drumuri de clasă C^1 cu aceleași extremități

$$\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow D, \quad \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Compunând γ_0 cu opusul drumului γ_1 (v. pag. 176-6) rezultă drumul închis

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow D, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{dacă } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_1(2-2t) & \text{dacă } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

și avem

$$\int_{\gamma_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{\gamma_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

“b) $\Rightarrow$ c)” Fie $(x_0, y_0) \in D$ un punct fixat și fie

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

unde

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

și $\gamma_{(x, y)} : [0, 1] \rightarrow D$ este un drum arbitrar cu $\gamma_{(x, y)}(0) = (x_0, y_0)$ și $\gamma_{(x, y)}(1) = (x, y)$.
Calculând $\Phi(x+h, y)$ cu ajutorul drumului rezultat compunând $\gamma_{(x, y)}$ cu drumul

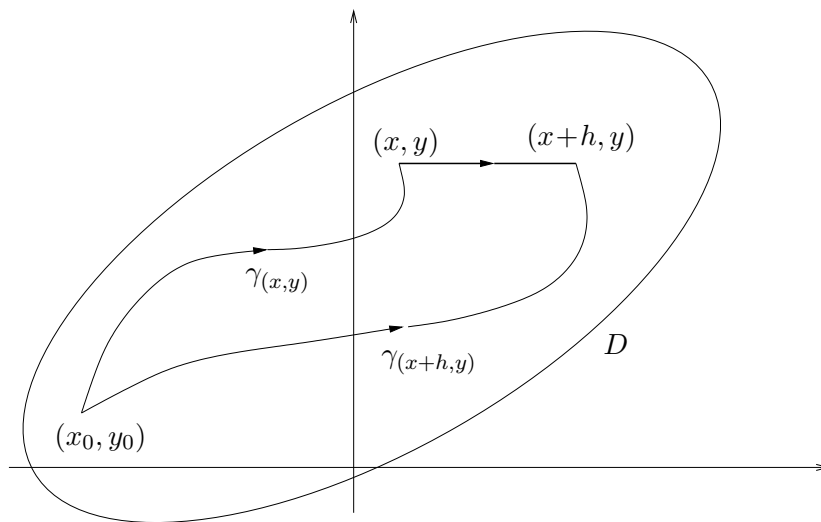


Figura 7.9: Drumul utilizat în demonstrația teoremei.

liniar $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(t) = (x + th, y)$, obținem (v. Fig. 7.9)

$$\Phi(x+h, y) - \Phi(x, y) = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_x^{x+h} P(t, y) dt.$$

Conform teoremei de medie (pag. 151-**30**), există ξ între x și $x+h$ astfel încât

$$\int_x^{x+h} P(t, y) dt = h P(\xi, y)$$

și prin urmare

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h, y) - \Phi(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y).$$

Similar, se arată că $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$. Din $P, Q \in C^1(D)$ rezultă $\Phi \in C^2(D)$.

“c) $\Rightarrow$ d)” Utilizăm teorema lui Schwarz (pag. 117-**20**). Deoarece $\Phi \in C^2(D)$, avem

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \text{ oricare ar fi } (x, y) \in D.$$

“d) $\Rightarrow$ a)” Utilizăm formula lui Green. Fie $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ un drum închis de clasă C^1 și fie D_γ domeniul a cărui frontieră este γ . Deoarece $D_\gamma \subset D$, avem

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{D_\gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

7.5 Integrale duble improprii

7.5.1 Pe parcursul acestei secțiuni vom considera doar domenii ale planului cu proprietatea că, orice parte finită a frontierei este imaginea unui drum de clasă C^1 sau o reuniune finită de astfel de imagini.

7.5.2 Definiție. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu nemărginit și fie $(D_n)_{n \geq 1}$ un șir de domenii compacte conținute în D . Spunem că șirul $(D_n)_{n \geq 1}$ epuizează pe D dacă, pentru orice mulțime compactă $K \subset D$, există $n_K \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$K \subset D_n, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_K.$$

Șirul $(D_n)_{n \geq 1}$ este numit *crescător* dacă $D_n \subseteq D_{n+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

7.5.3 Definiție. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu nemărginit și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice domeniu compact $K \subset D$. Spunem că funcția f este *integrabilă* dacă, pentru orice șir crescător $(D_n)_{n \geq 1}$ care epuizează pe D , șirul

$$\left(\iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right)_{n \geq 1}$$

este convergent și limita lui nu depinde de șirul $(D_n)_{n \geq 1}$ ales.

Valoarea acestei limite este numită integrala lui f pe D și se utilizează notația

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

7.5.4 Teoremă. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu nemărginit și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice domeniu compact $K \subset D$. Dacă

$$f(x, y) \geq 0, \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in D,$$

și dacă există un șir crescător $(D_n)_{n \geq 1}$ care epuizează pe D , pentru care șirul

$$\left(\iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy \right)_{n \geq 1}$$

este mărginit, atunci f este integrabilă.

Demonstrație. Fie $M > 0$ astfel încât

$$\iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy \leq M, \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1,$$

și fie $(D'_m)_{m \geq 1}$ un alt șir crescător care epuizează pe D . Oricare ar fi $m \geq 1$, există $m' \geq 1$ astfel încât $D'_m \subset D_{m'}$ și avem

$$\iint_{D'_m} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{D_{m'}} f(x, y) \, dx \, dy \leq M,$$

ceea ce arată că șirul

$$\left(\iint_{D'_n} f(x, y) \, dx \, dy \right)_{n \geq 1}$$

este mărginit. Șirurile crescătoare și mărginite fiind convergente, există limitele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{și} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{D'_m} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Plecând de la $(D_n)_{n \geq 1}$ și $(D'_m)_{m \geq 1}$ generăm un șir crescător care epuizează pe D de forma $D_1 \subseteq D'_{m_1} \subseteq D_{n_1} \subseteq D'_{m_2} \subseteq D_{n_2} \subseteq D'_{m_3} \subseteq \dots$. Deoarece șirul crescător și mărginit

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{D'_{m_1}} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{D_{n_1}} f(x, y) \, dx \, dy \leq \dots$$

este convergent, orice subșir al lui are aceeași limită. În particular, avem relația

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_{n_k}} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D'_{m_k}} f(x, y) \, dx \, dy$$

din care rezultă independența limitei de șirul ales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{D'_m} f(x, y) \, dx \, dy.$$

7.5.5 Exercițiu. Arătați că

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \pi \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Rezolvare. În acest caz $D = \mathbb{R}^2$ și $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} > 0$. Șirul de discuri

$$(D_n)_{n \geq 1}, \quad \text{unde} \quad D_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2 \},$$

este crescător și epuizează $\mathbb{R}^2$. Utilizând schimbarea de variabile

$$A_n \longrightarrow D_n : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

(coordonate polare), unde $A_n = [0, n] \times [0, 2\pi]$, obținem

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{A_n} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \\ &= 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

Alegând însă un alt șir crescător care epuizează $\mathbb{R}^2$ și anume

$$(D'_n)_{n \geq 1}, \quad \text{unde} \quad D'_n = [-n, n] \times [-n, n],$$

obținem relația

$$\iint_{D'_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2,$$

din care rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\iint_{D'_n} e^{-x^2-y^2} dx dy} = \sqrt{\pi}.$$

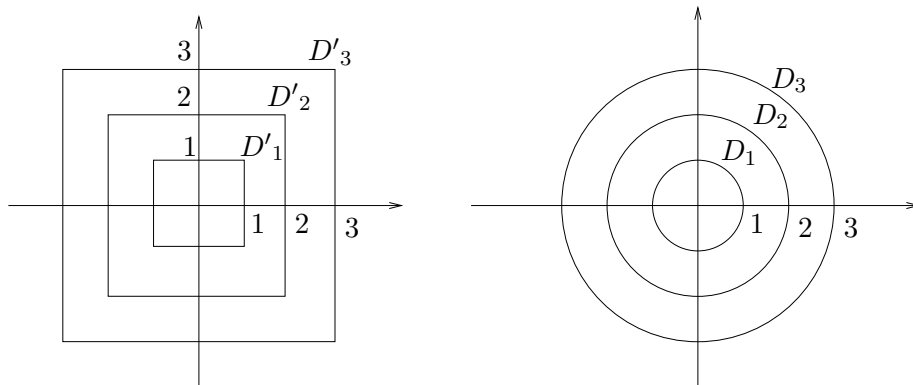


Figura 7.10: Șiruri de domenii compacte care epuizează pe $\mathbb{R}^2$.

Capitolul 8

Integrale de suprafață

8.1 Integrala de suprafață de primul tip

8.1.1 Noțiunea de suprafață este un analog bidimensional al noțiunii de curbă.

O curbă este o clasă de drumuri echivalente, numite parametrizări ale curbei.

Similar, o suprafață se poate defini ca fiind o clasă de pânze netede echivalente.

8.1.2 Definiție. Prin *pânză netedă* în $\mathbb{R}^3$ se înțelege o aplicație de clasă C^1

$$S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(u, v) = (S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v)),$$

definită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$, cu proprietatea că

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = 2, \quad \text{oricare ar fi } (u, v) \in D.$$

8.1.3 Exemplu. Pânza netedă $S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$S(\theta, \varphi) = (S_1(\theta, \varphi), S_2(\theta, \varphi), S_3(\theta, \varphi))$$

$$= (x_0 + R \sin \theta \cos \varphi, y_0 + R \sin \theta \sin \varphi, z_0 + R \cos \theta),$$

reprezintă o parametrizare a sferei de rază R și centru (x_0, y_0, z_0) .

8.1.4 Fie $S: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $S(u, v) = (S_1(u, v), S_2(u, v), S_3(u, v))$ o pânză netedă.

Ea este o parametrizare a unei suprafețe S . Pentru $(u_0, v_0) \in [a, b] \times [c, d]$ fixat,

$$\gamma_u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_u(t) = S(t, v_0) = (S_1(t, v_0), S_2(t, v_0), S_3(t, v_0)),$$

$$\gamma_v: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_v(t) = S(u_0, t) = (S_1(u_0, t), S_2(u_0, t), S_3(u_0, t)),$$

reprezintă drumuri pe suprafața S . Ele trec prin punctul $S(u_0, v_0)$ și vectorii tangenți

$$\vec{\tau}_u(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \gamma_u(u_0) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$\vec{\tau}_v(u_0, v_0) = \frac{d}{dt} \gamma_v(v_0) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

determină planul tangent la S în $S(u_0, v_0)$. În particular, produsul lor vectorial

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \vec{\tau}_u(u_0, v_0) \times \vec{\tau}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \vec{k},$$

cu coordonatele $(A(u_0, v_0), B(u_0, v_0), C(u_0, v_0))$ definite prin relațiile

$$A(u_0, v_0) = \frac{D(S_2, S_3)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \quad B(u_0, v_0) = \frac{D(S_3, S_1)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \quad C(u_0, v_0) = \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0),$$

este un vector perpendicular pe planul tangent la suprafața S în punctul $S(u_0, v_0)$.

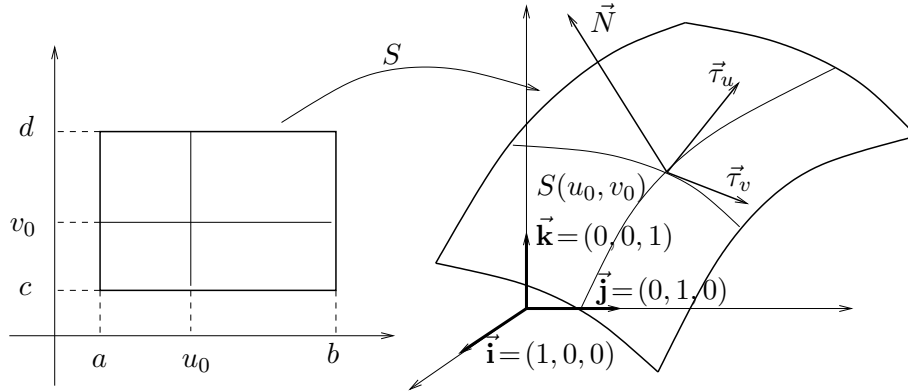


Figura 8.1: Normala la o suprafață.

8.1.5 Fiecărei diviziuni

$$\Delta = \{[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]\}_{\substack{i = \overline{0, n-1} \\ j = \overline{0, k-1}}}$$

a dreptunghiului $[a, b] \times [c, d]$, obținute plecând de la o diviziune

$$\delta = \{u_i\}_{i=\overline{0, n-1}}, \quad a = u_0 < u_1 < \dots < u_{n-1} < u_n = b,$$

a intervalului $[a, b]$ și o diviziune

$$\tilde{\delta} = \{v_j\}_{j=\overline{0, k-1}}, \quad c = v_0 < v_1 < \dots < v_{k-1} < v_k = d,$$

a intervalului $[c, d]$, îi corespunde o partiție a suprafeței S . În cazul în care norma diviziunii este ‘suficient de mică’,

$$\begin{aligned} S(u_{i+1}, v_j) &= (S_1(u_{i+1}, v_j), S_2(u_{i+1}, v_j), S_3(u_{i+1}, v_j)) \\ &\approx \left(S_1(u_i, v_j) + \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i), S_2(u_i, v_j) + \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i), \right. \\ &\quad \left. S_3(u_i, v_j) + \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i) \right) = S(u_i, v_j) + \vec{\tau}_u(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i), \end{aligned}$$

adică

$$S(u_{i+1}, v_j) - S(u_i, v_j) \approx \vec{\tau}_u(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i)$$

și similar

$$S(u_i, v_{j+1}) - S(u_i, v_j) \approx \vec{\tau}_v(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j).$$

Rezultă că aria porțiunii de suprafață $S([u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}])$ poate fi aproximată cu

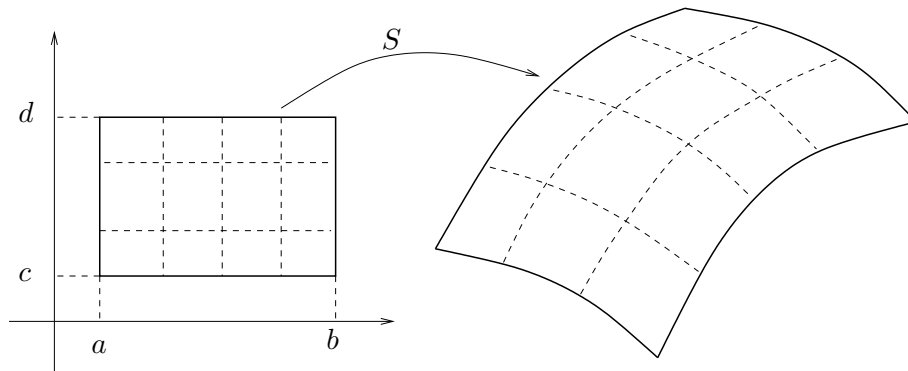


Figura 8.2: Aproximarea unei suprafețe cu una poliedrală.

$$\begin{aligned}
& \|\vec{\tau}_u(u_i, v_j) \times \vec{\tau}_v(u_i, v_j)\| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \\
&= \|(A(u_i, v_j), B(u_i, v_j), C(u_i, v_j))\| (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \\
&= \sqrt{A^2(u_i, v_j) + B^2(u_i, v_j) + C^2(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j),
\end{aligned}$$

iar aria suprafeței cu

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{A^2(u_i, v_j) + B^2(u_i, v_j) + C^2(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).$$

Acest rezultat sugerează următoarea definiție.

8.1.6 Definiție. Prin *aria suprafeței* $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ se înțelege numărul

$$\text{aria}(S) = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv,$$

notațiile fiind cele prezentate la pag. 200-4.

8.1.7 Dacă unghiul dintre vectorii $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ are măsura α , atunci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \alpha, \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \alpha,$$

și are loc relația

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2.$$

Notând

$$E(u, v) = \|\vec{\tau}_u(u, v)\|^2, \quad F(u, v) = \vec{\tau}_u(u, v) \cdot \vec{\tau}_u(u, v), \quad G(u, v) = \|\vec{\tau}_v(u, v)\|^2,$$

din

$$\|\vec{\tau}_u(u, v) \times \vec{\tau}_v(u, v)\|^2 + (\vec{\tau}_u(u, v) \cdot \vec{\tau}_v(u, v))^2 = \|\vec{\tau}_u(u, v)\|^2 \|\vec{\tau}_v(u, v)\|^2$$

rezultă relația

$$A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v) = \|\vec{\tau}_u(u, v) \times \vec{\tau}_v(u, v)\|^2 = E(u, v) G(u, v) - F^2(u, v),$$

adică avem

$$\text{aria}(S) = \iint_D \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F^2(u, v)} du dv.$$

8.1.8 Exemplu. În cazul sferei $S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$S(\theta, \varphi) = (S_1(\theta, \varphi), S_2(\theta, \varphi), S_3(\theta, \varphi))$$

$$= (x_0 + R \sin \theta \cos \varphi, y_0 + R \sin \theta \sin \varphi, z_0 + R \cos \theta),$$

avem

$$\vec{\tau}_\theta(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta),$$

$$\vec{\tau}_\varphi(\theta, \varphi) = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

și

$$E(\theta, \varphi) = R^2, \quad F(\theta, \varphi) = 0, \quad G(\theta, \varphi) = R^2 \sin^2 \theta.$$

Rezultă că

$$\text{aria}(S) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

8.1.9 În cazul unei pânze materiale $S: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ cu densitatea (de exemplu, în g/cm^2) descrisă de o funcție continuă $\varrho: \{S(u, v) \mid (u, v) \in [a, b] \times [c, d]\} \rightarrow \mathbb{R}$, masa pânzei poate fi aproximată folosind o diviziune Δ suficient de fină cu ajutorul sumei

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \varrho(S(u_i, v_j)) \sqrt{A^2(u_i, v_j) + B^2(u_i, v_j) + C^2(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).$$

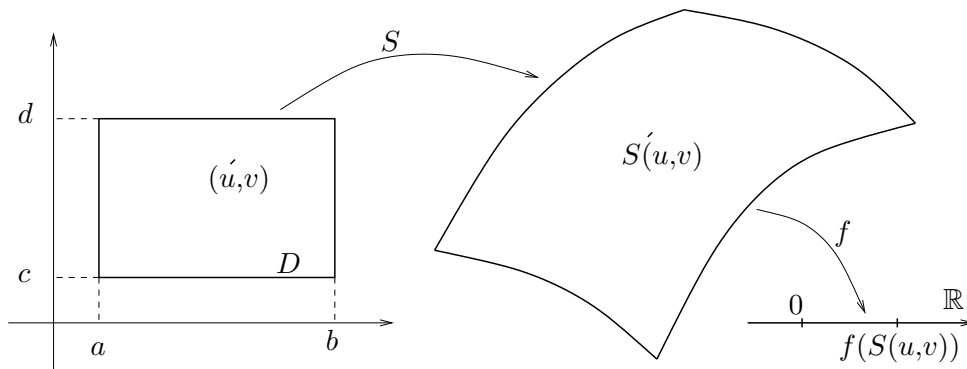


Figura 8.3: Integrala unui câmp scalar f definit pe o suprafață S .

8.1.10 Definiție. Fie $S: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ o pânză netedă și $f: \{S(u, v) \mid (u, v) \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație continuă. Prin *integrala funcției f pe suprafața S* se înțelege integrala

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) d\sigma &= \iint_D f(S(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv \\ &= \iint_D f(S(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

8.1.11 Definiție. Spunem că pânzele netede $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ și $\tilde{S} : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sunt *echivalente* dacă există o bijecție

$$D \longrightarrow \tilde{D} : (u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

de clasă C^1 cu

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0 \quad \text{și} \quad S(u, v) = \tilde{S}(\varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

oricare ar fi $(u, v) \in D$.

8.1.12 Relația definită este o relație de echivalență care permite împărțirea mulțimii tuturor pânzelor netede în clase de echivalență. Clasele de echivalență rezultate sunt numite *suprafețe*. Pânzele corespunzătoare unei suprafețe sunt numite *parametrizări*. Se poate arăta ca integrala unei funcții f definite pe o suprafață nu depinde de parametrizarea aleasă, adică în cazul în care S și $\tilde{S}$ sunt echivalente, avem

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\tilde{S}} f(x, y, z) d\sigma.$$

8.2 Integrala de suprafață de al doilea tip

8.2.1 Fie $S : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pânză netedă traversată de un fluid cu viteza la nivelul suprafeței descrisă de câmpul vectorial $\vec{V} : S([a, b] \times [c, d]) \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Vectorul

$$\vec{\nu}(u, v) = (\nu_1(u, v), \nu_2(u, v), \nu_3(u, v)) = \frac{(A(u, v), B(u, v), C(u, v))}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}}$$

reprezintă *versorul normalei* la suprafața S în punctul $S(u, v)$. Cantitatea de fluid care traversează suprafața S în unitatea de timp (fluxul) se poate aproxima alegând o diviziune Δ a dreptunghiului $[a, b] \times [c, d]$ cu norma suficient de mică prin suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \vec{V}(S(u_i, v_j)) \cdot \vec{\nu}(u_i, v_j) \sqrt{A^2(u_i, v_j) + B^2(u_i, v_j) + C^2(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j).$$

8.2.2 Definiție. Fie $S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o pânză netedă și un câmp vectorial continuu

$$\vec{F} : S(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Integrala de suprafață a câmpului vectorial $\vec{F}$ pe suprafața S , notată cu

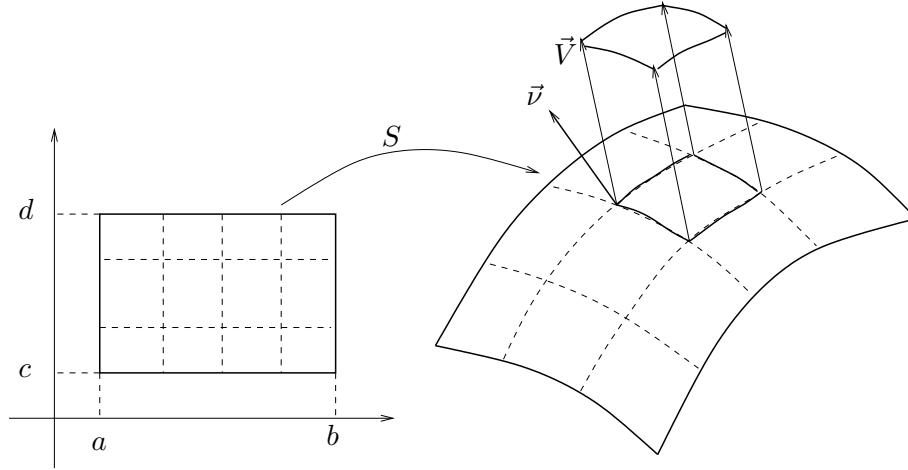


Figura 8.4: Cantitatea de fluid care traversează, în unitatea de timp porțiunea indicată, coincide cu volumul prisme oblice.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma \quad \text{sau} \quad \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

se definește prin relația

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \iint_D [P(S(u, v)) A(u, v) + Q(S(u, v)) B(u, v) + R(S(u, v)) C(u, v)] du dv.$$

8.2.3 Definiție. Spunem că pânzele netede $S: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\tilde{S}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sunt echivalente cu păstrarea (respectiv, schimbarea) orientării dacă există

$$D \rightarrow \tilde{D}: (u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

bijectivă de clasă C^1 cu

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) > 0, \quad \left(\text{respectiv, } \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) < 0 \right)$$

și

$$S(u, v) = \tilde{S}(\varphi(u, v), \psi(u, v)), \quad \text{oricare ar fi } (u, v) \in D.$$

8.2.4 Propoziție. Dacă pânzele $S: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\tilde{S}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sunt echivalente cu păstrarea (respectiv, schimbarea) orientării și $\vec{F}: S(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ este continuă, atunci

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \iint_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma \quad \left(\text{respectiv} \quad \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = - \iint_{\tilde{S}} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma \right).$$

8.3 Formula lui Stokes

8.3.1 Definiție. Prin *rotorul* câmpului vectorial de clasă C^1

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, se înțelege câmpul vectorial

$$\text{rot } \vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

8.3.2 Formal, $\text{rot } \vec{F}$ este produsul vectorial dintre operatorul $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ și $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{F}.$$

8.3.3 Lemă. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu pentru care are loc formula lui Green și

$$S : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(x, y) = (x, y, h(x, y)),$$

o suprafață mărginită de curba închisă ∂S .

Dacă $\vec{F}$ este un câmp de clasă C^1 de forma

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), 0, 0),$$

definit pe un domeniu Ω ce include suprafața S , atunci

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma.$$

Demonstrație. Fie $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ un drum de clasă C^1 pe porțiuni a cărui imagine coincide cu frontiera lui D . Marginea (bordul) suprafeței S coincide cu imaginea drumului $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = S(\varphi(t), \psi(t)) = (\varphi(t), \psi(t), h(\varphi(t), \psi(t)))$. Deoarece

$$\text{rot } \vec{F} = \left(0, \frac{\partial P}{\partial z}, -\frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \text{și} \quad (A, B, C) = \left(-\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial v}, 0 \right),$$

utilizând formula lui Green, obținem

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} P dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t), h(\varphi(t), \psi(t))) \varphi'(t) dt = \int_{\partial D} P(u, v, h(u, v)) du \\ &= - \iint_D \frac{\partial}{\partial v} P(u, v, h(u, v)) du dv = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma. \end{aligned}$$

8.3.4 Teoremă (Formula lui Stokes).

Dacă S este o suprafață astfel încât orice paralelă dusă la axele de coordonate întâlnește S în cel mult un punct și dacă

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

este un câmp vectorial de clasă C^1 definit pe un domeniu Ω ce include pe S , atunci

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma.$$

Demonstrație. Se utilizează lema, plecând de la descompunerea

$$(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = (P(x, y, z), 0, 0) + (0, Q(x, y, z), 0) + (0, 0, R(x, y, z)).$$

8.3.5 Formula lui Stokes se poate extinde la suprafețe care pot fi descompuse în unele de tipul celor din teoremă. În notații alternative, formula devine

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

8.4 Integrale curbilinii în spațiu independente de drum

8.4.1 Teoremă. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu conex și*

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

este o aplicație de clasă C^1 , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) *Oricare ar fi drumul închis de clasă C^1 pe porțiuni $\gamma[a, b] \longrightarrow \Omega$, avem*

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0;$$

b) *Dacă γ_0 și γ sunt două drumuri din Ω cu aceleași extremități, atunci*

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma_0} P dx + Q dy + R dz;$$

c) *Există o funcție $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât în Ω*

$$P(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z), \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z), \quad R(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z);$$

d) *Au loc în Ω relațiile*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 194-4. În loc de formula lui Green se utilizează formula lui Stokes.

Capitolul 9

Integrale triple

9.1 Definiție și proprietăți

9.1.1 Integralele triple pot fi definite și studiate bazându-ne pe analogia cu integralele duble. Vom prezenta doar câteva definiții și rezultate.

9.1.2 Definiție. Fie paralelipipedul $A = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$.

Plecând de la o diviziune a intervalului $[a, a']$

$$\delta = \{x_i\}_{i=\overline{0,n}}, \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = a',$$

o diviziune a intervalului $[b, b']$

$$\delta' = \{y_j\}_{j=\overline{0,m}}, \quad b = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = b',$$

și o diviziune a intervalului $[c, c']$

$$\delta'' = \{z_k\}_{k=\overline{0,p}}, \quad c = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{p-1} < z_p = c',$$

obținem o *diviziune*

$$\Delta = \{A_{ijk}\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}, \quad A_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

a paralelipipedului A cu *norma*

$$||\Delta|| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}.$$

9.1.3 Definiție. Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe paralelipipedul A , $\Delta = \{A_{ijk}\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, p}}$ o diviziune a lui A și fie $\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, p}}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii, adică astfel încât $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) \in A_{ijk}$, oricare ar fi i, j, k . Prin *sumă Riemann* asociată funcției f , diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}$ se înțelege numărul

$$\sigma_{\Delta}(f, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

9.1.4 Definiție. Spunem că funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (Riemann) pe A dacă există un număr $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\nu > 0$ astfel încât relația

$$|\sigma_{\Delta}(f, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}) - I_f| < \varepsilon$$

are loc pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \nu$ și pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})\}$.

Numărul I_f se numește *integrala* funcției f pe A și se utilizează pentru el notația $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$ sau $\iiint_A f dv$.

9.1.5 Teoremă. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A dacă și numai dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ și pentru orice alegere a sistemelor de puncte intermediare asociate $\{(\xi_{ijk}^n, \eta_{ijk}^n, \zeta_{ijk}^n)\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \{(\xi_{ijk}^n, \eta_{ijk}^n, \zeta_{ijk}^n)\}) = I.$$

În cazul în care f este integrabilă, avem $I = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$.

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 142-5).

9.1.6 Propoziție.

a) Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci funcția αf este integrabilă și

$$\iiint_A (\alpha f)(x, y, z) dx dy dz = \alpha \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

b) Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci funcțiile $f \pm g$ sunt integrabile și

$$\iiint_A (f \pm g)(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz \pm \iiint_A g(x, y, z) dx dy dz.$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 143-6).

9.1.7 Propoziție. a) Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $f(x, y, z) \geq 0$, oricare ar fi $(x, y, z) \in A$, atunci

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz \geq 0.$$

b) Dacă $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile și $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, oricare ar fi $(x, y, z) \in A$, atunci

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_A g(x, y, z) dx dy dz.$$

c) Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci

$$\left| \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_A |f(x, y, z)| dx dy dz.$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 143-8).

9.1.8 Teoremă. Dacă funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, atunci este mărginită.

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 144-11).

9.1.9 Teoremă. Fie paralelipipedul $A = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$.

Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă, funcția

$$[b, b'] \times [c, c'] \rightarrow \mathbb{R}: (y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

este integrabilă pe dreptunghiul $D = [b, b'] \times [c, c']$, oricare ar fi $x \in [a, a']$, și dacă funcția

$$[a, a'] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \iint_D f(x, y, z) dy dz$$

este integrabilă pe $[a, a']$, atunci

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} \left(\iint_D f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei duble (pag. 181-15).

9.1.10 Teoremă. Orice funcție continuă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă.

Demonstrație. Este similară celei prezentate în cazul integralei simple (pag. 149-25).

9.1.11 Definiție. Spunem despre o mulțime $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ că are *volum nul* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, mulțimea $\mathcal{V}$ poate fi acoperită cu o familie de paralelipede având suma volumelor mai mică decât ε .

9.1.12 Imaginea unei pânze netede are volum nul și se poate arăta că, orice funcție $f : [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c'] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă cu excepția imaginilor unui număr finit de pânze netede, este integrabilă.

9.1.13 Dacă $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă definită pe un domeniu mărginit Ω cu frontiera formată dintr-un număr finit de pânze netede, atunci funcția

$$\tilde{f} : [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c'] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dacă } (x, y, z) \in \Omega, \\ 0 & \text{dacă } (x, y, z) \notin \Omega, \end{cases}$$

definită pe paralelipipedul $A = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$ care include pe Ω , este integrabilă. Valoarea integralei

$$\iiint_A \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

nu depinde de alegerea paralelipipedului A conținând Ω și prin definiție

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz.$$

9.1.14 Definiție. Prin domeniu *simplu* în raport cu xOy se înțelege un domeniu

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \},$$

unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1 , iar $\varphi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue, de clasă C^1 în $\overset{\circ}{D}$.

9.1.15 Propoziție.

Dacă funcția $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definită pe domeniul simplu în raport cu planul xOy

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \},$$

este continuă, atunci

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

9.1.16 Teoremă (Formula de schimbare de variabilă). Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de imagini de pânze netede și fie

$$T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(u, v, w) = (\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)),$$

o aplicație injectivă, de clasă C^1 cu proprietatea că

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \psi}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \chi}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \chi}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \chi}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall (u, v, w) \in \Omega.$$

Dacă $f : T(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci

$$\iiint_{T(\Omega)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

9.2 Formula Gauss-Ostrogradski

9.2.1 Definiție. Prin *divergența* câmpului vectorial de clasă C^1

$$\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, se înțelege câmpul scalar

$$\operatorname{div} \vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

9.2.2 Formal, $\operatorname{div} \vec{F}$ este produsul scalar dintre operatorul $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ și $\vec{F}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

9.2.3 Lemă. Dacă Ω este un domeniu simplu în raport cu xOy ,

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

și dacă $\vec{F}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 de forma

$$\vec{F} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, R(x, y, z)),$$

atunci are loc relația

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv,$$

unde $\vec{\nu}$ este versorul normalei exterioare.

Demonstrație. Pe fața $\{(x, y, \psi(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$, avem

$$\vec{\nu}(x, y) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}, -\frac{\partial \psi}{\partial y}, 1 \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + 1},$$

iar pe fața $\{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$, normala exterioară este

$$\vec{\nu}(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, -1 \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 1}.$$

Deoarece pe restul frontierei lui Ω versorul $\vec{\nu}$ este perpendicular pe Oz , avem

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iint_D [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] \, dx \, dy.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \, dv = \iint_D \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_D [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

9.2.4 Teoremă. (Formula Gauss-Ostrogradski) Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu în raport cu cele trei plane de coordonate și dacă

$$\vec{F} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

este un câmp vectorial de clasă C^1 , atunci are loc relația

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dv,$$

unde $\vec{\nu}$ este versorul normalei exterioare.

Demonstrație. Se utilizează lema plecând de la descompunerea

$$(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = (P(x, y, z), 0, 0) + (0, Q(x, y, z), 0) + (0, 0, R(x, y, z)).$$

9.2.5 Formula Gauss-Ostrogradski (numită și formula *flux-divergență*) se poate extinde la domenii care pot fi descompuse în unele de tipul celor din teoremă.

În notații alternative, formula devine

$$\iint_{\partial \Omega} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dv.$$

Capitolul 10

Elemente de analiză complexă

10.1 Numere complexe

10.1.1 Mulțimea numerelor complexe

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

considerată împreună cu operațiile de adunare

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i$$

și de înmulțire cu un număr real

$$\alpha(x + yi) = \alpha x + \alpha yi,$$

este spațiu vectorial real de dimensiune 2. Scrierea unui număr complex sub forma $z = x + yi$ reprezintă dezvoltarea lui în raport cu baza $\{1, i\}$. Aplicația

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + yi$$

este un izomorfism care permite identificarea celor două spații vectoriale și conduce la o reprezentare geometrică naturală a numerelor complexe în plan.

10.1.2 Relația $i^2 = -1$ permite definirea unei operații suplimentare pe $\mathbb{C}$,

$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i,$$

numită *înmulțirea numerelor complexe*. Mulțimea $\mathbb{C}$, considerată împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, este corp comutativ. În particular, fiecare număr complex nenul admite un invers

$$(x + yi)^{-1} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

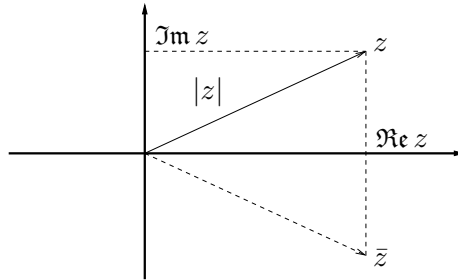


Figura 10.1: Conjugatul unui număr complex

10.1.3 Definiție. Fie $z = x + yi$ un număr complex.

Numărul $\Re z = x$ se numește *partea reală* a lui z .

Numărul $\Im z = y$ se numește *partea imaginară* a lui z .

Numărul $\bar{z} = x - yi$ se numește *conjugatul* lui z .

Numărul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se numește *modulul* lui z .

10.1.4 MATHEMATICA `Re[x+y I]`, `Im[x+y I]`, `Abs[x+y I]`, `Conjugate[x+y I]`

<code>In[1]:=I</code>	$\mapsto$	<code>Out[1]=i</code>	<code>In[5]:=Re[3+4 I]</code>	$\mapsto$	<code>Out[5]=3</code>
<code>In[2]:=Sqrt[-4]</code>	$\mapsto$	<code>Out[2]=2 i</code>	<code>In[6]:=Im[3+4 I]</code>	$\mapsto$	<code>Out[6]=4</code>
<code>In[3]:=(3+2 I)^2</code>	$\mapsto$	<code>Out[3]=5+12 i</code>	<code>In[7]:=Abs[3+4 I]</code>	$\mapsto$	<code>Out[7]=5</code>
<code>In[4]:=(3+2 I)/(5-I)</code>	$\mapsto$	<code>Out[4]=$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$</code>	<code>In[8]:=Conjugate[3+4 I]</code>	$\mapsto$	<code>Out[8]=3-4 i.</code>

10.1.5 Propoziție. *Relațiile*

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \pm z_2} &= \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, & \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{(z^n)} &= (\bar{z})^n, \\ |\bar{z}| &= |z|, & |z|^2 &= z \bar{z}, & \overline{(\bar{z})} &= z, \\ \Re z &= \frac{z + \bar{z}}{2}, & \Im z &= \frac{z - \bar{z}}{2i}, & z &= \Re z + i \Im z. \end{aligned}$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2 și z .

Demonstrație. Relațiile rezultă direct din definiție (v. pag. 216-3).

10.1.6 Oricare ar fi φ și ψ , avem

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) \\ &\quad + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Utilizând notația lui Euler

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

relația anterioară devine

$$e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

10.1.7 Pentru orice număr nenul $z = x + yi$, există $\arg z \in (-\pi, \pi]$ astfel încât

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = |z| e^{i \arg z}.$$

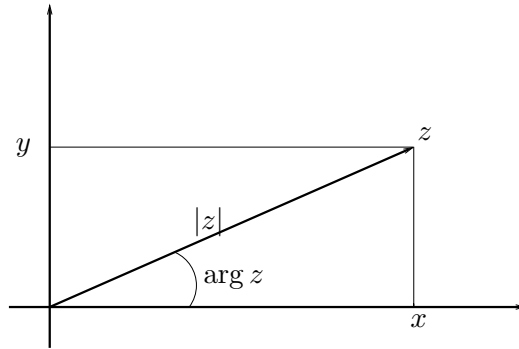


Figura 10.2: Modulul și argumentul unui număr complex

Numărul $\arg z$, numit *argumentul principal* al lui $z = x + yi$, este

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{dacă } x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{dacă } x < 0, \ y > 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{dacă } x < 0, \ y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{dacă } x = 0, \ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dacă } x = 0, \ y < 0. \end{cases}$$

10.1.8 MATHEMATICA `Arg[x+y I], N[Arg[x+y I]]`

`In[1]:=Arg[-1] $\mapsto$ Out[1]= π In[3]:=Arg[2+3 I] $\mapsto$ Out[3]=ArcTan[$\frac{3}{2}$]
In[2]:=Arg[I^15] $\mapsto$ Out[2]=- $\frac{\pi}{2}$ In[4]:=N[Arg[2+3 I],9] $\mapsto$ Out[4]=0.982793723`

10.1.9 Funcția

$$\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi, \pi],$$

unde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, este discontinuă pe semidreapta numerelor reale negative

$$(-\infty, 0) = \{ z \mid \Re z < 0, \Im z = 0 \}$$

deoarece, pentru $x \in (-\infty, 0)$, avem

$$\lim_{y \nearrow 0} \arg(x + yi) = -\pi \quad \text{și} \quad \lim_{y \searrow 0} \arg(x + yi) = \pi.$$

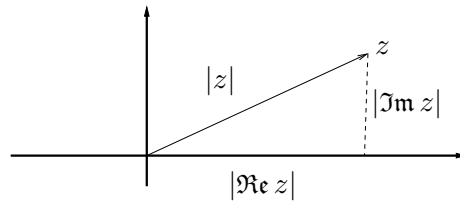


Figura 10.3: Relația între $|z|$, $|\Re z|$ și $|\Im z|$.

10.1.10 Propoziție. Oricare ar fi numărul complex $z = x + yi$, avem

$$\left. \begin{array}{l} |x| \\ |y| \end{array} \right\} \leq |x + yi| \leq |x| + |y|,$$

adică

$$\left. \begin{array}{l} |\Re z| \\ |\Im z| \end{array} \right\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|.$$

Demonstrație. Avem

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|, \quad |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|,$$

iar relația

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

este echivalentă cu relația evident adevărată

$$x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

10.1.11 Propoziție. Aplicația modul $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

este o normă pe spațiul vectorial real $\mathbb{C}$, iar $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

este distanța asociată.

Demonstrație. Oricare ar fi numărul complex $z = x + yi$, avem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

și

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

Dacă α este număr real, atunci

$$|\alpha z| = |(\alpha x) + (\alpha y)i| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2(x^2 + y^2)} = |\alpha| |z|.$$

Oricare ar fi numerele $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$, avem relația

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\Re(z_1 \bar{z}_2)| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

din care rezultă că

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

10.1.12 Dacă considerăm $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu norma uzuală

$$|| \cdot || : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

atunci

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + yi|,$$

ceea ce arată că aplicația liniară

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + yi$$

este un izomorfism de spații vectoriale normate care permite identificarea spațiilor normate $(\mathbb{R}^2, || \cdot ||)$ și $(\mathbb{C}, | \cdot |)$. Dacă se are în vedere doar structura de spațiu vectorial normat, spațiile $(\mathbb{R}^2, || \cdot ||)$ și $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ diferă doar prin notațiile utilizate. Distanța

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dintre două numere $z_1 = x_1 + y_1 i$ și $z_2 = x_2 + y_2 i$ în planul complex corespunde distanței dintre punctele corespunzătoare din planul euclidian (v. Fig. 10.4)

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

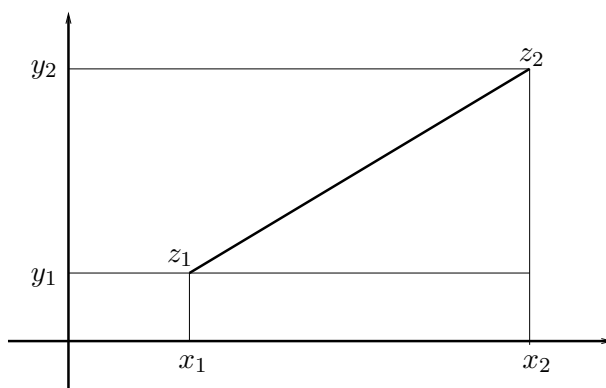


Figura 10.4: Distanța dintre două puncte

10.1.13 În planul complex:

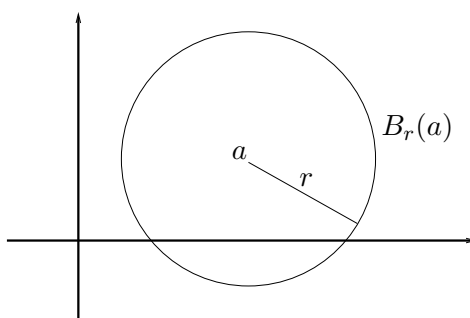
$$|z_1 - z_2| = \text{distanța dintre } z_1 \text{ și } z_2;$$

$$|z| = |z - 0| = \text{distanța dintre } z \text{ și origine.}$$

Fie $a \in \mathbb{C}$ fixat și $r > 0$. Mulțimea

$$B_r(a) = \{ z \mid |z - a| < r \}$$

se numește *discul* (deschis) de centru a și rază r (v. Fig. 10.5).

Figura 10.5: Discul de centru a și rază r

10.1.14 Definiție. Spunem că o mulțime $M \subset \mathbb{C}$ este *mărginită* dacă există $a \in \mathbb{C}$ și $r > 0$ astfel încât $M \subseteq B_r(a)$.

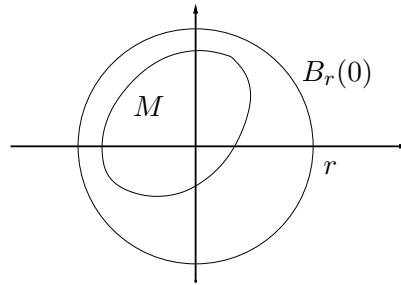


Figura 10.6: Mulțime mărginită.

10.1.15 Exercițiu. Mulțimea M este mărginită dacă și numai dacă există $r > 0$ astfel încât $|z| \leq r$, oricare ar fi $z \in M$.

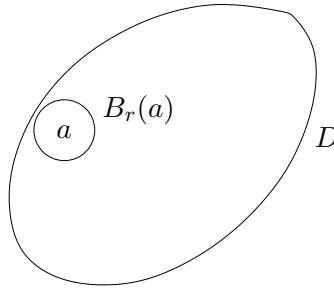


Figura 10.7: Mulțime deschisă.

10.1.16 Definiție. O mulțime $D \subseteq \mathbb{C}$ este numită *mulțime deschisă* dacă, oricare ar fi $a \in D$, există $r > 0$ astfel încât $B_r(a) \subset D$. Spunem că despre o mulțime $F \subseteq \mathbb{C}$ că este *închisă* dacă mulțimea $\mathbb{C} \setminus F$ este deschisă.

10.1.17 Exemple.

- a) Discul $B_1(0)$ este mulțime deschisă.
- b) Semiplanul $\{ z \mid \Im z > 0 \}$ este mulțime deschisă.
- c) Orice mulțime finită $F \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime închisă.
- d) Semiplanul $\{ z \mid \Re z \geq 0 \}$ este mulțime închisă.

10.1.18 Definiție. O mulțime $K \subseteq \mathbb{C}$ este numită *mulțime compactă* dacă este închisă și mărginită.

10.1.19 Exercițiu. Să se arate că relațiile

$$a) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$b) \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|,$$

$$c) \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

au loc oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 .

Rezolvare. a) Avem

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

b) Din

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \quad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

rezultă relația

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

echivalentă cu

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

c) Prin calcul direct obținem

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

10.2 Șiruri de numere complexe

10.2.1 Definiție. Spunem că șirul $(z_n)_{n \geq 0}$ este *convergent* la a și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0.$$

10.2.2 Din relația

$$\left. \begin{array}{l} |x_n - \alpha| \\ |y_n - \beta| \end{array} \right\} \leq |(x_n + y_n i) - (\alpha + \beta i)| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n i) = \alpha + \beta i \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta, \end{cases}$$

adică șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă șirurile de numere reale $(\Re z_n)_{n \geq 0}$ și $(\Im z_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n.$$

10.2.3 Exemplu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} + i \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + e i.$$

10.2.4 MATHEMATICA: Lim[z[n],n->Infinity]

In[1]:=Lim[n/(n+1),n->Infinity]	↦	Out[1]=1
In[2]:=Lim[(1+1/n)^n,n->Infinity]	↦	Out[2]=e
In[3]:=Lim[n/(n+1)+I (1+1/n)^n,n->Infinity]	↦	Out[3]=1+ie

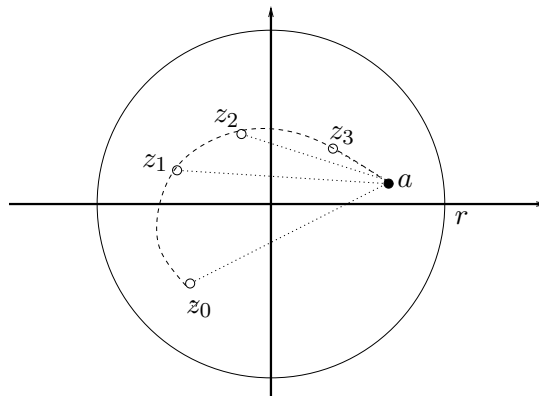


Figura 10.8: Șir mărginit convergent.

10.2.5 Definiție. Un șir $(z_n)_{n \geq 0}$ este *mărginit* dacă există $r > 0$ astfel încât

$$|z_n| \leq r, \quad \text{oricare ar fi } n \geq 0.$$

10.2.6 Din relația

$$\left. \begin{array}{l} |x_n| \\ |y_n| \end{array} \right\} \leq |x_n + y_n i| \leq |x_n| + |y_n|$$

rezultă că șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă șirurile de numere reale $(\Re z_n)_{n \geq 0}$ și $(\Im z_n)_{n \geq 0}$ sunt mărginite.

10.2.7 Exercițiu. Să se arate că:

- a) $|z| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0;$
- b) $|z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z};$
- c) $|z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$

Rezolvare. Avem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |z^n - 0| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}; \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \end{aligned}$$

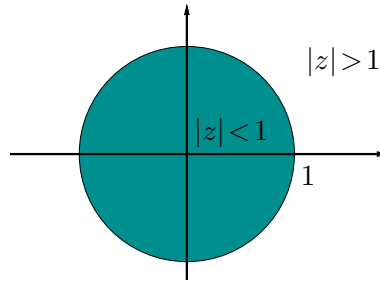


Figura 10.9: Mulțimea numerelor z cu proprietatea $|z| < 1$.

10.2.8 Definiție. Spunem că șirul de numere complexe $(z_n)_{n \geq 0}$ are *limita infinită*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty.$$

10.2.9 Dacă $|z| > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$.

10.3 Funcții complexe de variabilă complexă

10.3.1 Prin *funcție complexă* se înțelege orice funcție cu valori complexe.

10.3.2 Definiție. Spunem că funcția reală de variabilă reală

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este *derivabilă* în punctul $x_0 \in (a, b)$ dacă există și este finită limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

numită *derivata* funcției f în punctul x_0 .

10.3.3 Definiția anterioară nu poate fi extinsă direct la funcțiile de două variabile

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

deoarece relația

$$f'(x_0, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(x, y) - (x_0, y_0)}$$

este fără sens, împărțirea cu vectorul $(x - x_0, y - y_0) = (x, y) - (x_0, y_0)$ nefiind definită. Posibilitatea împărțirii cu un număr complex nenul permite însă definirea derivabilității unei funcții de variabilă complexă urmând direct analogia cu cazul real.

10.3.4 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Spunem că funcția complexă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă (sau *olomorfă*) în punctul $z_0 \in D$ dacă există și este finită limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

numită *derivata* funcției f în punctul z_0 . În loc de $f'(z_0)$, scriem uneori $\frac{df}{dz}(z_0)$.

10.3.5 Exemplu. Funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3,$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă în orice punct $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + z_0 z + z_0^2) = 3z_0^2$$

și $f'(z) = 3z^2$, adică avem

$$(z^3)' = 3z^2.$$

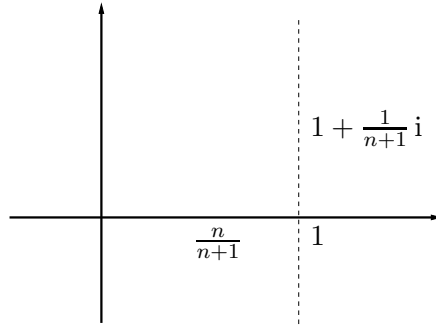


Figura 10.10: Funcția $f(z) = \bar{z}$ nu este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = 1$.

10.3.6 Funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z},$$

nu este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = 1$ deoarece limita

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}$$

nu există. Alegând șirul $z_n = \frac{n}{n+1}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = 1,$$

dar alegând șirul $z_n = 1 + \frac{1}{n+1}i$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_n - 1}{z_n - 1} = -1.$$

10.3.7 Bazându-ne pe identificarea lui $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x + yi \mapsto (x, y),$$

putem descrie orice funcție complexă de o variabilă complexă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu ajutorul a două funcții reale de câte două variabile reale

$$f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

unde

$$u = \Re f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea reală a lui } f,$$

$$v = \Im f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{este partea imaginară a lui } f.$$

10.3.8 Exemple. a) În cazul funcției

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z},$$

avem

$$f(x + yi) = x - yi,$$

adică

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

b) În cazul funcției

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2,$$

avem

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

și prin urmare

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

10.3.9 Conform definiției, funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i,$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = x_0 + y_0i$ dacă și numai dacă există și este finită limita

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Pentru ca

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha + \beta i$$

este necesar ca

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \alpha + \beta i, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ti) - f(z_0)}{ti} = \alpha + \beta i,$$

adică să aibă loc relațiile

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} i = \alpha + \beta i,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{ti} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{ti} i = \alpha + \beta i,$$

echivalente cu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

În particular, dacă f este $\mathbb{C}$ -derivabilă în $z_0 = x_0 + y_0 i$, atunci

$$f'(x_0 + y_0 i) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) i.$$

10.3.10 Teoremă (Cauchy-Riemann) Funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y) i,$$

definită pe mulțimea deschisă $D \subseteq \mathbb{C}$, este $\mathbb{C}$ -derivabilă în punctul $z_0 = x_0 + y_0 i \in D$ dacă și numai dacă funcțiile reale

$$u : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt $\mathbb{R}$ -diferențiabile în (x_0, y_0) și verifică relațiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

În aceste condiții

$$f'(x_0 + y_0 i) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) i.$$

Demonstrație. A se vedea [17].

10.3.11 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Spunem că funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este $\mathbb{C}$ -derivabilă (sau *olomorfa*) dacă este $\mathbb{C}$ -derivabilă în orice punct din D .

10.3.12 Exercițiu. Să se arate ca funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2,$$

este olomorfa și să se determine $f'(z)$.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

și prin urmare

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Funcțiile u și v sunt $\mathbb{R}$ -diferențiabile în orice punct și

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Derivata lui f este

$$f'(x + yi) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)i = 2x + 2yi,$$

adică, $f'(z) = 2z$.

10.3.13 Exercițiu. Să se arate ca funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \bar{z},$$

nu este $\mathbb{C}$ -derivabilă în niciun punct.

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Avem

$$f(x + yi) = x - yi,$$

adică

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

În acest caz, relațiile Cauchy-Riemann nu sunt verificate în niciun punct deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -1.$$

10.3.14 Definiție. Funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z,$$

unde

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

este numită *funcția exponențială* (complexă).

10.3.15 MATHEMATICA: Exp[x+y I], N[Exp[x+y I]]

In[1]:=Exp[x+y I]	↦	Out[1]=e ^{x+iy}
In[2]:=ComplexExpand[Exp[x+y I]]	↦	Out[2]=e ^x Cos[y]+i e ^x Sin[y]
In[3]:=Exp[2+3 I]	↦	Out[3]=e ^{2+3 i}
In[4]:=N[Exp[2+3 I]]	↦	Out[4]=-7.31511+1.04274 i
In[5]:=N[Exp[2+3 I], 15]	↦	Out[5]=-7.31511009490110+1.04274365623590 i

10.3.16 Funcția exponențială este o funcție periodică cu perioada $2\pi i$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

și

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2},$$

oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

10.3.17 Exercițiu. Să se arate ca funcția exponențială

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z,$$

este olomorfa și

$$(e^z)' = e^z.$$

Rezolvare. Utilizăm teorema Cauchy-Riemann. Din relația

$$f(x + yi) = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

rezultă că

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{și} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Funcțiile reale u și v sunt $\mathbb{R}$ -diferențiabile în orice punct și

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Derivata lui f este

$$f'(z) = f'(x + yi) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)i = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

10.3.18 Exercițiu. Să se determine funcția olomorfa

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

care îndeplinește condițiile

$$\Im f(x, y) = 2xy + y, \quad f(i) = i.$$

Rezolvare. Căutând funcția f de forma

$$f(x + yi) = u(x, y) + (2xy + y)i,$$

din teorema Cauchy-Riemann deducem relațiile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y,$$

din care rezultă că $u(x, y) = x^2 - y^2 + x + c$, unde c este o constantă. Impunând condiția suplimentară $f(i) = i$, obținem

$$f(x + yi) = x^2 - y^2 + x + 1 + (2xy + y)i = (x + yi)^2 + (x + yi) + 1,$$

adică $f(z) = z^2 + z + 1$.

10.3.19 a) Dacă funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ sunt olomorfe, atunci

$$(\alpha f \pm \beta g)' = \alpha f' \pm \beta g', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dacă în plus $g(z) \neq 0$, oricare ar fi $z \in D$, atunci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

b) Dacă funcțiile $D \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ sunt olomorfe, atunci

$$\frac{d}{dz}(g(f(z))) = g'(f(z)) f'(z).$$

10.3.20 MATHEMATICA D[f[z], z]

$$\begin{array}{ll} \text{In}[1] := \mathbb{D}[a f[z] + b g[z], z] & \mapsto \text{Out}[1] = a f'[z] + b g'[z] \\ \text{In}[2] := \mathbb{D}[f[z] g[z], z] & \mapsto \text{Out}[2] = f'[z] g[z] + f[z] g'[z] \\ \text{In}[3] := \mathbb{D}[f[z]/g[z], z] & \mapsto \text{Out}[3] = \frac{f'[z]}{g[z]} - \frac{f[z] g'[z]}{g[z]^2} \\ \text{In}[4] := \mathbb{D}[g[f[z]], z] & \mapsto \text{Out}[4] = g'[f[z]] f'[z] \end{array}$$

10.3.21 Exercițiu. Funcțiile complexe

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\text{ch} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\text{sh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

sunt olomorfe și

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\text{ch } z)' = \text{sh } z, \quad (\text{sh } z)' = \text{ch } z.$$

Rezolvare. Calcul direct.

10.3.22 MATHEMATICA $D[f[z], z]$

<code>In[1]:=D[z^n,z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[1]=n z^{-1+n}</code>	<code>In[4]:=D[Exp[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[4]=e^z</code>
<code>In[2]:=D[Cos[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[2]=-Sin[z]</code>	<code>In[5]:=D[Sin[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[5]=Cos[z]</code>
<code>In[3]:=D[Cosh[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[3]=Sinh[z]</code>	<code>In[6]:=D[Sinh[z],z]</code>	$\mapsto$	<code>Out[6]=Cosh[z]</code>

10.3.23 MATHEMATICA Figura 10.11 s-a obținut utilizând

```
In[1]:=Plot[{Exp[x], x, Log[x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle -> {Red, Dashed, Thick},
          AspectRatio -> Automatic]
```

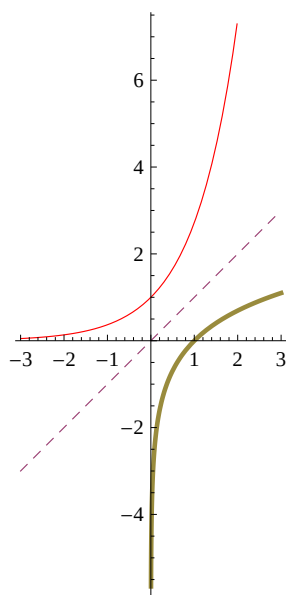


Figura 10.11: Funcția logaritm natural $\ln x$ este inversa funcției exponențiale e^x .

10.3.24 Funcția exponențială reală

$$\mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto e^x$$

este bijectivă. Inversa ei este funcția logaritm natural

$$(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln x.$$

Avem

$$x = e^{\ln x}, \quad \text{oricare ar fi } x \in (0, \infty).$$

În cazul complex, putem obține o relație oarecum similară:

$$z = |z| e^{i \arg z} = e^{\ln |z|} e^{i \arg z} = e^{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)},$$

adevărată oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

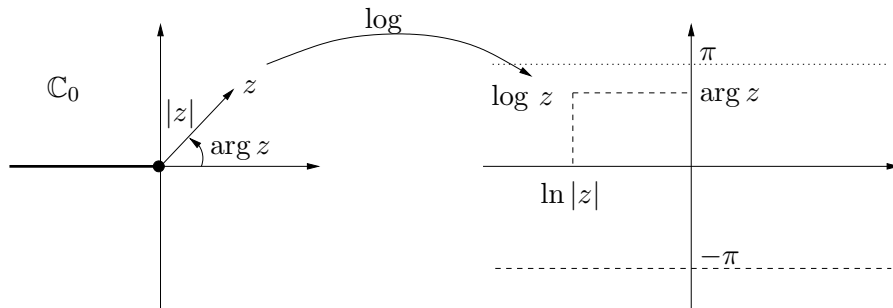


Figura 10.12: Ramura principală $\log z = \ln |z| + i \arg z$.

10.3.25 Definiție. Fie mulțimea

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{ z \mid \Im z = 0, \Re z \leq 0 \}$$

obținută eliminând din $\mathbb{C}$ “tăietura” $\{ z \mid \Im z = 0, \Re z \leq 0 \}$ care unește 0 cu ∞ . Funcțiile continue

$$\log_k : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \log_k z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

depinzând de parametrul $k \in \mathbb{Z}$ sunt numite *ramuri uniforme ale funcției logaritmice*.

Pentru *ramura principală* $\log_0$ se utilizează notația $\log$, adică

$$\log : \mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \log z = \ln |z| + i \arg z.$$

10.3.26 MATHEMATICA ComplexExpand[Log[x+I y]]

In[1]:=ComplexExpand[Log[x+I y]]	↦	Out[1]=i Arg[x+iy]+ $\frac{1}{2}$ Log[x ² +y ²]
In[2]:=ComplexExpand[Log[1+I]]	↦	Out[2]= $\frac{i\pi}{4} + \frac{\text{Log}[2]}{2}$
In[3]:=N[ComplexExpand[Log[1+I]]]	↦	Out[3]=0.346574+0.785398 i
In[4]:=N[ComplexExpand[Log[1+I]],10]	↦	Out[4]=0.3465735903+0.7853981634 i

10.3.27 Deoarece, la nivelul tăieturii $\{ z \mid \Im z = 0, \Re z \leq 0 \}$ avem

$$\lim_{t \nearrow 0} \log(-2 + ti) = \ln 2 - i\pi \quad \text{și} \quad \lim_{t \searrow 0} \log(-2 + ti) = \ln 2 + i\pi,$$

funcția $\log$ nu poate fi prelungită prin continuitate în punctele tăieturii.

10.3.28 MATHEMATICA `Limit[Log[-2 + t I], t -> 0, Direction -> 1]`

`In[1]:=Limit[Log[-2 + t I], t -> 0, Direction -> 1]     $\mapsto$     Out[1]=-i π+Log[2]`

`In[2]:=Limit[Log[-2 + t I], t -> 0, Direction -> -1]     $\mapsto$     Out[2]=i π+Log[2]`

Exercițiu. Să se arate că

$$(\log_k z)' = \frac{1}{z}.$$

Rezolvare. Notând $f(z) = \log_k z = u(x, y) + i v(x, y)$, obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

și prin urmare

$$f'(x + yi) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+yi}.$$

10.3.29 Ramurile uniforme ale funcției putere z^α cu exponent complex α sunt

$$\mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^\alpha = e^{\alpha \log_k z}.$$

În cazul $\alpha = \frac{1}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, există doar n ramuri uniforme distincte

$$\mathbb{C}_0 \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log_k z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} (\arg z + 2k\pi)},$$

de exemplu, cele corespunzătoare lui $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

10.3.30 MATHEMATICA `ComplexExpand[Sqrt[x+I y]]`

`In[1]:=ComplexExpand[Sqrt[x+I y]]`

$\mapsto$ `Out[1]=(x^2+y^2)^{1/4} Cos[1/2 Arg[x+iy]] + i (x^2+y^2)^{1/4} Sin[1/2 Arg[x+iy]]`

`In[2]:=ComplexExpand[Sqrt[1+I]]     $\mapsto$     Out[2]=2^{1/2} Cos[1/8] + i 2^{1/2} Sin[1/8]`

`In[3]:=N[ComplexExpand[Sqrt[1+I]], 10]     $\mapsto$     Out[3]=1.098684113+0.4550898606 i`

`In[4]:=Limit[Sqrt[-1 + I x], x -> 0, Direction -> 1]     $\mapsto$     Out[4]=-i`

`In[5]:=Limit[Sqrt[-1 + I x], x -> 0, Direction -> -1]     $\mapsto$     Out[5]=i`

10.3.31 MATHEMATICA `ComplexExpand[(x + I y)^(1/n)]`

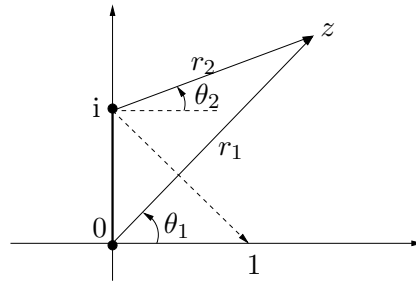
`In[1]:=ComplexExpand[(x + I y)^(1/3)]`

$\mapsto$ `Out[1]=(x^2+y^2)^{1/2n} Cos[Arg[x+iy]/n] + i (x^2+y^2)^{1/2n} Sin[Arg[x+iy]/n]`

10.3.32 Exercițiu. Să se descrie ramura uniformă a funcției

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{i-z}} \quad \text{cu} \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Rezolvare. Pentru ca

Figura 10.13: Relația $z = r_1 e^{i\theta_1} = i + r_2 e^{i\theta_2}$.

$$\frac{z}{i - z} \in \mathbb{C}_0$$

este necesar și suficient ca z să aparțină domeniului

$$D = \mathbb{C} \setminus [0, i] = \mathbb{C} \setminus \{ z \mid \Re z = 0, \ 0 \leq \Im z \leq 1 \},$$

obținut eliminând din $\mathbb{C}$ “tăietura” $[0, i]$. Notând

$$z = r_1 e^{i\theta_1} = i + r_2 e^{i\theta_2},$$

deducem că $i - z = -r_2 e^{i\theta_2} = r_2 e^{i(\theta_2 + \pi)}$ și

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} e^{i \frac{\theta_1 - \theta_2 - \pi + 2k\pi}{3}}.$$

Din $1 = e^{i0} = i + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, rezultă $k = 1$ și prin urmare

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{r_1}{r_2}} e^{i \frac{\theta_1 - \theta_2 + \pi}{3}}.$$

10.4 Integrala complexă

10.4.1 Propoziție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Aplicația

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t) i,$$

este continuă dacă și numai dacă aplicațiile reale

$$\varphi = \Re \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi = \Im \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt continue.

Demonstrație. Afirmația rezultă din relația

$$\left. \begin{array}{l} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \\ |\psi(t) - \psi(t_0)| \end{array} \right\} \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq |\varphi(t) - \varphi(t_0)| + |\psi(t) - \psi(t_0)|.$$

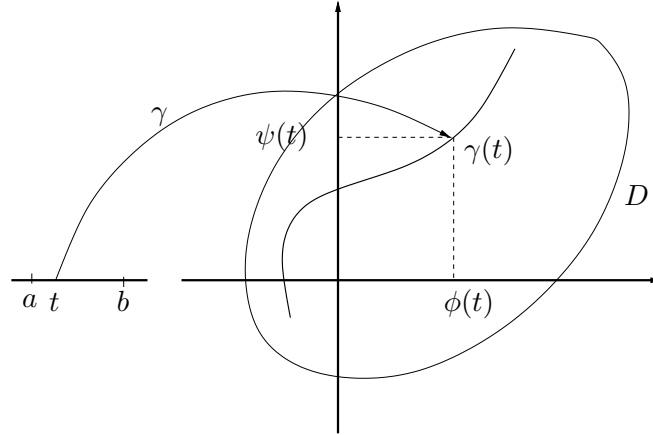


Figura 10.14: Drum de clasă C^1 în D .

10.4.2 Definiție. Spunem că aplicația

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow D$$

este *derivabilă* în punctul $t_0 \in (a, b)$ dacă există și este finită limita

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Spunem că γ este *aplicație derivabilă* dacă este derivabilă în orice punct.

10.4.3 În cazul unei aplicații

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D,$$

prin $\gamma'(a)$ și $\gamma'(b)$ vom înțelege derivatele laterale

$$\gamma'(a) = \lim_{t \searrow a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a}, \quad \gamma'(b) = \lim_{t \nearrow b} \frac{\gamma(t) - \gamma(b)}{t - b}.$$

10.4.4 Propoziție. *Aplicația*

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t) \text{ i,}$$

este derivabilă dacă și numai dacă aplicațiile reale

$$\varphi = \Re \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi = \Im \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt derivabile și

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t)i.$$

Demonstrație. Avem

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} i.$$

10.4.5 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Un *drum de clasă* C^1 în D este o aplicație derivabilă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D,$$

cu derivata $\gamma' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continuă.

10.4.6 Exemple.

a) Oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, aplicația constantă

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z,$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (numit *drum punctual*).

b) Oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 , aplicația

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1 - t)z_1 + tz_2,$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (*drumul liniar* ce leagă z_1 cu z_2).

c) Oricare ar fi $z_0 = x_0 + y_0i \in \mathbb{C}$ și $r > 0$, aplicația

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it} = x_0 + r \cos t + (y_0 + r \sin t)i,$$

este drum de clasă C^1 în $\mathbb{C}$ (numit *drum circular* de rază r și centru z_0).

10.4.7 Definiție. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție continuă și $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un drum de clasă C^1 în D . Prin *integrala complexă* a funcției f de-a lungul drumului γ (v. Fig. 10.16) se înțelege numărul

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

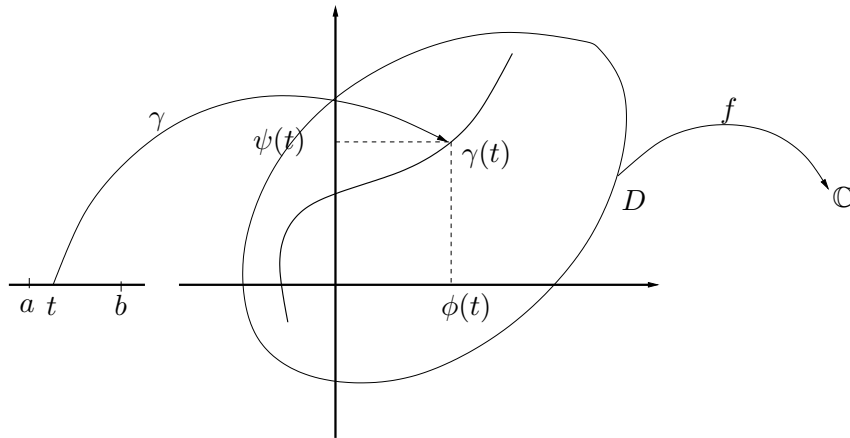
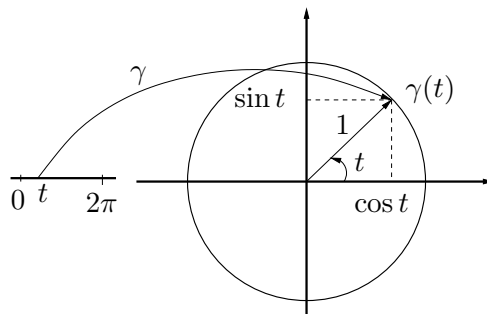


Figura 10.15: Integrala complexă.

Figura 10.16: Drumul $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$.

10.4.8 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z},$$

unde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, și drumul de clasă C^1

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Să se calculeze

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Rezolvare. Deoarece $f(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)} = e^{-it}$ și $\gamma'(t) = ie^{it}$, obținem

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

10.4.9 În cazul unui drum punctual $\gamma(t) = z$, avem $\gamma'(t) = 0$ și prin urmare

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

oricare ar fi funcția f .

10.4.10 Dacă $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ și $\gamma(t) = \varphi(t) + \psi(t)i$, atunci

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) - v(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) + v(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t)] dt. \end{aligned}$$

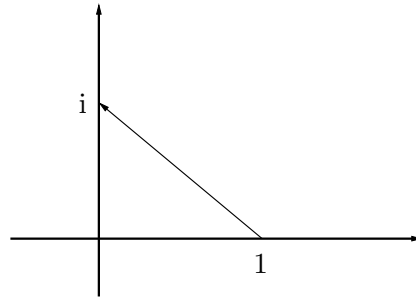


Figura 10.17: Drumul liniar ce leagă 1 cu i .

10.4.11 Exercițiu. Calculați

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz,$$

unde γ este drumul liniar ce leagă $z_1 = 1$ cu $z_2 = i$.

Rezolvare. Deoarece

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = (1 - t)1 + ti,$$

avem relațiile $f(\gamma(t)) = \overline{\gamma(t)} = 1 - t - ti$ și $\gamma'(t) = -1 + i$, din care rezultă

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - t - ti)(-1 + i) dt = \int_0^1 (-1 + 2t) dt + i \int_0^1 dt = i.$$

10.4.12 MATHEMATICA: Integrala pe un drum poligonal

```
In[1]:=Integrate[Conjugate[z], {z, 1, I}]   ↳ Out[1]=i
In[2]:=Integrate[1/z, {z, 1, I, -1, -I, 1}] ↳ Out[2]=2 i π
```

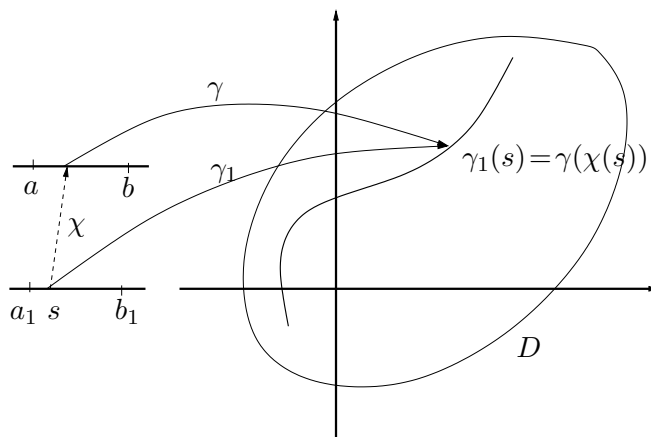


Figura 10.18: Drumuri echivalente.

10.4.13 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime. Spunem că drumurile de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D \quad \text{și} \quad \gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

sunt *echivalente* dacă există o aplicație bijectivă, derivabilă, strict crescătoare

$$\chi : [a_1, b_1] \longrightarrow [a, b]$$

astfel încât

$$\gamma_1(s) = \gamma(\chi(s)), \quad \text{oricare ar fi } s \in [a_1, b_1].$$

10.4.14 Relația definită este o relație de echivalență care permite împărțirea mulțimii drumurilor în clase de echivalență. Fiecare clasă de echivalență corespunde unei *curbe*, elementele clasei fiind numite *parametrizări* ale curbei considerate.

10.4.15 Propoziție. Dacă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție continuă și dacă drumurile de clasă C^1

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow D$$

sunt echivalente, atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz,$$

adică valoarea integralei depinde de curba aleasă și nu de parametrizarea utilizată.

Demonstrație. Folosind metoda schimbării de variabilă, obținem

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s)) \gamma_1'(s) ds \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\chi(s))) \gamma'(\chi(s)) \chi'(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.\end{aligned}$$

10.4.16 Orice drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este echivalent cu un drum definit pe $[0, 1]$ și anume

$$\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow D, \quad \gamma_0(t) = \gamma((1-t)a + tb).$$

10.4.17 Definiție. Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ un drum de clasă C^1 . Drumul

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow D, \quad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t),$$

se numește *inversul* drumului γ .

10.4.18 Propoziție. *Dacă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție continuă și

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

un drum de clasă C^1 în D , atunci

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Demonstrație. Utilizând schimbarea de variabilă $s = a + b - t$, obținem

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = - \int_a^b f(\gamma(a + b - t)) \gamma'(a + b - t) dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz.\end{aligned}$$

10.4.19 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$. Prin *drum de clasă C^1 pe porțiuni* în D se înțelege o aplicație continuă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D,$$

cu proprietatea că există o diviziune $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ astfel încât:

- 1) restricțiile $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ sunt derivabile și cu derivata continuă;
- 2) există și sunt finite limitele

$$\lim_{t \searrow a} \gamma'(t), \quad \lim_{t \searrow t_j} \gamma'(t), \quad \lim_{t \nearrow t_j} \gamma'(t), \quad \lim_{t \searrow b} \gamma'(t)$$

oricare ar fi $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

10.4.20 Drumul considerat este format din drumurile de clasă C^1

$$\gamma_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 = \gamma|_{[t_0, t_1]},$$

$$\gamma_2 : [t_1, t_2] \longrightarrow D, \quad \gamma_2 = \gamma|_{[t_1, t_2]},$$

.....

$$\gamma_n : [t_{n-1}, t_n] \longrightarrow D, \quad \gamma_n = \gamma|_{[t_{n-1}, t_n]},$$

și pentru orice funcție continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},$$

definim *integrala complexă* a funcției f de-a lungul drumului γ ca fiind

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Toate drumurile pe care le vom considera în continuare vor fi drumuri de clasă C^1 pe porțiuni și le numim simplu drumuri.

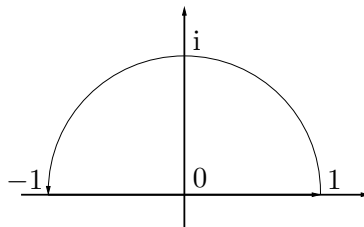


Figura 10.19: Drum de clasă C^1 pe porțiuni.

10.4.21 Exemplu. Aplicația (v. Fig. 10.19)

$$\gamma : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} e^{\pi i t} & \text{dacă } t \in [0, 1], \\ 2t - 3 & \text{dacă } t \in (1, 2], \end{cases}$$

este drum de clasă C^1 pe porțiuni în $\mathbb{C}$ și pentru orice funcție continuă

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

avem

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{\pi i t}) \pi i e^{\pi i t} dt + \int_1^2 f(2t-3) 2 dt.$$

10.4.22 Definiție. Spunem că funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită pe o mulțime deschisă D , admite primitivă în D dacă există

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C},$$

funcție olomorfa cu proprietatea

$$g'(z) = f(z), \quad \text{oricare ar fi } z \in D.$$

10.4.23 Exemple.

a) Dacă $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, atunci funcția

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^k = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{k \text{ ori}},$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1},$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{k+1}}{k+1} \right)' = z^k, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

b) Dacă $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$, atunci funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^{-k} = \frac{1}{z^k},$$

admite în $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^{1-k}}{1-k} = -\frac{1}{(k-1)z^{k-1}},$$

deoarece

$$\left(\frac{z^{1-k}}{1-k} \right)' = z^{-k}, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}^*.$$

c) Funcția exponențială

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z,$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = e^z,$$

deoarece

$$(e^z)' = e^z, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

d) Funcția

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \cos z,$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \sin z,$$

deoarece

$$(\sin z)' = \cos z, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

e) Funcția

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sin z,$$

admite în $\mathbb{C}$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = -\cos z,$$

deoarece

$$(-\cos z)' = \sin z, \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathbb{C}.$$

10.4.24 Propoziție. *Dacă funcția continuă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D o primitivă

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

și dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum conținut în D , atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Demonstrație. Utilizând formula de schimbare de variabilă, obținem

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt = g(\gamma(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = g(z) \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)}.\end{aligned}$$

10.4.25 Din propoziția anterioară, rezultă că în cazul în care funcția

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite primitivă în D , integrala pe un drum

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

conținut în D depinde doar de capetele $\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ ale drumului. Dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D, \quad \gamma_1 : [a, b] \longrightarrow D$$

sunt două drumuri în D astfel încât $\gamma(a) = \gamma_1(a)$ și $\gamma(b) = \gamma_1(b)$, atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

10.4.26 Exercițiu. Să se calculeze integralele

$$\int_{\gamma} z^3 dz, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz, \quad \int_{\gamma} e^z dz, \quad \int_{\gamma} (2z^3 + \frac{5}{z^2} - e^z) dz,$$

γ fiind un drum în $\mathbb{C}^*$ cu originea $z_1 = 1$ și extremitatea $z_2 = i$ (v. Fig. 10.20).

Rezolvare. Fie $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un drum cu originea $z_1 = 1$ și extremitatea $z_2 = i$,

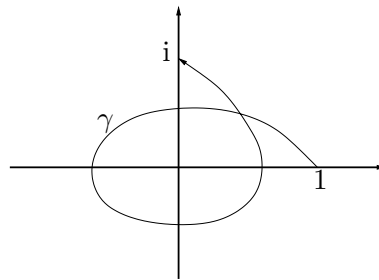


Figura 10.20: Drumul γ cu originea 1 și extremitatea i .

adică astfel încât $\gamma(a) = 1$ și $\gamma(b) = i$. Avem:

$$\int_{\gamma} z^3 dz = \frac{z^4}{4} \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = \frac{z^4}{4} \Big|_{z=1}^{z=i} = \frac{i^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz &= -\frac{1}{z} \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = -\frac{1}{z} \Big|_{z=1}^{z=i} = -\frac{1}{i} + 1 = 1 + i; \\
\int_{\gamma} e^z dz &= e^z \Big|_{z=\gamma(a)}^{z=\gamma(b)} = e^z \Big|_{z=1}^{z=i} = e^i - e = \cos 1 + i \sin 1 - e; \\
\int_{\gamma} (2z^3 + \frac{5}{z^2} - e^z) dz &= 2 \int_{\gamma} z^3 dz + 5 \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz - \int_{\gamma} e^z dz \\
&= 5 + e - \cos 1 + (5 - \sin 1)i.
\end{aligned}$$

10.4.27 Definiție. Spunem că γ este *drum închis* dacă

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

adică *originea* $\gamma(a)$ și *extremitatea* $\gamma(b)$ coincid.

10.4.28 Propoziție. Dacă funcția continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

admite în D o primitivă

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

și dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum închis conținut în D , atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstrație. Deoarece $\gamma(a) = \gamma(b)$, avem

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0.$$

10.4.29 Exercițiu. Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} = \{\dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, atunci

$$\int_{\gamma} z^k dz = 0,$$

dar

$$\int_{\gamma} z^{-1} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

b) Să se arate că

$$\int_{\gamma} \left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \right) dz = 2\pi i a_{-1},$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conținut în mulțimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ și funcția

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^k,$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1},$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

b) Utilizând direct definiția integralei complexe, obținem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

10.4.30 Din exercițiul anterior rezultă că funcția olomorfa

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z},$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C}^*$.

10.4.31 Exercițiu. Fie drumul circular

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

a) Să se arate că dacă $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, atunci

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0,$$

dar

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

b) Să se arate că

$$\int_{\gamma} \left(\frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 \right) dz = 2\pi i a_{-1},$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Rezolvare. a) Drumul γ este conținut în mulțimea deschisă $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ și funcția

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = (z - z_0)^k,$$

admite în $\mathbb{C}^*$ primitiva

$$g : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1},$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

b) Utilizând direct definiția integralei complexe, obținem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} i r e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

10.4.32 Din exercițiul anterior, rezultă că funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = (z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0},$$

nu admite primitivă în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

10.4.33 Definiție. Spunem că mulțimea $D \subseteq \mathbb{C}$ este *conexă* (prin drumuri) dacă, oricare ar fi punctele z_1, z_2 din D , există un drum conținut în D cu originea z_1 și extremitatea z_2 . O mulțime deschisă și conexă este numită *domeniu*.

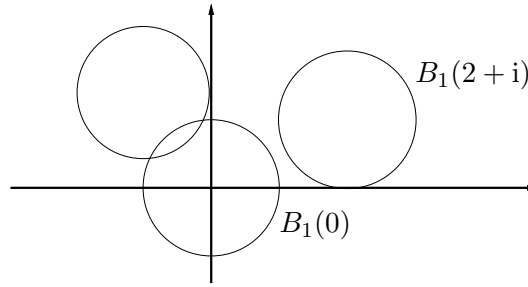


Figura 10.21: Discurile $B_1(0)$, $B_1(2+i)$ și $B_1(-1+i\sqrt{2})$.

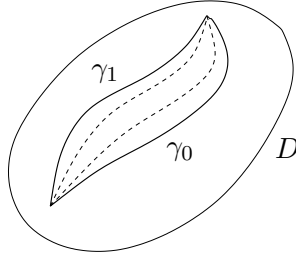
10.4.34 Exemplu. Mulțimea $B_1(0) \cup B_1(-1+i\sqrt{2})$ este domeniu, dar $B_1(0) \cup B_1(2+i)$ nu este domeniu (v. Fig. 10.21).

10.4.35 Știm că orice drum $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ este echivalent cu drumul

$$[0, 1] \longrightarrow D : t \mapsto \gamma((1-t)a + tb).$$

Fără a reduce generalitatea, putem utiliza doar drumuri definite pe intervalul $[0, 1]$.

10.4.36 Definiție. Spunem că drumurile cu aceleași extremități γ_0 și γ_1 sunt *omotope în* domeniul D dacă sunt conținute în D și se pot deforma continuu unul în celălalt fără a ieși din D , adică dacă există o aplicație continuă

Figura 10.22: Drumuri omotope în domeniul D .

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow D : (s, t) \mapsto h(s, t)$$

astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiții:

- a) $h(0, t) = \gamma_0(t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$;
- b) $h(1, t) = \gamma_1(t)$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$;
- c) $h(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, oricare ar fi $s \in [0, 1]$;
- d) $h(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, oricare ar fi $s \in [0, 1]$.

10.4.37 Exemplu. Drumurile $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = e^{2\pi it}, \quad \gamma_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2\pi it},$$

sunt omotope în $D = \mathbb{C} \setminus \bar{B}_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})$. În acest caz putem alege (v. Fig. 10.23)

$$h(s, t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

10.4.38 În continuare, pentru a decide dacă două drumuri sunt omotope în raport cu un anumit domeniu ne vom rezuma la a analiza vizual figura (!).

10.4.39 Exemplu. Drumul circular

$$\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_0(t) = 3e^{2\pi it} = 3\cos 2\pi t + 3i\sin 2\pi t,$$

este omotop în $\mathbb{C}^*$ cu drumul eliptic

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = 3\cos 2\pi t + i\sin 2\pi t,$$

dar cele două drumuri nu sunt omotope în $D = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ (v. Fig. 10.24).

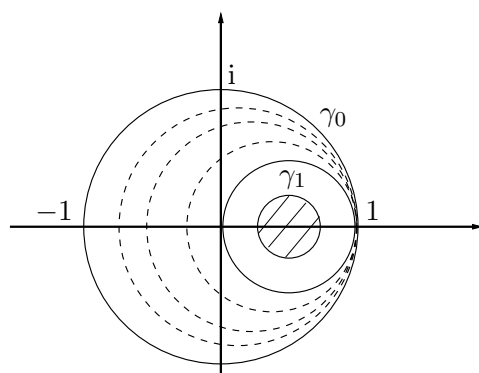


Figura 10.23: Drumuri omotope.

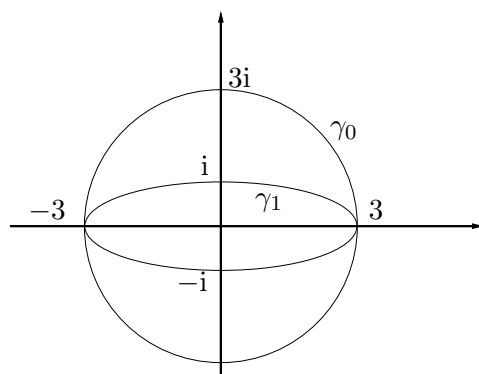


Figura 10.24: Drum circular omotop cu unul eliptic.

10.4.40 Exemplu. Drumurile $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_0(t) = 1 - 2t, \quad \gamma_1(t) = e^{\pi i t}$$

sunt omotope în $\mathbb{C}$, dar nu sunt omotope în $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}i\}$ (v. Fig. 10.25).

10.4.41 Definiție. Spunem că drumul închis

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

este omotop cu zero în D dacă el este omotop în D cu drumul punctual

$$[a, b] \rightarrow D : t \mapsto \gamma(a).$$

10.4.42 Exemplu. Drumul circular

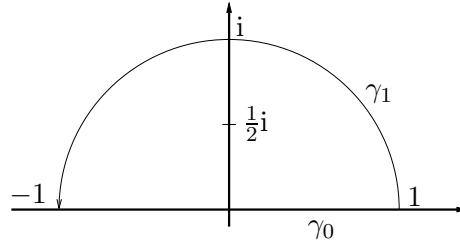


Figura 10.25: Drumurile $\gamma_0(t) = 1 - 2t$ și $\gamma_1(t) = e^{\pi it}$.

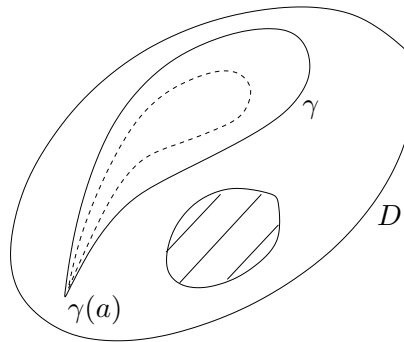


Figura 10.26: Drum omotop cu zero în D .

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{2\pi it},$$

este omotop cu zero în $D = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, dar nu este omotop cu zero în $\mathbb{C}^*$.

10.4.43 Teoremă (Cauchy) Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție olomorfă și

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum închis omotop cu zero în D , atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

O demonstrație poate fi găsită în [17].

10.4.44 Propoziție. Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă,

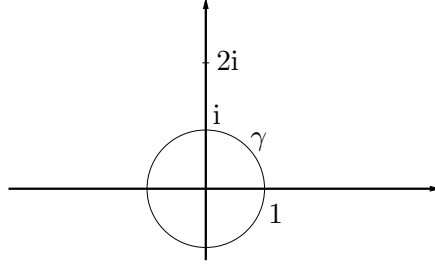


Figura 10.27: Drumul $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi it}$.

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție olomorfă și

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow D, \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$$

sunt două drumuri omotope în D , atunci

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (10.1)$$

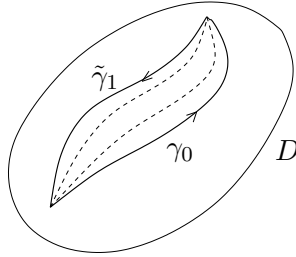


Figura 10.28: Drumurile γ_0 și $\tilde{\gamma}_1$ formează un drum închis.

Demonstrație. Drumul obținut compunând γ_0 cu inversul $\tilde{\gamma}_1$ al drumului γ_1 este un drum închis omotop cu zero în D . Utilizând teorema Cauchy obținem relația

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz = 0.$$

echivalentă cu (10.1).

10.4.45 Fie k un număr întreg pozitiv. Drumul

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + e^{2k\pi it},$$

se rotește de k ori în jurul lui z_0 în sens direct și

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = k.$$

Drumul

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + e^{-2k\pi it},$$

se rotește de k ori în jurul lui z_0 în sens invers și

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = -k.$$

Drumul γ din Fig. 10.29 este omotop în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ cu drumul

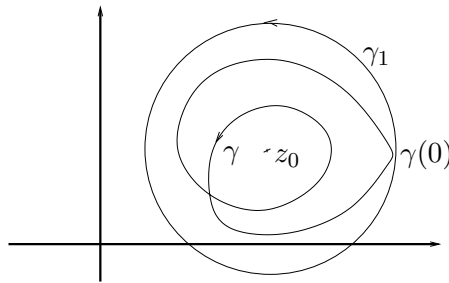


Figura 10.29: Drumul γ are indexul 2 față de z_0 .

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = z_0 + re^{4\pi it},$$

și prin urmare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 2.$$

În general, dacă γ este un drum închis care nu trece prin z_0 numărul

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz,$$

numit *indexul* lui γ față de z_0 , ne arată de câte ori se rotește γ în jurul lui z_0 .

O demonstrație poate fi găsită în [17].

10.4.46 Un drum închis γ determină o partiție a mulțimii punctelor nesituate pe γ formată din submulțimi conexe. Toate punctele aparținând unei componente conexe au același index față de γ (v. Fig. 10.30).

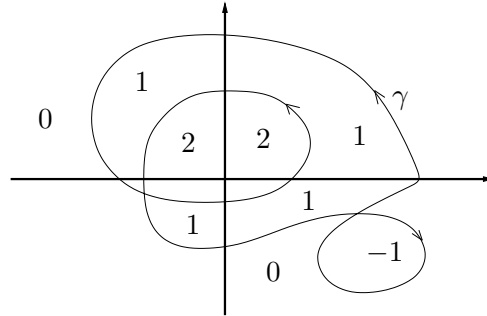


Figura 10.30: Indexul drumului γ față de punctele nesituate pe γ .

10.4.47 Teoremă. (Formulele lui Cauchy) *Orice funcție olomorfă*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe o mulțime deschisă D este nelimitat derivabilă și oricare ar fi drumul

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow D,$$

omotop cu zero în D are loc formula

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și orice $z \in D - \{ \gamma(t) \mid t \in [0, 1] \}$.

O demonstrație poate fi găsită în [17].

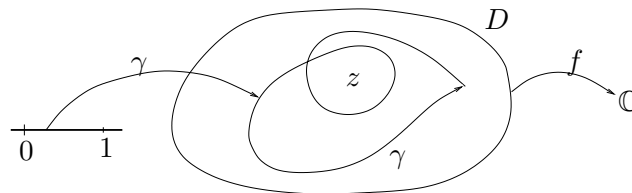


Figura 10.31: Valoarea derivatei $f^{(k)}$ într-un punct z verifică formula lui Cauchy.

10.5 Serii Laurent

10.5.1 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime și

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N},$$

funcții definite pe D . Spunem că seria de funcții complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este *convergentă* (*uniform convergentă*) dacă șirul sumelor parțiale $(s_k)_{k \geq 0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^k f_n,$$

este convergent (respectiv, uniform convergent). Limita acestui șir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_0 + f_1 + \cdots + f_k)$$

se numește *suma seriei*. Spunem că seria considerată este *absolut convergentă* dacă seria de funcții reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

este convergentă.

10.5.2 Propoziție. Dacă $|z| < 1$, atunci seria geometrică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este convergentă și suma ei este $\frac{1}{1-z}$, adică

$$|z| < 1 \quad \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Demonstrație. Dacă $|z| < 1$, atunci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k z^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + z + z^2 + \cdots + z^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

10.5.3 Teoremă. (Weierstrass) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o submulțime și

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N},$$

funcții definite pe D . Dacă există o serie convergentă de numere reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

astfel încât

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n, \quad \text{oricare ar fi } z \in D \text{ și } n \in \mathbb{N},$$

atunci seria de funcții complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

este absolut și uniform convergentă.

10.5.4 Definiție. Prin *serie de puteri* în jurul lui z_0 se înțelege o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coeficienții $a_0, a_1, a_2, \dots$ numere complexe.

Ea mai poate fi scrisă și sub forma

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

10.5.5 Orice serie de puteri este o serie de funcții

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

în care funcțiile f_n au forma particulară

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n(z) = a_n (z - z_0)^n.$$

10.5.6 Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{unde } n \in \mathbb{N},$$

funcții definite pe D . Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform pe compacte la f dacă oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset D$, șirul restricțiilor $f_n|_K$ converge uniform la $f|_K$.

10.5.7 Teoremă (Weierstrass). Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

funcții definite pe D . Dacă funcțiile f_n sunt olomorfe și dacă șirul $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform pe compacte la f , atunci f este funcție olomorfă și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

O demonstrație poate fi găsită în [17].

10.5.8 Teoremă (Weierstrass). Dacă seria de funcții olomorfe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge uniform pe compacte în mulțimea deschisă D , atunci suma ei

$$S : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

este o funcție olomorfă și

$$S^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Afirmația rezultă direct din teorema precedentă.

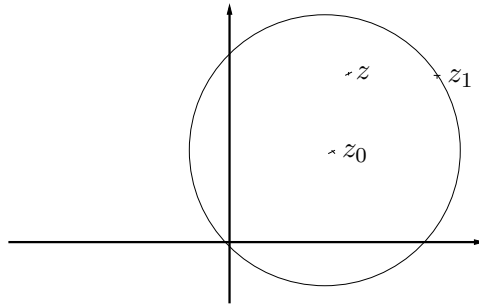


Figura 10.32: Discul de centru z_0 și rază $|z_1 - z_0|$.

10.5.9 Teoremă (Abel). Dacă seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

este convergentă pentru $z = z_1 \neq z_0$, atunci ea este convergentă în discul

$$\{ z \mid |z - z_0| < |z_1 - z_0| \}$$

de centru z_0 și rază $|z_1 - z_0|$.

Demonstrație. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ fiind convergentă, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$$

și prin urmare există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < 1, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0,$$

adică

$$|a_n| < \frac{1}{|z_1 - z_0|^n}, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0.$$

Din relația

$$|a_n(z - z_0)^n| < \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n, \quad \text{oricare ar fi } n \geq n_0,$$

și convergența seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

pentru $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, rezultă (conform criteriului comparației) convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$. Spațiul normat $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ fiind complet, orice serie absolut convergentă este convergentă.

10.5.10 Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Pentru z astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} < 1,$$

adică astfel încât

$$|z - z_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

seria considerată este absolut convergentă conform criteriului rădăcinii.

10.5.11 Teoremă (Cauchy-Hadamard). *În cazul unei serii de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

există

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \notin \{0, \infty\}, \\ \infty & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \end{cases}$$

numit raza de convergență, astfel încât :

a) *În discul (numit disc de convergență)*

$$B_R(z_0) = \{ z \mid |z - z_0| < R \},$$

seria converge absolut și uniform pe compacte.

b) *În $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_R(z_0) = \{ z \mid |z - z_0| > R \}$, seria este divergentă.*

c) *Suma seriei*

$$S : B_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

este funcție olomorvă.

d) *Seria derivată este o serie de puteri cu aceeași rază de convergență și*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad \text{oricare ar fi } z \in B_R(z_0).$$

O demonstrație poate fi găsită în [17].

10.5.12 Se poate arăta că dacă există limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

atunci

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

10.5.13 Exemple.

a) Raza de convergență a seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

este $R = 1$ deoarece în acest caz $a_n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Raza de convergență a seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\text{este } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

10.5.14 Admițând că f este suma unei serii de puteri în jurul lui z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

cu raza de convergență nenulă, din teorema Cauchy-Hadamard rezultă relația

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (z - z_0)^n]^{(k)}, \quad \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N},$$

care conduce la

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

10.5.15 Teoremă (Dezvoltarea în serie Taylor) *Dacă funcția*

$$f : B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este olomorfă în discul $B_r(z_0)$ și R este raza de convergență a seriei Taylor asociate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

atunci $R \geq r$ și

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

oricare ar fi $z \in B_r(z_0)$.

O demonstrație poate fi găsită în [17].

10.5.16 Exemplu. Din teorema dezvoltării în serie Taylor rezultă dezvoltările:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad \text{pentru } |z| < 1;$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}.$$

Din aceste dezvoltări, prin substituție și/sau derivare putem obține alte dezvoltări:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \cdots \quad \text{pentru } |z| < 1;$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots \quad \text{pentru } |z| < 1;$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^{n-1} z^{n-1} = 1 - 2z + 3z^2 - \cdots \quad \text{pentru } |z| < 1;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \quad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}.$$

10.5.17 MATHEMATICA: Series[f[z], {z, z₀, n}]

```

In[1]:=Series[1/(1-z), {z, 0, 5}]  → Out[1]=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+O[z]^6
In[2]:=Series[Exp[z], {z, 0, 6}]   → Out[2]=1+z+z^2/2+z^3/6+z^4/24+z^5/120+z^6/720+O[z]^7
In[3]:=Series[Exp[z], {z, 1, 3}]   → Out[3]=e+e(z-1)+1/2 e(z-1)^2+1/6 e(z-1)^3+O[z-1]^4
In[4]:=Series[Exp[z], {z, I, 3}]   → Out[4]=e^i+e^i(z-i)+1/2 e^i(z-i)^2+1/6 e^i(z-i)^3+O[z-i]^4
In[5]:=Series[Cos[z], {z, 0, 6}]   → Out[5]=1-z^2/2+z^4/24-z^6/720+O[z]^7

```

10.5.18 Definiție. Prin *serie Laurent* în jurul lui z_0 se înțelege o serie de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coeficienții a_n numere complexe. Ea mai poate fi scrisă și sub forma

$$\cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots .$$

10.5.19 Teoremă (Coroana de convergență). Fie seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$,

$$r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

și

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \notin \{0, \infty\} \\ \infty & \text{dacă } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Dacă $r < R$, atunci:

a) În coroana circulară (numită coroana de convergență)

$$\{ z \mid r < |z - z_0| < R \},$$

seria Laurent converge absolut și uniform pe compacte;

b) Seria Laurent diverge în $\{ z \mid |z - z_0| < r \} \cup \{ z \mid |z - z_0| > R \}$;

c) Suma seriei Laurent $S : D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

este funcție olomorfă.

O demonstrație poate fi găsită în [17].

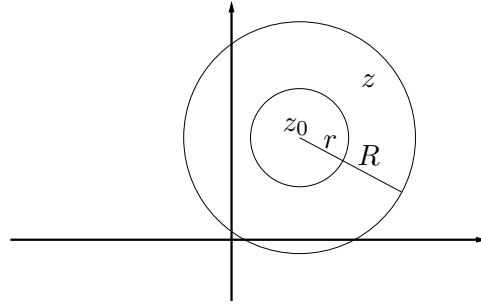


Figura 10.33: Coroana circulară $\{ z \mid r < |z - z_0| < R \}$.

10.5.20 Teoremă (Dezvoltarea în serie Laurent). Dacă funcția

$$f : D = \{ z \mid r < |z - z_0| < R \} \rightarrow \mathbb{C},$$

definită pe coroana D , este olomorfă, atunci există o unică serie Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cu coroana de convergență incluzând pe D și astfel încât

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{oricare ar fi } z \in D.$$

10.5.21 Exemple.

a) Funcția olomorfă

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)},$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} (1+z+z^2+\dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \quad (10.2)$$

b) Funcția olomorfă

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z-i| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^2},$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui i

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-i)^2} = \frac{e^i}{(z-i)^2} e^{z-i} = \frac{e^i}{(z-i)^2} \left(1 + \frac{z-i}{1!} + \frac{(z-i)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \frac{e^i}{(z-i)^2} + \frac{e^i}{z-i} + \frac{e^i}{2!} + \frac{e^i}{3!}(z-i) + \dots \end{aligned} \quad (10.3)$$

c) Funcția olomorfă

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}},$$

admite în coroana D dezvoltarea în serie Laurent în jurul lui 0

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \right) \\ &= \dots + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} z + z^2 + 0 z^3 + 0 z^4 + \dots \end{aligned} \quad (10.4)$$

10.5.22 Definiție. Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă definită pe mulțimea deschisă

D . Spunem că punctul $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ este un *punct singular izolat* al funcției f dacă există $r > 0$ astfel încât coroana circulară $\{ z \mid 0 < |z - z_0| < r \}$ este conținută în D . Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

a lui f în această coroană se numește *reziduul* lui f în punctul singular izolat z_0 și se notează cu $\mathbf{Rez}_{z_0} f$, adică

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1}.$$

10.5.23 Exemple.

a) Singurul punct singular izolat al funcției

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < 1 \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)},$$

este $z = 0$ și din (10.2) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 = 1$.

b) Singurul punct singular izolat al funcției

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z - i| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{(z - i)^2},$$

este $z = i$ și din (10.3) rezultă că $\mathbf{Rez}_i f = e^i$.

c) Singurul punct singular izolat al funcției

$$f : D = \{ z \mid 0 < |z| < \infty \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}},$$

este $z = 0$ și din (10.4) rezultă că $\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

10.5.24 MATHEMATICA: `Series[f[z], {z, a, n}]` , `Residue[f[z], {z, a}]`

```
In[1]:=Series[1/(z^2(1-z)), {z, 0, 4}]    ↳ Out[1]=1/z^2+1/z+1+z+z^2+z^3+z^4+O[z]^5
In[2]:=Residue[1/(z^2(1-z)), {z, 0}]      ↳ Out[2]=1
In[3]:=Series[1/(z^2(1-z)), {z, 1, 2}]    ↳ Out[3]=-1/(z-1)+2-3(z-1)+4(z-1)^2+O[z]^3
In[4]:=Residue[1/(z^2(1-z)), {z, 1}]      ↳ Out[4]=-1
In[5]:=Series[Exp[z]/(z-I)^2, {z, I, 1}]  ↳ Out[5]=e^i/(z-i)^2+e^i/(z-i)+e^i/2+1/6 e^i(z-i)+O[z-i]^2
In[6]:=Residue[Exp[z]/(z-I)^2, {z, I}]    ↳ Out[6]=e^i.
```

10.5.25 Definiție. Fie D o mulțime deschisă și

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

o funcție olomorfă. Prin *zero multiplu de ordinul n* al lui f se înțelege un punct $z_0 \in D$ astfel încât

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{și} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Spunem despre un punct singular izolat z_0 al lui f că este *pol de ordinul n* dacă este zero multiplu de ordinul n pentru funcția $\frac{1}{f}$.

10.5.26 Teoremă. Dacă punctul singular izolat z_0 al funcției olomorfe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ este pol de ordinul n , atunci există $r > 0$ astfel încât coroana circulară

$$\{ z \mid 0 < |z - z_0| < r \}$$

este conținută în D și în această coroană f admite o dezvoltare Laurent de forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

10.5.27 a) Dacă z_0 este pol simplu, atunci în jurul lui z_0 funcția f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Înmulțind cu $(z - z_0)$, obținem relația

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

b) Dacă z_0 este pol dublu, atunci în jurul lui z_0 funcția f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Înmulțind cu $(z - z_0)^2$ și apoi derivând, obținem relația

$$[(z - z_0)^2 f(z)]' = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'.$$

c) Dacă z_0 este pol triplu, atunci în jurul lui z_0 funcția f admite dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

Înmulțind cu $(z - z_0)^3$ și apoi derivând de două ori, obținem relația

$$[(z - z_0)^3 f(z)]'' = 2! a_{-1} + 6a_0(z - z_0) + 12a_1(z - z_0)^2 + \cdots$$

care conduce la

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^3 f(z)]''.$$

d) Dacă z_0 este pol de ordinul n , atunci

$$\mathbf{Rez}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

10.5.28 Exemplu. Funcția

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

are două puncte singulare izolate $z = 0$ și $z = 1$.

Punctul $z = 0$ este pol dublu și

$$\mathbf{Rez}_0 f = \lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)]' = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-z} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1-z)^2} = 1. \quad (10.5)$$

Punctul $z = 1$ este pol simplu și

$$\mathbf{Rez}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z^2} = -1. \quad (10.6)$$

10.6 Calculul integralelor cu ajutorul reziduurilor**10.6.1** Dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

este un drum închis care nu trece prin z_0 , atunci

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left(\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \right) dz \\ = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i a_{-1} n(\gamma, z_0), \end{aligned} \quad (10.7)$$

oricare ar fi numerele $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Punctul z_0 este punct singular izolat (pol de ordinul al doilea) pentru funcția $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2,$$

și $\mathbf{Rez}_{z_0} f = a_{-1}$. Relația (10.7) se mai poate scrie

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i n(\gamma, z_0) \mathbf{Rez}_{z_0} f.$$

10.6.2 Teoremă (Teorema reziduurilor). Dacă $D \subseteq \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o funcție olomorfă, S este mulțimea punctelor singulare izolate ale lui f și dacă

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

este un drum omotop cu zero în $\tilde{D} = D \cup S$, atunci

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in S} n(\gamma, z) \mathbf{Rez}_z f.$$

O demonstrație poate fi găsită în [17].

10.6.3 Exercițiu. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2},$$

unde

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 2e^{2\pi i t}.$$

Rezolvare. Considerăm $D = \mathbb{C} \setminus \{3, i, -i\}$ și funcția olomorfă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{4}{(z^2 + 1)(z - 3)^2}.$$

Mulțimea punctelor singulare izolate ale lui f este $S = \{3, i, -i\}$ și drumul γ este omotop cu zero în $D \cup S = \mathbb{C}$. Conform teoremei reziduurilor, avem

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2} = 2\pi i (n(\gamma, 3) \mathbf{Rez}_3 f + n(\gamma, i) \mathbf{Rez}_i f + n(\gamma, -i) \mathbf{Rez}_{-i} f).$$

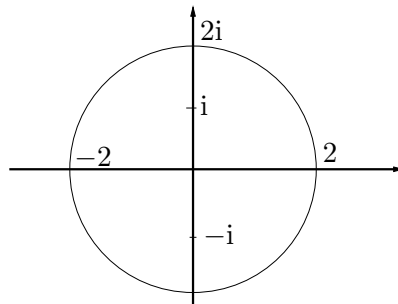


Figura 10.34: Drumul $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$.

Deoarece drumul γ (v. Fig. 10.34) se rotește de zero ori în jurul lui 3 și o singură dată în jurul lui i și $-i$, rezultă că

$$n(\gamma, 3) = 0, \quad n(\gamma, i) = n(\gamma, -i) = 1,$$

și prin urmare

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2} = 2\pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{-i} f).$$

Punctele singulare i și $-i$ fiind poli simpli, avem

$$\mathbf{Rez}_i f = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{4}{(z - 3)^2 (z + i)} = \frac{4}{2i(i - 3)^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i,$$

$$\mathbf{Rez}_{-i} f = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{4}{(z - 3)^2 (z - i)} = \frac{4}{-2i(i + 3)^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

și

$$\int_{\gamma} \frac{4 dz}{(z^2 + 1)(z - 3)^2} = \frac{12}{25} \pi i.$$

10.6.4 MATHEMATICA: Residue[f[z], {z, a}]

$$\begin{aligned} \text{In}[1] := & \text{Residue}[4/((z^2+1)(z-3)^2), \{z, i\}] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1] = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25} \\ \text{In}[2] := & \text{Residue}[4/((z^2+1)(z-3)^2), \{z, -i\}] \quad \mapsto \quad \text{Out}[2] = \frac{3}{25} + \frac{4i}{25} \end{aligned}$$

10.6.5 Exercițiu. Să se calculeze

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz,$$

unde

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{-4\pi i t}.$$

Rezolvare. Considerăm funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3},$$

definită pe mulțimea deschisă $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Punctul singular $z = 0$ este pol de ordinul al treilea. Pentru calculul reziduului lui f în 0 putem utiliza dezvoltarea Laurent în jurul lui 0

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \cdots \end{aligned}$$

sau relația

$$\mathbf{Rez}_0 f = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} (z^3 f(z))'' = \frac{1}{2}.$$

Observând că γ se rotește de două ori în jurul lui 0 în sens invers sau utilizând formula

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = -2,$$

obținem

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i n(\gamma, 0) \operatorname{Rez}_0 f = -2\pi i.$$

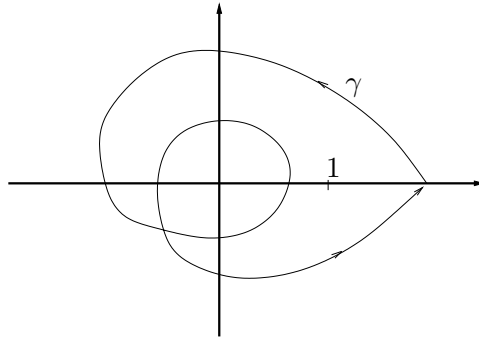


Figura 10.35: Drumul γ .

10.6.6 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz,$$

unde γ este drumul din Figura 10.35.

Rezolvare. Funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)},$$

are punctele singulare $z = 0$ și $z = 1$. Știm că $\operatorname{Rez}_0 f = 1$ (a se vedea relația (10.5)) și $\operatorname{Rez}_1 f = -1$ (a se vedea relația (10.6)). Deoarece drumul γ se rotește de două ori în jurul lui 0 și o dată în jurul lui 1, din teorema reziduurilor rezultă că

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz = 2\pi i (2 \operatorname{Rez}_0 f + \operatorname{Rez}_1 f) = 2\pi i.$$

10.6.7 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt, \quad \text{unde } a \in (1, \infty).$$

Rezolvare. Integrala reală cerută poate fi privită ca o integrală în planul complex și calculată folosind teorema reziduurilor. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} \frac{2}{2a + e^{it} + e^{-it}} (e^{it})' dt \\ &= -i \int_{\gamma} \frac{1}{z} \frac{2}{2a + z + \frac{1}{z}} dz = -i \int_{\gamma} \frac{2}{z^2 + 2az + 1} dz, \end{aligned}$$

unde $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Funcția

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{2}{z^2 + 2az + 1},$$

unde

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

sunt rădăcinile polinomului $z^2 + 2az + 1$, are două puncte singulare izolate (poli simpli) z_1 și z_2 .

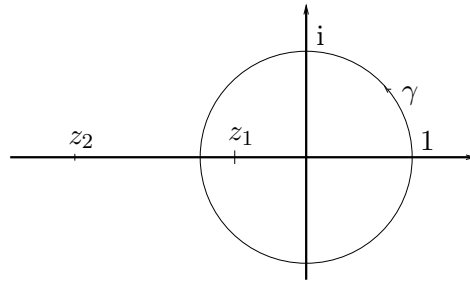


Figura 10.36: Drumul $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.

Deoarece z_1, z_2 sunt numere reale, $-1 < z_1 < 0$ și $z_2 < -1$ rezultă că $n(\gamma, z_1) = 1$ și $n(\gamma, z_2) = 0$ (v. Fig. 10.36). Conform teoremei reziduurilor

$$\begin{aligned} I &= -i \int_{\gamma} \frac{2}{z^2 + 2az + 1} dz = 2\pi \mathbf{Res}_{z_1} f = 2\pi \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= 2\pi \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

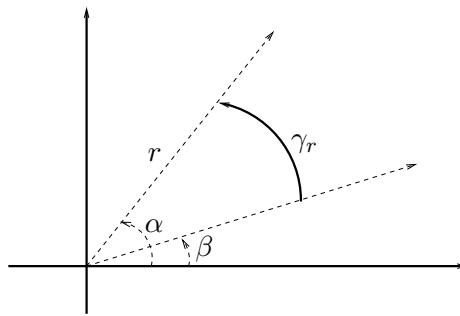


Figura 10.37: Drumurile γ_r .

10.6.8 Propoziție. Fie $\alpha < \beta$ și o funcție continuă

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită pe un domeniu D ce conține imaginile drumurilor (v. Fig. 10.37)

$$\gamma_r : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = re^{it},$$

oricare ar fi $r > 0$. Dacă

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0,$$

atunci

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Demonstrație. Din relația $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, rezultă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$|z| > r_\varepsilon \quad \implies \quad |z f(z)| < \varepsilon.$$

În particular, pentru $r > r_\varepsilon$, avem

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(re^{it}) r i e^{it} dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(re^{it}) r i e^{it}| dt < \varepsilon \int_\alpha^\beta dt = (\beta - \alpha)\varepsilon.$$

10.6.9 Oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, au loc relațiile

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|,$$

care conduc la

$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

adică la

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

10.6.10 Exercițiu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Rezolvare. Integrala I este o integrală reală improprie. Intervalul de integrare este nemărginit dar funcția considerată este mărginită, numitorul neanulându-se pe axa reală. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

integralele

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad \text{și} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

au aceeași natură. Știm însă că integrala improprie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda} dx$$

este convergentă pentru $\lambda > 1$. Rezultă astfel că integrala considerată

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

este convergentă.

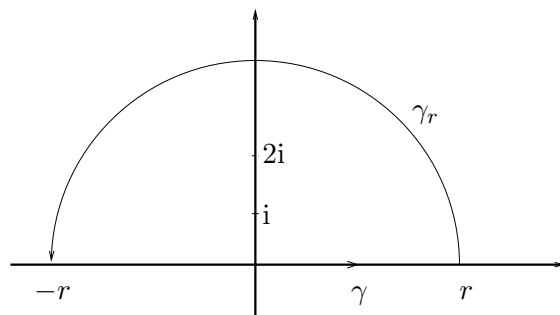


Figura 10.38: Drumurile γ_r .

Pentru a calcula valoarea integralei vom considera funcția olomorfă

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-2i, -i, i, 2i\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)},$$

și drumul de integrare din Fig. 10.38 compus din

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = r e^{it},$$

și

$$\gamma : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = t.$$

Conform teoremei reziduurilor, oricare ar fi $r > 2$, avem relația

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{2i} f)$$

care conduce la

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{2i} f). \quad (10.8)$$

Deoarece

$$|z f(z)| = \frac{|z^3|}{|z^2 + 1| \cdot |z^2 + 4|} = \frac{|z^3|}{|z^2 - (-1)| \cdot |z^2 - (-4)|} \leq \frac{|z|^3}{||z|^2 - 1| \cdot ||z|^2 - 4|},$$

avem

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

și în virtutea rezultatului prezentat la pag. 271-8,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Din relația (10.8), ținând seama și de faptul că $f(-x) = f(x)$, rezultă

$$\int_0^\infty f(x) dx = \pi i (\mathbf{Rez}_i f + \mathbf{Rez}_{2i} f).$$

Dar

$$\mathbf{Rez}_i = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{i}{6},$$

$$\mathbf{Rez}_{2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 2i)} = -\frac{i}{3}$$

și deci

$$\int_0^\infty f(x) dx = \pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

10.6.11 MATHEMATICA: Residue[f[z], {z, a}], Integrate[f[x], {x, a, b}]

```
In[1]:=Residue[z^2/((z^2 + 1) (z^2 + 4)), {z, I}]      ↳ Out[1]= $\frac{i}{6}$ 
In[2]:=Residue[z^2/((z^2 + 1) (z^2 + 4)), {z, I}]      ↳ Out[2]= $-\frac{i}{3}$ 
In[3]:=Integrate[x^2/((x^2 + 1) (x^2 + 4)), {x, 0, Infinity}] ↳ Out[3]= $\frac{i}{6}$ 
```

10.6.12 Exercițiu. Să se arate că

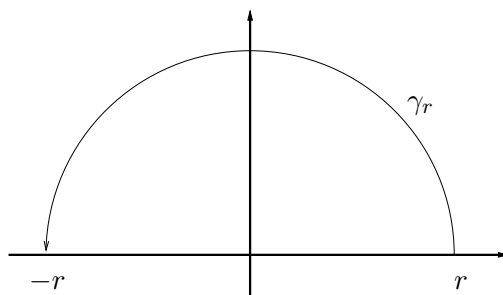
$$1 \geq \frac{\sin t}{t} \geq \frac{2}{\pi}, \quad \text{oricare ar fi } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rezolvare. Funcția

$$\varphi: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t},$$

este descrescătoare deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \leq 0.$$

Figura 10.39: Drumurile γ_r .

10.6.13 Propoziție (Lema lui Jordan). *Dacă funcția continuă*

$$f : \{ z = x + yi \mid y \geq 0 \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este astfel încât

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad (10.9)$$

și

$$\gamma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = r e^{it}$$

(v. Fig. 10.39), atunci

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz = 0$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Din relația (10.9), rezultă că există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$r > r_\varepsilon \quad \implies \quad |f(r e^{it})| < \frac{2\varepsilon}{\pi}$$

și

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(r e^{it}) e^{ir(\cos t + i \sin t)} i r e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi |f(r e^{it})| e^{-r \sin t} r dt \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} r \int_0^\pi e^{-r \frac{2}{\pi} t} dt = \frac{2\varepsilon}{\pi} r \frac{-\pi}{2r} e^{-r \frac{2}{\pi} t} \Big|_0^\pi = \varepsilon(1 - e^{-r}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

10.6.14 Exercițiu (Integrala Poisson). Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (10.10)$$

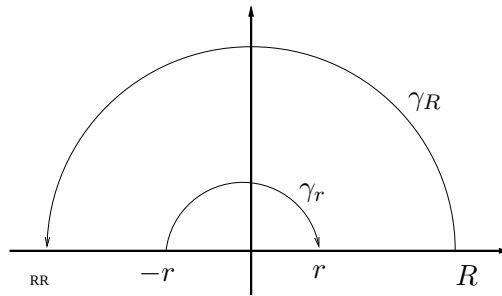


Figura 10.40: Drumul utilizat în cazul integralei Poisson.

Rezolvare. Fie $0 < r < R$ și drumurile (v. Fig. 10.40)

$$\begin{aligned}\gamma_R : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C}, & \gamma_R(t) &= R e^{it}, \\ \gamma_r : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C}, & \gamma_r(t) &= r e^{i(\pi-t)}.\end{aligned}$$

Din teorema reziduurilor (sau teorema Cauchy) rezultă relația

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = 0,$$

care se mai poate scrie

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 0$$

sau

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

Utilizând relația

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = -\pi i$$

și notând cu g o primitivă a funcției $f(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$, obținem

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \pi i + (g(r) - g(-r)) + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

Deoarece, conform lemei lui Jordan,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

pentru $R \rightarrow \infty$ și $r \rightarrow 0$, obținem relația

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi i.$$

10.6.15 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Sin[x]/x, {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[1]=` $\frac{\pi}{2}$

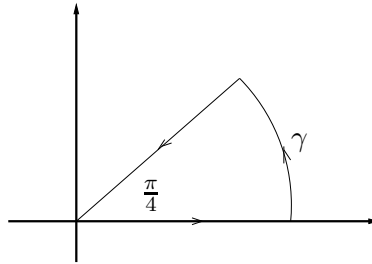


Figura 10.41: Drumul utilizat în cazul integralelor lui Fresnel.

10.6.16 Integralele lui Fresnel. Integrând funcția

$$f(z) = e^{iz^2}$$

de-a lungul drumului din Fig. 10.41, se poate arăta [17] că

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

10.6.17 MATHEMATICA: `Integrate[f[x], {x, a, b}]`

`In[1]:=Integrate[Sin[x^2], {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[1]=` $\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}$

`In[2]:=Integrate[Cos[x^2], {x, 0, Infinity}]` $\mapsto$ `Out[2]=` $\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}$

Capitolul 11

Serii de funcții ortogonale

11.1 Baze ortonormate în spații finit-dimensionale

11.1.1 Definiție. Prin *produs scalar* pe un spațiu vectorial complex H se înțelege o aplicație

$$\langle, \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

astfel încât:

- a) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in H \text{ și } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C};$
- b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in H;$
- c) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H \text{ și } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

11.1.2 Definiție. Un sistem $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de vectori din H este numit *sistem ortonormat* dacă

$$\langle e_n, e_k \rangle = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } n = k, \\ 0 & \text{pentru } n \neq k. \end{cases}$$

Un sistem ortonormat $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ este numit *bază ortonormată* dacă este complet, adică dacă orice vector $x \in H$ se poate scrie sub forma

$$x = \sum_{n=1}^d x_n e_n$$

cu $x_1, x_2, \dots, x_d$ numere complexe.

Numărul d reprezintă dimensiunea spațiului H .

11.1.3 Dacă $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ este bază ortonormată, din

$$\langle e_n, x \rangle = \left\langle e_n, \sum_{k=1}^d x_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^d x_k \langle e_n, e_k \rangle = \sum_{k=1}^d x_k \delta_{nk} = x_n$$

rezultă că are loc relația

$$x = \sum_{n=1}^d \langle e_n, x \rangle e_n, \quad \text{oricare ar fi } x \in H,$$

numită *relație de completitudine*.

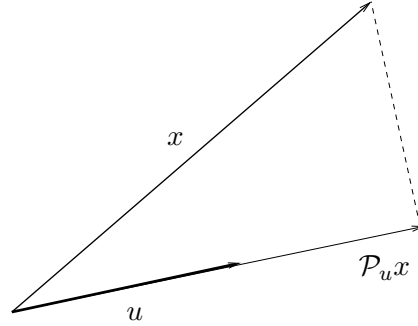


Figura 11.1: Proiecția ortogonală lui x pe u .

11.1.4 Proiecția ortogonală $P_u x$ a unui vector x pe vectorul nenul u este un vector de forma λu (Fig. 11.1). Impunând ca $u \perp (x - \lambda u)$, obținem relația

$$0 = \langle u, x - \lambda u \rangle = \langle u, x \rangle - \lambda \langle u, u \rangle,$$

din care rezultă că $\lambda = \langle u, x \rangle / \langle u, u \rangle$, și prin urmare

$$P_u x = \frac{\langle u, x \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

În particular, dacă $\|u\| = 1$, atunci

$$P_u x = \langle u, x \rangle u.$$

11.1.5 *Notăția lui Dirac.* Fiecare vector $v \in H$ definește o aplicație liniară

$$H \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle v, x \rangle. \quad (11.1)$$

Dacă utilizăm notația Dirac $|v\rangle$ pentru v și notația Dirac $\langle v|$ pentru funcționala (11.1) definită de v , atunci

$$\begin{aligned} x = \sum_{n=1}^d \langle e_n, x \rangle e_n & \quad \text{se poate scrie sub forma} & |x\rangle = \sum_{n=1}^d |e_n\rangle \langle e_n|x\rangle, \\ P_u x = \langle u, x \rangle u & \quad \text{se poate scrie sub forma} & P_u |x\rangle = |u\rangle \langle u|x\rangle. \end{aligned}$$

11.1.6 Operatorul identitate

$$\mathbb{I} : H \longrightarrow H : |x\rangle \mapsto |x\rangle$$

și proiectorul ortogonal

$$P_u : H \longrightarrow H : |x\rangle \mapsto P_u |x\rangle,$$

verifică relațiile

$$\mathbb{I}|x\rangle = \sum_{n=1}^d |e_n\rangle \langle e_n|x\rangle, \quad P_u |x\rangle = |u\rangle \langle u|x\rangle,$$

oricare ar fi $|x\rangle \in H$, și prin urmare

$$\mathbb{I} = \sum_{n=1}^d |e_n\rangle \langle e_n|, \quad P_u = |u\rangle \langle u|.$$

11.1.7 $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ este bază ortonormată dacă și numai dacă verifică condițiile:

$$\langle e_n | e_k \rangle = \delta_{nk} \quad (\text{relația de ortogonalitate}),$$

$$\mathbb{I} = \sum_{n=1}^d |e_n\rangle \langle e_n| \quad (\text{rezoluția identității}).$$

11.1.8 În cazul lui $\mathbb{C}^d$, produsul scalar exprimat utilizând înmulțirea matricelor

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^d \bar{x}_n y_n = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_d) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$$

ne permite să facem identificările

$$|x\rangle = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_d), \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}.$$

11.1.9 În cazul bazei canonice $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ din $\mathbb{C}^2$, rezoluția identității $\mathbb{I} = |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2|$, în scriere matriceală, devine

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1).$$

11.2 Serii Fourier trigonometrice cu perioada 2π

11.2.1 Pe spațiul vectorial complex infinit-dimensional

$$C^0[-\pi, \pi] = \{ \varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ este funcție continuă} \}$$

al funcțiilor continue de forma $\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, unde

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t), \quad (\alpha\varphi)(t) = \alpha \varphi(t),$$

relația

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi(t)} \psi(t) dt$$

definește un produs scalar.

11.2.2 Exercițiu. Să se arate că sistemul infinit de funcții

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots \quad (11.2)$$

din $C^0[-\pi, \pi]$ este un sistem ortonormat.

Rezolvare. Avem

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1,$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nt \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin nt dt = -\frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nt \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos nt dt = \frac{1}{n\pi\sqrt{2}} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\langle \cos nt, \cos nt \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nt) dt = 1,$$

$$\langle \sin nt, \sin nt \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nt) dt = 1,$$

$$\langle \cos nt, \sin nt \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin nt dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nt dt = 0,$$

oricare ar fi n . Pentru $n \neq k$, obținem

$$\begin{aligned}\langle \cos nt, \cos kt \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)t + \cos(n-k)t) \, dt = 0, \\ \langle \sin nt, \sin kt \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k)t - \cos(n+k)t) \, dt = 0, \\ \langle \sin nt, \cos kt \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos kt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+k)t + \sin(n-k)t) \, dt = 0.\end{aligned}$$

11.2.3 Definiție. Un *polinom trigonometric* este o combinație liniară finită de

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots,$$

adică o expresie de forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

O *serie Fourier trigonometrică* este o serie de funcții de forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

unde coeficienții a_n, b_n sunt numere complexe fixate.

11.2.4 Teoremă. Dacă *seria Fourier*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

este uniform convergentă și dacă $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

este suma ei, atunci

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt, \quad \text{oricare ar fi } n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt, \quad \text{oricare ar fi } n \in \{1, 2, 3, \dots\},\end{aligned}\tag{11.3}$$

și are loc egalitatea lui Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) \, dt.\tag{11.4}$$

Demonstrație. Fie $s_k(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Deoarece

$$|s_k(t) \cos nt - \varphi(t) \cos nt| = |\cos nt| \cdot |s_k(t) - \varphi(t)| \leq |s_k(t) - \varphi(t)|,$$

obținem (a se vedea pag. 57-10)

$$s_k \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \varphi \implies s_k \cos nt \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \varphi \cos nt \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_k(t) \cos nt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt.$$

Sistemul de funcții (11.2) fiind ortonormat, avem

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_k(t) \cos nt \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \, dt = \pi a_n, \quad \text{pentru orice } k \geq n.$$

Funcția periodică φ cu perioada 2π , fiind limita unui șir uniform convergent de funcții continue, este continuă și deci mărginită. La fel ca mai sus, $s_k \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \varphi \implies s_k \varphi \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \varphi^2$ și

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) \, dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_k(t) \varphi(t) \, dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \, dt + \sum_{n=1}^k \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \varphi(t) \, dt \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right] = \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]. \end{aligned}$$

11.2.5 Definiție. Fiecărei funcții periodice $\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, pentru care coeficienții

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt \quad (11.5)$$

există, i se asociază seria

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (11.6)$$

numită *seria Fourier* (trigonometrică) a lui φ .

11.2.6

Seria Fourier asociată unei funcții pare este de forma $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$,

iar seria Fourier asociată unei funcții impare este de forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$.

11.2.7 Dacă φ ia doar valori reale atunci coeficienții a_n și b_n sunt numere reale.

În general, coeficienții a_n și b_n sunt numere complexe.

Dacă se modifică valorile funcției φ într-un număr finit de puncte, atunci valorile coeficienților a_n , b_n și seria Fourier asociată nu se schimbă.

Fără a restrânge generalitatea, putem considera doar funcții $\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ satsfăcând condiția $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. Fiecare funcție φ cu această proprietate

poate fi identificată cu funcția periodică $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada 2π obținută folosind prelungirea prin periodicitate.

11.2.8 În cazul în care seria (11.6) este convergentă, relația

$$S(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

definește o funcție $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodică cu perioada 2π .

Pentru ca o funcția $\varphi(t)$ să coincidă cu suma $S(t)$ a seriei Fourier asociate este necesar (nu și suficient) ca ea să fie periodică cu perioada 2π .

11.2.9 Fie φ este o funcție periodică cu perioada 2π . Oricare ar fi $t_0 \in \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{t_0} \varphi(t) \cos kt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{t_0} \varphi(t+2\pi) \cos k(t+2\pi) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{t_0+2\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t) \cos kt \, dt. \end{aligned}$$

Coeficienții Fourier pot fi calculați integrând pe orice interval de lungime 2π :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt, \end{aligned} \quad \text{oricare ar fi } t_0 \in \mathbb{R}.$$

11.2.10 Exercițiu (Funcția “dinți de fierăstrău” (Fig. 11.2)). Să se arate că seria Fourier asociată funcției periodice $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu perioada 2π , definită prin

$$\varphi(t) = t \quad \text{pentru } t \in [-\pi, \pi), \quad (11.7)$$

este

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nt. \quad (11.8)$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părți și relația $\cos n\pi = (-1)^n$, obținem:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt \, dt = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t (\sin nt)' \, dt = \frac{1}{n\pi} t \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt = 0; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t (\cos nt)' \, dt = -\frac{1}{n\pi} t \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt \\ &= -\frac{1}{n\pi} [\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos(-n\pi)] = -\frac{2\pi}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{2}{n} (-1)^n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

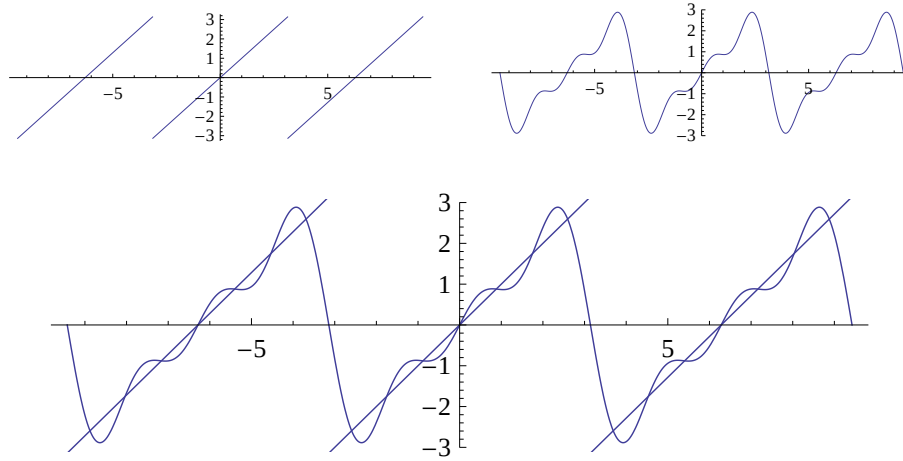


Figura 11.2: Funcția “dintii de fierăstrău” $\varphi(t)$ și suma parțială $S_3(t)$.

11.2.11 MATHEMATICA: `FourierTrigSeries[f[t], t, k]`

`In[1]=FourierTrigSeries[t, t, 4]     $\mapsto$     Out[1]=2 Sin[t] - Sin[2 t] +  $\frac{2}{3}$  Sin[3 t] -  $\frac{1}{2}$  Sin[4 t]`

11.2.12 Din teorema de la pag. 287-22 rezultă că seria (11.8) este convergentă și

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nt = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \in \mathbb{Z}\pi, \\ \varphi(t) & \text{dacă } t \notin \mathbb{Z}\pi. \end{cases}$$

Funcția φ este continuă exceptând punctele $t \in \mathbb{Z}\pi = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Se observă că suma seriei Fourier asociate coincide cu φ doar în punctele în care aceasta este continuă.

11.2.13 În cazul seriei (11.8), deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} = 0,$$

contribuțiile termenilor devin din ce în ce mai mici pe măsură ce n crește.

În Fig. 11.2 și Fig. 11.3 prezentăm funcția φ și sumele parțiale

$$S_3(t) = \sum_{n=1}^3 (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nt \quad \text{și} \quad S_7(t) = \sum_{n=1}^7 (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nt.$$

11.2.14 MATHEMATICA: Figura 11.2 se poate obține cu programul

```

In[1]= phi[t_] := t; k = 3
      a[n_] := (1/Pi) Integrate[phi[t] Cos[ n t], {t, -Pi, Pi}]
      b[n_] := (1/Pi) Integrate[phi[t] Sin[n t], {t, -Pi, Pi}]
      S[t_, k_] = a[0]/2 + Sum[a[n] Cos[ n t ] + b[n] Sin[ n t], {n, 1, k}]
      Plot[phi[Mod[t+Pi, 2 Pi] -Pi], {t,-3 Pi,3 Pi}, AspectRatio -> 0.3]
      Plot[S[t,k], {t,-3 Pi,3 Pi}, AspectRatio -> 0.3]
      Show[{%,%%}]

```

Graficul funcției $S_3(t)$ se poate obține direct cu utilizând

```

In[1]=Plot[FourierTrigSeries[t, t, 3], {t, -3 Pi, 3 Pi}]

```

sau

```

In[1]=Plot[Sum[(-1)^(n-1) (2/n) Sin[n t], {n,1,3}],{t, -3 Pi, 3 Pi}]

```

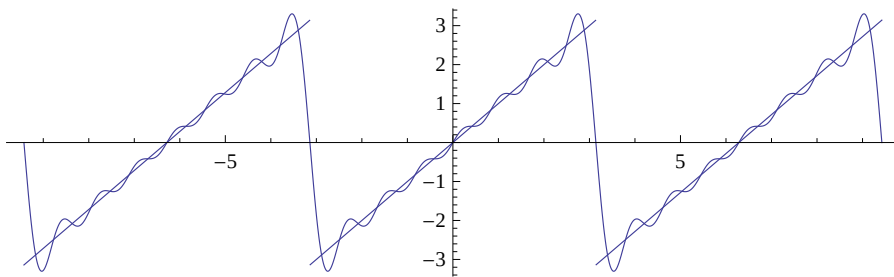


Figura 11.3: Funcția “dinți de fierăstrău” $\varphi(t)$ și suma parțială $S_7(t)$.

11.2.15 În funcție de anumite particularități ale lui φ , se poate ca:

- seria Fourier asociată să fie divergentă,
- seria Fourier asociată să fie convergentă, dar suma ei să nu coincidă cu φ ,
- seria Fourier asociată să fie convergentă și suma ei să coincidă cu φ .

11.2.16 Definiție. Fie $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe intervalul închis $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Spunem că φ este *continuuă pe porțiuni* dacă există o diviziune

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

a intervalului $[a, b]$ astfel încât:

- restricțiile $\varphi|_{(t_{i-1}, t_i)}$ sunt continue, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- limitele laterale $\varphi(t_0+)$, $\varphi(t_1-)$, $\varphi(t_1+)$, $\varphi(t_2-)$, $\dots$, $\varphi(t_n-)$, unde

$$\varphi(t_i-) = \lim_{t \nearrow t_i} \varphi(t), \quad \varphi(t_i+) = \lim_{t \searrow t_i} \varphi(t)$$

există și sunt finite.

11.2.17 Teoremă. Dacă $\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni și

$$p_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

un polinom trigonometric de gradul n ,

atunci cea mai mică valoare a integralei

$$\delta_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(t) - p_n(t)]^2 dt \quad (11.9)$$

se obține în cazul în care α_k și β_k sunt coeficienții Fourier (11.5).

Demonstrație. Utilizând relațiile (11.5), obținem

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) p_n(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} p_n^2(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt - \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt - 2 \sum_{k=1}^n \left[\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ktdt \right. \\ &\quad \left. + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ktdt \right] + \pi \left[\frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt + \pi \left[\frac{1}{2} (\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0) + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - 2\alpha_k a_k - 2\beta_k b_k) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt - \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \\ &\quad + \pi \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

11.2.18 Teoremă. Dacă $\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni și dacă a_n, b_n sunt coeficienții Fourier asociați funcției φ , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ este convergentă și are loc inegalitatea lui Bessel

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt.$$

Demonstrație. În cazul în care $\alpha_k = a_k$ și $\beta_k = b_k$, din (11.9) și (11.10) rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt - \pi \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(t) - p_n(t)]^2 dt \geq 0$$

și

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(t) dt.$$

11.2.19 Dacă $\varphi: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni, atunci din convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ și relațiile

$$0 \leq |a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad 0 \leq |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

11.2.20 Teoremă. Dacă $\varphi: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, derivabilă exceptând eventual un număr finit de puncte, cu derivata φ' continuă pe porțiuni și astfel încât $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, atunci seria Fourier asociată lui f este convergentă și suma ei este φ , adică

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Demonstrație. A se vedea [16], pag 120.

11.2.21 Dacă notăm funcțiile din șirul (11.2) cu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, atunci

$$\langle \varphi_n | \varphi_k \rangle = \delta_{nk},$$

coeficienții seriei Fourier verifică relațiile

$$a_0 = \langle \varphi_0 | \varphi \rangle, \quad a_1 = \langle \varphi_1 | \varphi \rangle, \quad b_1 = \langle \varphi_2 | \varphi \rangle, \quad a_2 = \langle \varphi_3 | \varphi \rangle, \quad b_2 = \langle \varphi_4 | \varphi \rangle, \quad \dots,$$

iar pe spațiul funcțiilor φ cu proprietățile din teoremă, are loc relația

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \varphi \rangle,$$

adică rezoluția identității

$$\mathbb{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|.$$

11.2.22 Teoremă. Dacă $\varphi: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni, derivabilă în intervalele de continuitate și cu derivata φ' continuă pe porțiuni, atunci seria Fourier asociată lui φ

este convergentă în orice punct și

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{\varphi(t-) + \varphi(t+)}{2}.$$

Demonstrație. A se vedea [16], pag 118.

11.2.23 Dacă funcția φ este continuă în punctul x , atunci $\frac{\varphi(t-) + \varphi(t+)}{2} = \varphi(t)$.

11.2.24 Teoremă (A doua teoremă de aproximare a lui Weierstrass).

Orice funcție continuă $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodică cu perioada 2π este limita unui șir uniform convergent de polinoame trigonometrice.

Demonstrație. A se vedea [38], vol.2, pag 119.

11.2.25 Exercițiu. Să se arate că seria Fourier asociată funcției (Fig. 11.4)

$$\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = |t|,$$

este

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t. \quad (11.11)$$

Rezolvare. Avem

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi,$$

iar pentru $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2}{n\pi} [t \sin nt]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nt dt \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos nt \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1); \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin nt dt = 0 \quad (\text{funcție impară}).$$

Funcția obținută prelungind φ prin periodicitate este o funcție continuă deoarece $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$. Din teorema fundamentală (pag. 287-20) rezultă că seria (11.11) este convergentă și suma ei coincide cu φ , adică

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

11.2.26 MATHEMATICA: `FourierTrigSeries[f[t], t, k]`

$$\text{In}[1]=\text{FourierTrigSeries}[\text{Abs}[t], t, 2] \mapsto \text{Out}[1]=\frac{\pi}{2}-\frac{4 \text{Cos}[t]}{\pi}$$

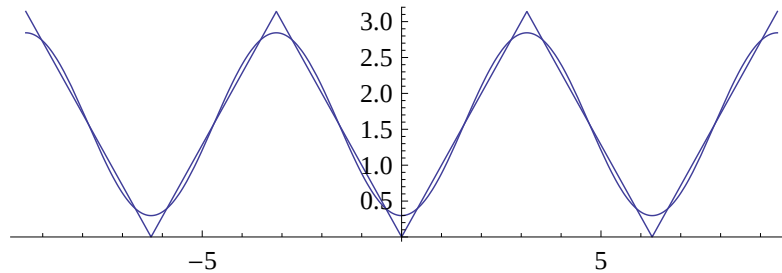


Figura 11.4: Prelungirea periodică a funcției $|t|$ și suma parțială $S_2(t)$.

11.2.27 Exercițiu. Să se arate că seria Fourier asociată funcției (Fig. 11.5)

$$\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t^2,$$

este

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt. \quad (11.12)$$

Rezolvare. Avem

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3},$$

iar pentru $n \neq 0$ se obține:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{2}{n\pi} [t^2 \sin nt]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} t \sin nt dt; \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt dt = \frac{4}{n\pi} [t \cos nt]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nt dt = \frac{4}{n^2} (-1)^n \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin nt dt = 0 \quad (\text{funcție impară}). \end{aligned}$$

Funcția obținută prelungind φ prin periodicitate este o funcție continuă deoarece $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$. Din teorema fundamentală (pag. 287-20) rezultă că seria (11.12) este convergentă și suma ei coincide cu φ , adică

$$\varphi(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

11.2.28 MATHEMATICA: `FourierTrigSeries[f[t], t, k]`

$$\text{In}[1]=\text{FourierTrigSeries}[t^2, t, 2] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1]=\frac{\pi^2}{3}+4(-\text{Cos}[t]+\frac{1}{4}\text{Cos}[2t])$$

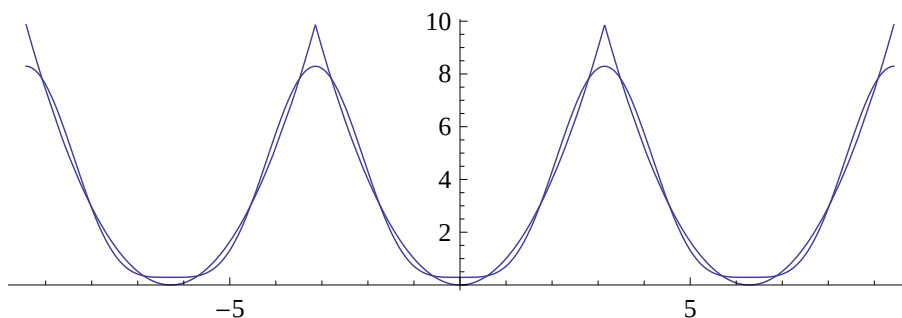


Figura 11.5: Prelungirea periodică a funcției t^2 și suma parțială $S_2(t)$.

11.2.29 Funcția $u_n(x, t) = (\alpha_n \cos nat + \beta_n \sin nat) \sin nx$ verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (11.13)$$

și condițiile la limită

$$u(-\pi, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \quad (11.14)$$

oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ și constantele $a > 0$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Dacă seria este convergentă și poate fi derivată termen cu termen, atunci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nat + \beta_n \sin nat) \sin nx$$

verifică relațiile (11.13), (11.14). Pentru ca u să verifice și condițiile inițiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (11.15)$$

este necesar și suficient ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \sin nx = 0,$$

adică să avem $\beta_n = 0$ și dezvoltarea în serie Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx.$$

11.2.30 În cazul în care coeficienții a_n și b_n sunt numere reale, relația

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nt + \phi_n),$$

unde

$$\tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n} \quad \text{dacă} \quad a_n \neq 0,$$

$$\phi_n = -\frac{\pi}{2} \quad \text{dacă} \quad a_n = 0,$$

ne permite să scriem seria Fourier asociată unei funcții sub forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nt + \phi_n),$$

unde

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \text{ reprezintă } \textit{amplitudinea} \text{ armonice de ordinul } n, \\ \phi_n & \text{ reprezintă } \textit{faza inițială}. \end{aligned}$$

11.3 Serii Fourier cu perioada 2π

11.3.1 Dacă $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție periodică cu perioada 2π , utilizând formulele

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{și} \quad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i},$$

obținem relația

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{int} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-int} \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \end{aligned}$$

unde

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-int} dt,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{int} dt,$$

adică

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-int} dt, \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{Z}.$$

11.3.2 Șirul de funcții periodice cu perioada 2π

$$\dots, e^{-3it}, e^{-2it}, e^{-it}, 0, e^{it}, e^{2it}, e^{3it}, \dots \quad (11.16)$$

este ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi(t)} \psi(t) dt.$$

11.3.3 Definiție. Fiecărei funcții periodice $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada 2π pentru care

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-int} dt$$

există, i se asociază seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (11.17)$$

numită *seria Fourier* a lui φ .

11.3.4 Dacă utilizăm pentru funcțiile din șirul (11.16) notația $\psi_n(t) = e^{int}$, atunci

$$\langle \psi_n, \psi_k \rangle = \delta_{nk},$$

coeficienții seriei Fourier verifică relația

$$c_n = \langle \psi_n, \varphi \rangle,$$

iar seria Fourier (11.6) se poate scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_n, \varphi \rangle \psi_n.$$

11.3.5 Exercițiu. Seria Fourier a funcției “dinti de fierăstrău” este

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{i}{n} e^{int}. \quad (11.18)$$

Rezolvare. Prin calcul direct, pentru $n \neq 0$, obținem

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = -\frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} t (e^{-int})' dt = -\frac{1}{2\pi in} \left[t e^{-int} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi in} \left[\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi} + \frac{1}{in} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi in} \left[2\pi \cos n\pi - \frac{2}{n} \sin n\pi \right] = \frac{i}{n} \cos n\pi = \frac{i}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

11.3.6 MATHEMATICA: `FourierSeries[f[t], t, k]`

$$\text{In}[1]=\text{FourierSeries}[t, t, 2] \quad \mapsto \quad \text{Out}[1]=ie^{-it}-ie^{it}-\frac{1}{2}ie^{-2it}+\frac{1}{2}ie^{2it}$$

11.4 Serii Fourier cu perioada T

11.4.1 Noțiunile și rezultatele prezentate în cazul funcțiilor periodice cu perioada 2π pot fi ușor extinse la funcții periodice cu perioada T , oricare ar fi $T \in (0, \infty)$.

11.4.2 Aplicația

$$\varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow [a, b], \quad \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t,$$

este bijectivă și inversa ei este

$$\varphi^{-1} : [a, b] \longrightarrow [-\pi, \pi], \quad \varphi^{-1}(x) = \frac{\pi}{b-a}(2x - a - b).$$

Fiecare funcție $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cu $f(a) = f(b)$ se poate prelunge prin periodicitate cu perioada $(b-a)$ până la o funcție $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ și $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$, unde

$$f \circ \varphi : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ \varphi)(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t\right),$$

este o funcție periodică cu perioada 2π . Seria corespunzătoare lui $f \circ \varphi$ este

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (11.19)$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t\right) \cos nt \, dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}t\right) \sin nt \, dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) \, dx.$$

Deoarece $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ efectuând în (11.19) substituția $t = \frac{\pi}{b-a}(2x-a-b)$, obținem seria Fourier corespunzătoare lui f

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) + b_n \sin \frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b) \right).$$

11.4.3 Șirul de funcții

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots, \quad (11.20)$$

unde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, este un sistem ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\varphi(t)} \psi(t) \, dt.$$

Seria Fourier asociată unei funcții periodice φ cu perioada T este

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

cu

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \cos n\omega_0 t \, dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \sin n\omega_0 t \, dt,$$

iar seria Fourier este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{cu} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Coeficienții Fourier pot fi calculați integrând pe orice interval de lungime T

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \cos \omega_0 n t \, dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \sin \omega_0 n t \, dt, \quad \text{oricare ar fi } t_0 \in \mathbb{R}.$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) e^{-in\omega_0 t} dt,$$

11.4.4 Cazul $T = 1$. Șirul de funcții

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 4\pi t, \sin 4\pi t, \cos 6\pi t, \sin 6\pi t, \dots \quad (11.21)$$

este un sistem ortonormat în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 2 \int_0^1 \overline{\varphi(t)} \psi(t) \, dt.$$

Seria Fourier trigonometrică asociată unei funcții periodice φ cu perioada $T = 1$ este

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t) \quad \text{cu} \quad \begin{cases} a_n = 2 \int_0^1 \varphi(t) \cos n\omega_0 t \, dt, \\ b_n = 2 \int_0^1 \varphi(t) \sin n\omega_0 t \, dt, \end{cases}$$

iar seria Fourier este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \quad \text{cu} \quad c_n = \int_0^1 \varphi(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

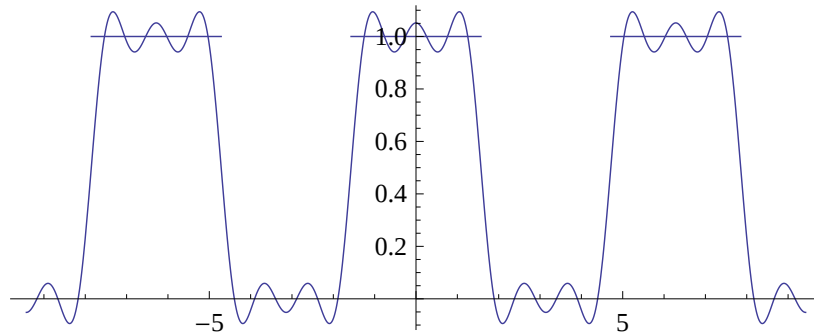


Figura 11.6: Funcția dreptunghiulară în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi$ și suma parțială $S_5(t)$.

11.4.5 Exercițiu (Seria Fourier a funcției dreptunghiulare periodice (Fig. 11.6)).

Fie $0 \leq a \leq T$. Să se arate că seria Fourier asociată funcției periodice $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T și astfel încât

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } -T/2 \leq t \leq -a/2, \\ 1 & \text{pentru } -a/2 \leq t \leq a/2, \\ 0 & \text{pentru } a/2 \leq t \leq T/2, \end{cases}$$

este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(n\omega_0 a/2)}{T n \omega_0} e^{in\omega_0 t}. \quad (11.22)$$

Rezolvare. Avem

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} 1 \, dt = \frac{a}{T},$$

iar pentru $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-in\omega_0 t} dt = -\frac{1}{in\omega_0 T} e^{-in\omega_0 t} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{2}{n\omega_0 T} \frac{e^{in\omega_0 a/2} - e^{-in\omega_0 a/2}}{2i} = \frac{2}{T} \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0}.$$

11.4.6 Coeficienții c_n sunt valorile funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2 \sin(ax/2)}{Tx},$$

în punctele $n\omega_0$ cu $n \in \mathbb{Z}$ (Fig. 11.7).

11.4.7 Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin(n\omega_0 a/2)}{T n \omega_0} = 0,$$

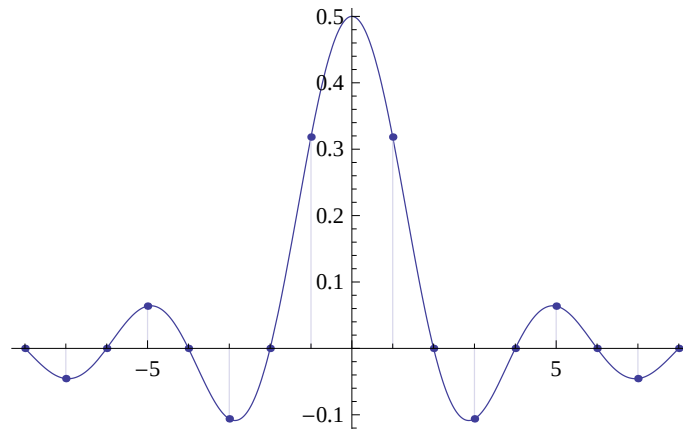


Figura 11.7: Coeficienții c_n și graficul funcției f în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi$.

contribuțiile termenilor devin din ce în ce mai mici pe măsură ce $|n|$ crește.

În Fig. 11.6 și Fig. 11.8 prezentăm sumele parțiale

$$S_5(t) = \sum_{n=-5}^5 \frac{2}{T} \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0} e^{in\omega_0 t} \quad \text{și} \quad S_{10}(t) = \sum_{n=-10}^{10} \frac{2}{T} \frac{\sin(n\omega_0 a/2)}{n\omega_0} e^{in\omega_0 t}$$

în cazul în care $T = 2\pi$ și $a = \pi$.

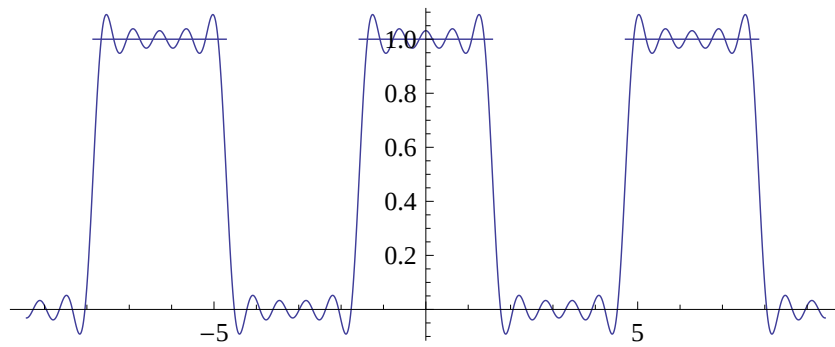


Figura 11.8: Funcția dreptunghiulară în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi$ și suma parțială $S_{10}(t)$.

11.4.8 Exercițiu (Seria Fourier a funcției triunghiulare periodice (Fig. 11.9).

Fie $0 < a \leq T/2$. Să se arate că seria Fourier asociată funcției periodice $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T și astfel încât

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } -T/2 \leq t < -a, \\ 1 + \frac{t}{a} & \text{pentru } -a \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{t}{a} & \text{pentru } 0 < t \leq a, \\ 0 & \text{pentru } a < t \leq T/2, \end{cases}$$

este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2 \omega_0^2 a T} e^{in\omega_0 t}. \quad (11.23)$$

Rezolvare. Avem

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) dt + \frac{1}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) dt = \frac{a}{T},$$

iar pentru $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{in\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega_0} \left[\left(1 - \frac{t}{a}\right) \sin n\omega_0 t \Big|_0^a + \frac{1}{a} \int_0^a \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T n \omega_0} \frac{1}{a} \frac{-1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \Big|_0^a = \frac{2(1 - \cos n\omega_0 a)}{n^2 \omega_0^2 a T} = \frac{4 \sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2 \omega_0^2 a T} \end{aligned}$$

Funcția φ este continuă. Din teorema fundamentală (pag. 287-20) rezultă că seria (11.23) este convergentă și suma ei coincide cu φ , adică

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2 \omega_0^2 a T} e^{in\omega_0 t}, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

11.4.9 Coeficienții c_n sunt valorile funcției

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4 \sin^2(ax/2)}{aTx^2},$$

în punctele $n\omega_0$ cu $n \in \mathbb{Z}$ (Fig. 11.10).

11.4.10 Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{4 \sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2 \omega_0^2 a T} = 0,$$

contribuțiile termenilor devin din ce în ce mai mici pe măsură ce $|n|$ crește.

În Fig. 11.9 prezentăm suma parțială

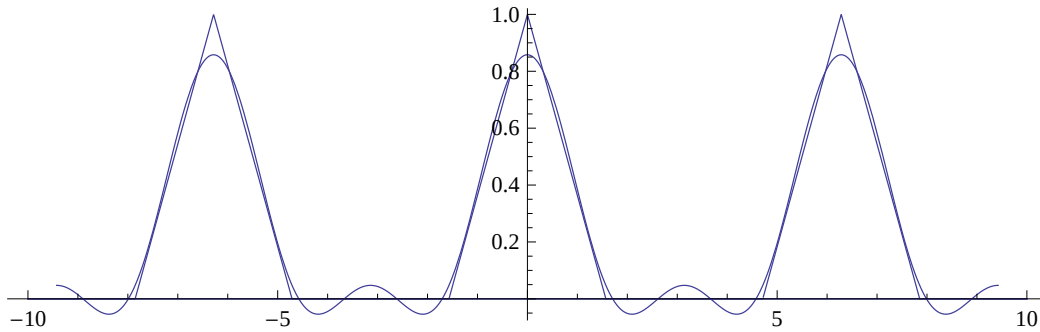


Figura 11.9: Funcția triunghiulară în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi/2$ și suma parțială $S_2(t)$.

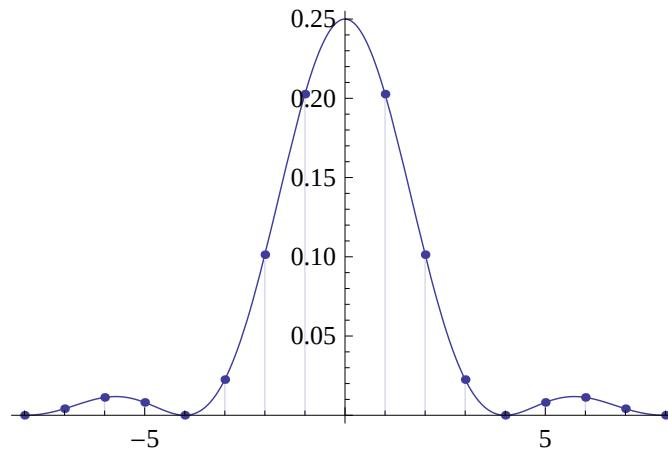


Figura 11.10: Coeficienții c_n și graficul funcției f în cazul $T = 2\pi$, $a = \pi/2$.

$$S_2(t) = \sum_{n=-2}^2 \frac{4 \sin^2(n\omega_0 a/2)}{n^2 \omega_0^2 a T} e^{in\omega_0 t},$$

în cazul $T = 2\pi$ și $a = \pi/2$.

11.4.11 Plecând de la orice funcție continuă pe porțiuni

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

putem considera restricția ei la un subinterval $[\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$, iar apoi putem extinde această restricție la $\mathbb{R}$ prin periodicitate cu perioada $T = \beta - \alpha$.

Seria Fourier corespunzătoare funcției periodice astfel obținute poate fi

determinată utilizând formulele prezentate la pag. 293-3.

În Fig. 11.11 prezentăm prelungirea prin periodicitate (perioada $T = 3$) a restricției funcției $\varphi(t) = t^2$ la intervalul $[-1, 2)$ și suma parțială

$$S_5(t) = \sum_{n=-5}^5 c_n e^{in\frac{2\pi}{3}t}, \quad \text{unde} \quad c_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \varphi(t) e^{-in\frac{2\pi}{3}t} dt.$$

11.4.12 MATHEMATICA: Figura 11.11 s-a obținut cu programul

```
In[1]= phi[t_] := t^2; k := 5
alpha = -1.0; beta = 2.0; T := beta - alpha
c[n_] := (1/T) Integrate[phi[t] Exp[-2 Pi I n t/T], {t, alpha, beta}]
S[t_,k_] = Sum[c[n] Exp[2 Pi I n t/T], {n, -k, k}]
Plot[phi[Mod[t-alpha,T]+alpha], {t, alpha-T, beta+T}, AspectRatio -> 0.3]
Plot[S[t, k], {t, alpha - T, beta + T}, AspectRatio -> 0.3]
Show[{%,%%}]
```

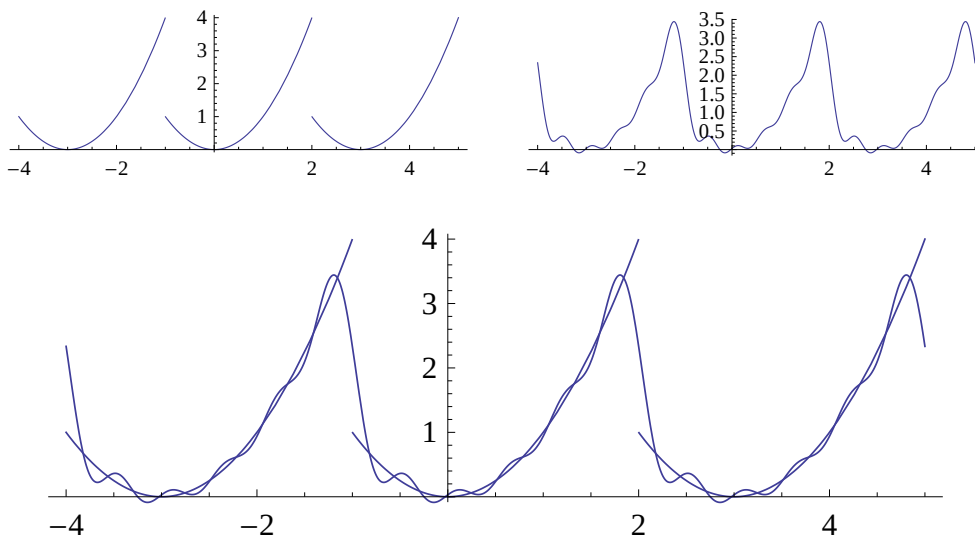


Figura 11.11: Restricția funcției $\varphi(t) = t^2$ la $[-1, 2)$ extinsă prin periodicitate și $S_5(t)$.

11.5 Serii de polinoame Legendre

11.5.1 Teoremă (Metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt). *Dacă $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ este un sistem liniar independent (finit sau infinit), atunci $\{w_1, w_2, w_3, \dots\}$, unde*

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

este un sistem ortogonal, astfel încât spațiul vectorial generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este același cu spațiul vectorial generat de $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

11.5.2 Definiție. Polinoamele $P_0, P_1, P_2 \dots$ satisfăcând condiția

$$P_n(1) = 1,$$

obținute ortogonalizând șirul $1, x, x^2, \dots$ în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-1}^1 \varphi(x) \psi(x) dx,$$

se numesc *polinoame Legendre*.

11.5.3 Exercițiu. Să se determine polinoamele Legendre P_0, P_1 și P_2 .

Rezolvare. Ortogonalizând $1, x, x^2$ rezultă polinoamele

$$Q_0(x) = 1,$$

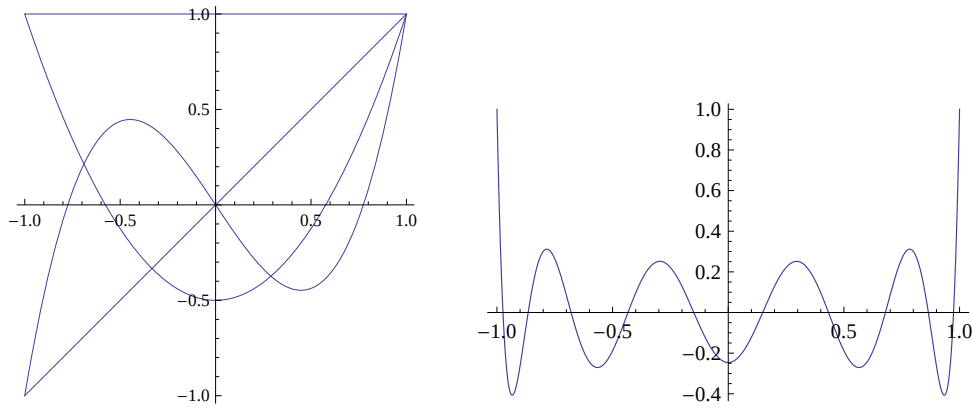
$$Q_1(x) = x - \frac{\langle x, Q_0 \rangle}{\langle Q_0, Q_0 \rangle} Q_0(x) = x,$$

$$Q_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, Q_0 \rangle}{\langle Q_0, Q_0 \rangle} Q_0(x) - \frac{\langle x^2, Q_1 \rangle}{\langle Q_1, Q_1 \rangle} Q_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Obținem polinoamele P_0, P_1, P_2 căutându-le de forma $P_n = \alpha_n Q_n$ cu constantele α_n determinate astfel încât $P_n(1) = 1$. Rezultă $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$ și $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

11.5.4 MATHEMATICA: LegendreP[n, x]

$$\begin{aligned} \text{In}[1] &:= \text{LegendreP}[0, x] && \mapsto && \text{Out}[1] = 1 \\ \text{In}[2] &:= \text{LegendreP}[1, x] && \mapsto && \text{Out}[2] = x \\ \text{In}[3] &:= \text{LegendreP}[2, x] && \mapsto && \text{Out}[3] = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2) \end{aligned}$$

Figura 11.12: Funcțiile P_0 , P_1 , P_2 , P_3 și funcția P_{10} .

11.5.5 Exercițiu. Scrieți $x^2 + x + 1$ ca o combinație liniară de polinoame Legendre.

Indicație. Se determină α_0 , α_1 , și α_2 astfel încât

$$x^2 + x + 1 = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x).$$

11.5.6 Teoremă (Rodrigues). *Polinomul Legendre P_n verifică relația*

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (11.24)$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Avem $\frac{1}{0! 2^0} [(x^2 - 1)^0]^{(0)} = 1 = P_0(x)$. Fie $n > 0$ fixat și fie $\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$. Deoarece $\tilde{P}_n$ este un polinom de gradul n , rezultă că există $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\tilde{P}_n = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n.$$

Avem

$$\langle 1, \tilde{P}_n \rangle = \frac{1}{n! 2^n} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx = \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Dacă $n > 1$, integrând prin părți, obținem

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{P}_n \rangle &= \frac{1}{n! 2^n} \int_{-1}^1 x [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx \\ &= \frac{1}{n! 2^n} x [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{n! 2^n} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} dx = 0 \end{aligned}$$

și în general,

$$\langle x^k, \tilde{P}_n \rangle = 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Din relația precedentă rezultă

$$\langle P_k, \tilde{P}_n \rangle = 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Tinând seama de ortogonalitatea polinoamelor Legendre, obținem relația

$$0 = \langle P_k, \tilde{P}_n \rangle = \langle P_k, \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n \rangle = \alpha_k \langle P_k, P_k \rangle,$$

din care rezultă

$$\alpha_k = 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

și deci $\tilde{P}_n = \alpha_n P_n$. Deoarece $P_n(1) = 1$ și

$$\tilde{P}_n(1) = \frac{1}{n! 2^n} \left[\sum_{j=0}^n C_n^j [(x-1)^n]^{(j)} [(x+1)^n]^{(n-j)} \right]_{x=1} = 1,$$

rezultă că $\alpha_n = 1$ și deci $\tilde{P}_n = P_n$.

11.5.7 Exercițiu. Să se determine P_0 , P_1 și P_2 folosind formula lui Rodrigues.

Rezolvare. Avem:

$$P_0(x) = \frac{1}{0! 2^0} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1! 2^1} \frac{d^1}{dx^1} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} 2x = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2! 2^2} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} (x^4 - 2x^2 + 1)'' = \frac{1}{8} (4x^3 - 4x)' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

11.5.8 Propoziție. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, ecuația polinoamelor Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

admite o soluție polinomială, dar nu admite soluții polinomiale liniar independente.

Demonstrație. Din teoria generală a ecuațiilor diferențiale știm că spațiul soluțiilor ecuației considerate este un spațiu vectorial de dimensiune 2. Dacă ecuația ar admite două soluții polinomiale liniar independente, atunci ele ar forma o bază în spațiul soluțiilor și prin urmare toate soluțiile ar fi polinomiale. Căutând soluții dezvoltabile în serie de puteri

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m,$$

arătăm că ecuația admite atât soluții polinomiale cât și nepolinomiale. Deoarece în domeniul de convergență

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, \quad y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2},$$

înlocuind în ecuație, obținem relația

$$[2c_2 + n(n+1)c_0] + [3 \cdot 2c_3 + (n-1)(n+2)c_1]x + \dots \\ + [(m+2)(m+1)c_{m+2} + (n-m)(m+n+1)c_m]x^m + \dots = 0,$$

din care rezultă

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} + (n-m)(m+n+1)c_m = 0, \quad \text{oricare ar fi } m \in \mathbb{N}.$$

Alegând $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, obținem soluția

$$y_0(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \dots,$$

iar alegând $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, obținem soluția

$$y_1(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots$$

Deoarece

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|c_{m+2}|}{|c_m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m-n)(m+n+1)}{(m+2)(m+1)} = 1,$$

soluțiile y_0 și y_1 sunt convergente pentru $|x^2| < 1$, adică pentru $|x| < 1$. Dacă n este număr par, atunci y_0 este soluție polinomială (seria are un număr finit de coeficienți nenuli) iar y_1 este soluție nepolinomială. Dacă n este număr impar, atunci y_1 este soluție polinomială și y_0 nepolinomială.

11.5.9 Propoziție. Soluția polinomială a ecuației

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

care verifică condiția $y(1) = 1$, este polinomul Legendre P_n .

Demonstrație. Fie $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Avem

$$u' = 2nx \frac{u}{x^2 - 1},$$

adică

$$(x^2 - 1)u' = 2nx u.$$

Derivând relația anterioară de $(k+1)$ ori, folosind formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j f^{(j)} g^{(k+1-j)},$$

obținem

$$(x^2 - 1)u^{(k+2)} + 2(k+1)xu^{(k+1)} + 2\frac{(k+1)k}{2}u^{(k)} = 2nxu^{(k+1)} + 2(k+1)nxu^{(k)}.$$

Înmulțind cu $\frac{1}{n!2^n}$ relația obținută și înlocuind k cu n , rezultă

$$(1 - x^2)(u^{(n)})'' - 2x(u^{(n)})' + n(n+1)u^{(n)} = 0,$$

adică

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

11.5.10 Se știe că, pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, are loc relația

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad \text{unde} \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

11.5.11 Propoziție (Seria binomială).

Dezvoltând în serie Taylor în jurul lui 0 funcția

$$f: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)},$$

obținem pentru orice număr real α și orice $x \in (-1, 1)$ relația

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Demonstrație. Deoarece

$$f^{(n)}(x) = [(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

seria Taylor corespunzătoare lui f ,

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots,$$

este seria de puteri

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

cu raza de convergență

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - n + 1|}{n} = 1.$$

11.5.12 Teoremă (Funcția generatoare).

Pentru $x \in (-1, 1)$ și t într-o vecinătate suficient de mică a lui 0, avem

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Demonstrație. Fie $x \in (-1, 1)$ și γ_x un drum închis care se rotește o dată în jurul lui x în sens direct (a se vedea Figura 11.13).

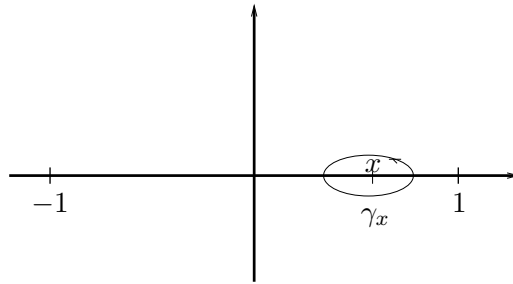


Figura 11.13: Drumul γ_x .

Utilizând formula lui Cauchy, obținem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! 2^n} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_x} \left[\frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)} \right]^n \frac{1}{z - x} dz. \end{aligned}$$

Pentru t într-o vecinătate a lui 0, aleasă astfel încât $\left| \frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)} \right| < 1$, avem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{1}{z - x} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)} \right]^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{1}{z - x} \frac{1}{1 - \frac{(z^2 - 1)t}{2(z - x)}} dz \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_x} \frac{dz}{-tz^2 + 2z + t - 2x}. \end{aligned}$$

Punctele singulare ale funcției f de sub integrală,

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t} \quad \text{și} \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2xt + t^2}}{t},$$

verifică relațiile $\lim_{t \rightarrow 0} z_1 = x$ și $\lim_{t \rightarrow 0} |z_2| = \infty$. Pentru t într-o vecinătate destul de mică a lui 0 din teorema reziduurilor, rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= \frac{1}{\pi i} 2\pi i \operatorname{Rez}_{z_1} f = 2 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{-t(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{-2}{t(z_1 - z_2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \end{aligned}$$

11.5.13 Exercițiu. Să se determine P_0 , P_1 și P_2 folosind funcția generatoare.

Rezolvare. Utilizând dezvoltarea în serie

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

adevărată pentru $|x| < 1$, obținem relația

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= [1 + (-2xt + t^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-2xt + t^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2xt + t^2)^2 + \dots \\ &= 1 + xt + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots, \end{aligned}$$

din care, prin identificare, rezultă $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ și $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

11.5.14 Exercițiu. Să se arate că

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Rezolvare. Relația rezultă din

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x) (-t)^n.$$

11.5.15 Teoremă. Polinoamele Legendre verifică relația de recurență

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (11.25)$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstrație. Derivând în raport cu t relația

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k,$$

obținem relația

$$\frac{-(t-x)}{(1-2xt+t^2)\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x) t^{k-1},$$

care se mai poate scrie

$$(x-t) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k = (1-2xt+t^2) \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x) t^{k-1}.$$

Identificând coeficienții lui t^n din cei doi membri a ultimei identități, obținem relația de recurență din enunțul teoremei.

11.5.16 Teoremă (Norma polinoamelor Legendre). *Avem*

$$\langle P_n, P_{n'} \rangle = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}.$$

Demonstrație. Integrând de n ori prin părți, obținem

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \int_{-1}^1 P_n^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned}$$

Deoarece

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n! 2^n} [(x^2 - 1)^n]^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n! 2^n},$$

avem

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \frac{(2n)!}{n! 2^n} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n! 2^n)^2} I_n,$$

unde

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.$$

Utilizând relația de recurență (obținută integrând prin părți)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(x^2 - 1)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 x \cdot [(x^2 - 1)^n]' dx - I_{n-1} = \frac{-1}{2n} I_n - I_{n-1} \end{aligned}$$

care conduce la

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \cdots = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!},$$

obținem

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n! 2^n)^2} I_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n! 2^n)^2} (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

11.5.17 Teoremă.

Dacă $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ admite dezvoltarea în serie de polinoame Legendre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x), \quad (11.26)$$

atunci

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (11.27)$$

Demonstrație. Din dezvoltarea în serie (11.26), rezultă relația

$$\langle P_k, f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle P_k, P_n \rangle = \alpha_k \|P_k\|^2,$$

care conduce la

$$\alpha_k = \frac{2k+1}{2} \langle P_k, f \rangle = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx.$$

11.5.18 Exercițiu. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcția

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Răspuns (a se vedea [22], pag. 283).

$$|x| = \frac{1}{2} P_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-2)! (4n+1)}{2^{2n} (n-1)! (n+1)!} P_{2n}(x).$$

11.5.19 Exercițiu. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcția

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x}.$$

Răspuns (a se vedea [22], pag. 283).

$$\sqrt{1-x} = \frac{2\sqrt{2}}{3} P_0(x) - 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} P_n(x).$$

11.6 Serii de polinoame Laguerre

11.6.1 Definiție. Polinoamele $L_0^\lambda, L_1^\lambda, L_2^\lambda, \dots$ cu $\lambda > -1$, satisfăcând condițiile

$$L_{2n+1}^\lambda(0) = 0, \quad L_{2n}^\lambda(0) = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n! \Gamma(\lambda+1)},$$

obținute ortogonalizând șirul $1, x, x^2, \dots$ în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) \psi(x) x^\lambda e^{-x} dx,$$

se numesc *polinoame Laguerre*. Se utilizează notația $L_n = L_n^0$.

11.6.2 Exercițiu. Să se determine polinoamele Laguerre $L_0^\lambda, L_1^\lambda, L_2^\lambda$.

Răspuns. Utilizând metoda de la pag. 300-3 se obțin polinoamele

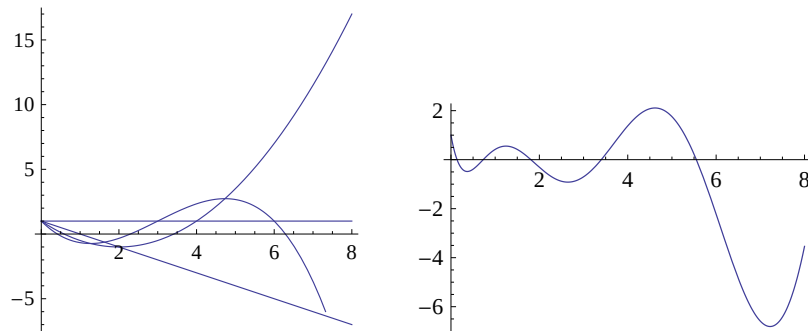
$$L_0^\lambda(x) = 1, \quad L_1^\lambda(x) = -x + \lambda + 1, \quad L_2^\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\lambda+2)x + \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{2}.$$

11.6.3 MATHEMATICA: LaguerreL[n, a, x]

In[1]:=LaguerreL[0, a, x] $\mapsto$ Out[1]=1

In[2]:=LaguerreL[1, a, x] $\mapsto$ Out[2]=1+a-x

In[3]:=LaguerreL[2, a, x] $\mapsto$ Out[3]= $\frac{1}{2}(2+3a+a^2-4x-2ax+x^2)$

Figura 11.14: Funcțiile L_0 , L_1 , L_2 , L_3 și funcția L_{10} .

11.6.4 Teoremă (Rodrigues). *Polinomul Laguerre L_n^λ verifică relația*

$$L_n^\lambda(x) = \frac{1}{n!} x^{-\lambda} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\lambda+n} e^{-x}), \quad (11.28)$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 301-6.

11.6.5 Exercițiu. Să se determine L_0^λ , L_1^λ și L_2^λ folosind formula lui Rodrigues.

11.6.6 Utilizând (11.28), se poate arăta că

$$x(L_n^\lambda)'' + (\lambda + 1 - x)(L_n^\lambda)' + nL_n^\lambda = 0.$$

11.6.7 Teoremă (Funcția generatoare).

Pentru $x \in (0, \infty)$ și $t \in (-1, 1)$, avem

$$\frac{1}{(1-t)^{\lambda+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) t^n.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 305-12.

11.6.8 Teoremă. *Polinoamele Laguerre verifică relația de recurență*

$$(n+1)L_{n+1}^\lambda(x) + (x-\lambda-2n-1)L_n^\lambda(x) + (n+\lambda)L_{n-1}^\lambda(x) = 0,$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 306-15.

11.6.9 Teoremă (Norma polinoamelor Laguerre). *Avem*

$$\langle L_n^\lambda, L_{n'}^\lambda \rangle = \frac{\Gamma(n + \lambda + 1)}{n!} \delta_{nn'}.$$

Demonstrație. Înmulțind dezvoltările în serie

$$\frac{1}{(1-t)^{\lambda+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) t^n \quad \text{și} \quad \frac{1}{(1-t)^{\lambda+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^\lambda(x) t^m,$$

obținem relația

$$\frac{1}{(1-t)^{2\lambda+2}} e^{-\frac{2xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) L_m^\lambda(x) t^{n+m},$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_0^{\infty} L_n^\lambda(x) L_m^\lambda(x) x^\lambda e^{-x} dx &= \frac{1}{(1-t)^{2\lambda+2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2xt}{1-t}} x^\lambda e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(1-t)^{2\lambda+2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1+t}{1-t}x} x^\lambda dx. \end{aligned}$$

Utilizând substituția $u = \frac{1+t}{1-t}x$, obținem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n^\lambda\|^2 t^{2n} &= \frac{1}{(1-t^2)^{\lambda+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^\lambda du = \Gamma(\lambda+1)(1-t^2)^{-\lambda-1} \\ &= \Gamma(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda-1)(-\lambda-2)\dots(-\lambda-n)}{n!} (-t^2)^n \\ &= \Gamma(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n)}{n!} t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{n!} t^{2n}. \end{aligned}$$

11.6.10 Teoremă.

Dacă funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie de polinoame Laguerre,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n L_n^\lambda(x), \quad (11.29)$$

atunci

$$\alpha_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\lambda+1)} \int_0^{\infty} f(x) L_n^\lambda(x) x^\lambda e^{-x} dx. \quad (11.30)$$

Demonstrație. Este este similară cu demonstrația prezentată la pag. 307-17.

11.6.11 Exercițiu. Să se arate că

$$e^{-x} = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} L_n^\lambda(x).$$

Rezolvare. A se vedea [22], pag. 251.

11.7 Serii de polinoame Hermite

11.7.1 Definiție. Polinoamele $H_0, H_1, H_2 \dots$ satisfacând condițiile

$$H_{2n+1}(0) = 0, \quad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!},$$

obținute ortogonalizând șirul $1, x, x^2, \dots$ în raport cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) e^{-x^2} dx,$$

se numesc *polinoame Hermite*.

11.7.2 Exercițiu. Să se determine polinoamele Hermite H_0, H_1, H_2 .

Răspuns. Utilizând metoda de la pag. 300-3, se obțin polinoamele

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

11.7.3 MATHEMATICA: HermiteH[n, x]

```
In[1]:=HermiteH[0, x]  ↳ Out[1]=1
In[2]:=HermiteH[1, x]  ↳ Out[2]=2x
In[3]:=HermiteH[2, x]  ↳ Out[3]=-2+4x2
```

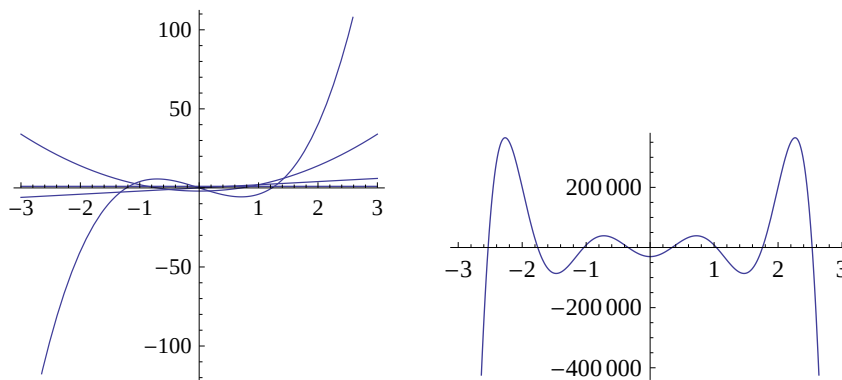


Figura 11.15: Funcțiile H_0, H_1, H_2, H_3 și funcția H_{10} .

11.7.4 Teoremă (Rodrigues). *Polinomul Hermite H_n verifică relația*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad (11.31)$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 301-6.

11.7.5 Exercițiu. Să se determine H_0 , H_1 și H_2 folosind formula lui Rodrigues.

11.7.6 Utilizând (11.28), se poate arăta că

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (11.32)$$

11.7.7 Relația (11.32) verificată de polinomul H_n se poate scrie sub forma

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right) H_n = 2n H_n.$$

Din relațiile

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} &= \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) \frac{d}{dx}, \\ -\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) - 2 \end{aligned}$$

rezultă egalitățile

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx} H_n &= 2(n-1) \frac{d}{dx} H_n, \\ \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right) \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) H_n &= 2(n+1) \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) H_n \end{aligned}$$

care arată că :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_n &\text{ coincide cu } H_{n-1} \text{ până la o constantă multiplicativă;} \\ \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right) H_n &\text{ coincide cu } H_{n+1} \text{ până la o constantă multiplicativă.} \end{aligned}$$

11.7.8 Teoremă (Funcția generatoare). *Avem*

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \quad (11.33)$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 305-12.

11.7.9 Exercițiu. Să se determine H_0 , H_1 și H_2 folosind funcția generatoare.

11.7.10 Exercițiu. Să se arate că

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Rezolvare. Relația rezultă din

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2tx-t^2} = e^{2(-t)(-x)-(-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(-x)}{n!} (-t)^n.$$

11.7.11 Teoremă. *Polinoamele Hermite verifică relația de recurență*

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 306-15.

11.7.12 Teoremă. *Polinoamele Hermite verifică relațiile*

$$\frac{d}{dx}H_n = 2nH_{n-1} \quad \text{și} \quad \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right)H_n = H_{n+1}.$$

Demonstrație. Derivând (11.33) în raport cu x , obținem relația

$$2te^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n,$$

care se mai poate scrie sub forma

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n.$$

Identificând coeficienții, rezultă prima relație din teoremă. Înlocuind în relația de recurență se obține a doua relație din enunț.

11.7.13 Teoremă (Norma polinoamelor Hermite). *Avem*

$$\langle H_n, H_k \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nk},$$

adică are loc relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nk}.$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 309-9.

11.7.14 Teoremă.

Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie de polinoame Hermite,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x), \quad (11.34)$$

atunci

$$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx. \quad (11.35)$$

Demonstrație. Este similară cu demonstrația prezentată la pag. 307-17.

11.7.15 Exercițiu. Să se arate că:

$$\begin{aligned} a) \quad |x| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n} n! (2n-1)} H_{2n}(x); \\ b) \quad \sin tx &= e^{-\frac{t^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)! 2^{2n+1}} H_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

Rezolvare. A se vedea [22], pag. 242-243.

11.7.16 Polinoamele

$$\tilde{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right), \quad (11.36)$$

direct legate de polinoamele Hermite,

$$H_n(x) = \sqrt{2^n} \tilde{H}_n(x\sqrt{2}),$$

verifică relațiile:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_n(x) \tilde{H}_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= n! \sqrt{2\pi} \delta_{nm}, \\ (\tilde{H}_n)'' - x(\tilde{H}_n)' + n\tilde{H}_n &= 0, \\ e^{2tx - \frac{t^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(x)}{n!} t^n, \\ \tilde{H}_{n+1}(x) - x\tilde{H}_n(x) + n\tilde{H}_{n-1}(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \tilde{H}_n &= n \tilde{H}_{n-1}, \\ \left(-\frac{d}{dx} + x\right) \tilde{H}_n &= \tilde{H}_{n+1}. \end{aligned}$$

Capitolul 12

Elemente de teoria distribuțiilor

12.1 Distribuții privite ca limite de șiruri de funcții

12.1.1 Utilizarea modelelor matematice permite o explorare profundă a realității, dar, în general, nu se poate face fără a recurge la anumite idealizări.

În modelele utilizate în fizică, un rol fundamental revine unor noțiuni cum ar fi cele de punct material și de sarcină punctiformă. Deși aceste idealizări conduc la simplificări remarcabile, folosirea lor nu este lipsită de dificultăți. O noțiune cum ar fi *densitatea de masă*, descrisă uzual cu ajutorul unei funcții, nu poate fi extinsă la cazul unui punct material fără a utiliza în locul funcției ceva mai general (funcție generalizată, funcțională, etc.).

12.1.2 Dacă masa unitate este distribuită uniform de-a lungul segmentului $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$, atunci densitatea de masă poate fi descrisă cu ajutorul funcției $\varrho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varrho_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < -\frac{1}{2n}, \\ n & \text{dacă } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{dacă } x > \frac{1}{2n}, \end{cases} \quad (12.1)$$

(extinsă arbitrar în $-\frac{1}{2n}$ și $\frac{1}{2n}$) și avem (Fig. 12.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx = 1.$$

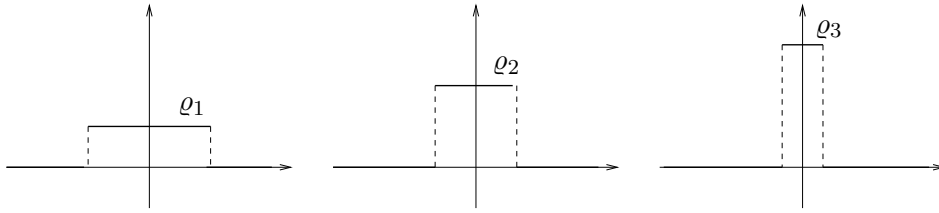


Figura 12.1: Funcțiile ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 definite de (12.1).

Punctul material de masă 1 localizat în $x=0$ corespunde cazului limită $n \rightarrow \infty$, dar limita uzuală

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = 0, \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

nu reprezintă densitatea de masă deoarece expresia

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x)) dx$$

este lipsită de sens.

12.1.3 Limita căutată, pe care o notăm cu $\delta(x)$, ar trebui să verifice relațiile:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pentru orice } x \neq 0$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Din definiția integralei știm însă că dacă o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică relația

$$f(x) = 0 \quad \text{pentru orice } x \neq 0,$$

atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Rezultă că $\delta(x)$ nu poate fi o funcție uzuală de forma $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iar expresia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx$$

nu reprezintă o integrală în sens uzual.

12.1.4 Din faptul că $\varrho_n \rightarrow \delta$ (într-un sens incomplet definit), rezultă că funcția generalizată $\delta(x)$, numită *funcția lui Dirac* (introdusă în 1926), poate fi

aproximată oricât de bine (într-un sens incomplet definit) cu o funcție clasică ϱ_n cu n suficient de mare. De aceea, este de așteptat ca $\delta(x)$ să aibă unele proprietăți asemănătoare cu ale funcțiilor, iar expresia formală

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

să se comporte (în anumite situații) ca o veritabilă integrală.

12.1.5 În cazul utilizării unor concepte care implică utilizarea funcției Dirac (punct material, sarcina punctuală, spectru continuu, etc.) se pot face anumite calcule “aproximând” pe δ cu ϱ_n . Fără o definiție precisă a lui δ și a convergenței $\varrho_n \rightarrow \delta$, decizia dacă o relație referitoare la ϱ_n se păstrează sau nu prin trecere la δ se bazează în mare parte pe intuiție și interpretări fizice.

12.1.6 Dacă $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă în 0, atunci pentru orice $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, există $n_k \in \{k, k+1, k+2, \dots\}$ astfel încât

$$-\frac{1}{2n_k} < x < \frac{1}{2n_k} \implies \varphi(0) - \frac{1}{k} < \varphi(x) < \varphi(0) + \frac{1}{k}.$$

Deoarece $\varrho_{n_k}(x) = 0$ pentru $x < -\frac{1}{2n_k}$ și pentru $x > \frac{1}{2n_k}$, avem

$$\left(\varphi(0) - \frac{1}{k}\right) \varrho_{n_k}(x) \leq \varrho_{n_k}(x) \varphi(x) \leq \left(\varphi(0) + \frac{1}{k}\right) \varrho_{n_k}(x),$$

$$\left(\varphi(0) - \frac{1}{k}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{n_k}(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{n_k}(x) \varphi(x) dx \leq \left(\varphi(0) + \frac{1}{k}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{n_k}(x) dx,$$

$$\varphi(0) - \frac{1}{k} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{n_k}(x) \varphi(x) dx \leq \varphi(0) + \frac{1}{k},$$

adică are loc relația

$$-\frac{1}{k} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{n_k}(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

care sugerează că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

12.1.7 Similar, se poate argumenta faptul că funcția Dirac cu suportul în x_0 ,

$$\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0),$$

verifică relația formală

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0),$$

și că

$$\begin{aligned} x \delta(x) &= 0, & \delta(-x) &= \delta(x), \\ f(x) \delta(x - x_0) &= f(x_0) \delta(x - x_0), & \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \text{ pentru } a \neq 0. \end{aligned}$$

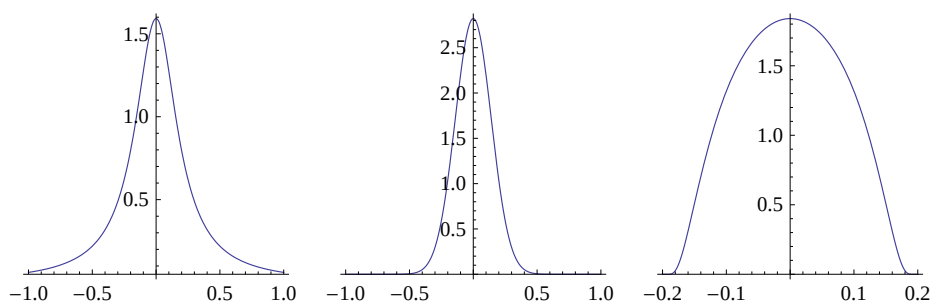


Figura 12.2: Funcțiile ϱ_n definite de (12.2) în cazul $n=5$.

12.1.8 Pentru a “defini” densitatea $\delta(x)$ a punctului material de masă 1 localizat în origine, în loc de (12.1) se poate pleca și de la alte șiruri de distribuții de masă, cum ar fi (Fig. 12.2):

$$\begin{aligned} \varrho_n(x) &= \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2}; \\ \varrho_n(x) &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}; \\ \varrho_n(x) &= \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < -\frac{1}{n}, \\ n e^{\frac{-1}{1-n^2 x^2}} & \text{dacă } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dacă } x > \frac{1}{n}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Utilizând în locul funcției discontinue (12.1) o funcție $\varrho_n(x)$ derivabilă, se pot “deduce” relațiile:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \varphi(x) dx &= -\varphi'(0), & x \delta'(x) &= -\delta(x), \\ \delta'(-x) &= -\delta'(x), & x^2 \delta'(x) &= 0. \end{aligned}$$

12.1.9 În matematică, s-a descoperit (Laurent Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 2 vol., 1950/1951) o construcție matematică relativ simplă care permite definirea cu precizie a unui obiect matematic δ_{x_0} cu proprietățile deduse de fizicieni pe baza intuiției și analogiei cu cazul funcțiilor. Definiția distribuției Dirac δ_{x_0} se bazează pe o extindere a spațiului funcțiilor clasice $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (cele care îndeplinesc anumite condiții) obținută prin scufundarea lui în spațiul funcționalelor liniare și continue

$$f: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

definite pe un subspațiu $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$. Definiția lui δ ca funcțională permite:

- re-obținerea riguroasă a relațiilor referitoare la δ deduse empiric;
- obținerea altor relații și efectuarea de calcule precise, fără nevoia de a recurge la alte considerente;
- o investigație mai profundă a modelelor care utilizează funcția Dirac;
- extinderi ale unor modele prin considerarea cazului în care funcția potențial este definită cu ajutorul distribuției Dirac, etc.;
- o definiție mai puțin restrictivă pentru conceptul de derivată;
- lărgirea posibilităților de utilizare a transformărilor Fourier și Laplace;
- descrierea unitară a spectrului discret și continuu în mecanica cuantică;
- etc.

12.2 Distribuții definite ca funcționale liniare

12.2.1 Vom prezenta pe parcursul acestei secțiuni o introducere în teoria distribuțiilor temperate, omițând anumite detalii tehnice (care pot fi găsite în [10, 34]).

Elementele prezentate sunt suficiente pentru a permite efectuarea calculelor întâlnite în majoritatea aplicațiilor.

12.2.2 Fiecare dintre derivatele funcției gaussiene $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$, adică

$$g'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$g''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2}$$

$$g'''(x) = (-8x^3 + 12x) e^{-x^2}, \text{ etc.}$$

este produsul dintre un polinom și e^{-x^2} . Cu regula lui l'Hôpital se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g^{(m)}(x) = 0, \quad \text{oricare ar fi } m \in \mathbb{N},$$

și mai mult

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k g^{(m)}(x) = 0, \quad \text{oricare ar fi } k, m \in \mathbb{N}.$$

Spunem că $g(x) = e^{-x^2}$ este o funcție rapid descrescătoare la infinit.

12.2.3 Teoremă. *Spațiul tuturor funcțiilor rapid descrescătoare la infinit*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k \varphi^{(m)}(x) = 0, \quad \forall k, m \in \mathbb{N} \right\},$$

considerat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari uzuale

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (\lambda \varphi)(x) = \lambda \varphi(x),$$

este un spațiu vectorial (numit spațiul funcțiilor test).

Demonstrație. Deoarece

$$|x^k(\varphi + \psi)^{(m)}(x)| \leq |x^k \varphi^{(m)}(x)| + |x^k \psi^{(m)}(x)|,$$

$$|x^k(\lambda \varphi)^{(m)}(x)| = |\lambda| |x^k \varphi^{(m)}(x)|$$

operațiile adunare și înmulțire cu scalari sunt bine definite, adică

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \implies \varphi + \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

și

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \implies \lambda \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Verificarea axiomelor spațiului vectorial este imediată.

12.2.4 Exercițiu. Oricare ar fi $a \in (0, \infty)$ și polinomul $p(x)$, funcțiile

$$\varphi(x) = e^{-ax^2}, \quad \varphi(x) = \sin x e^{-ax^2},$$

$$\varphi(x) = p(x) e^{-ax^2}, \quad \varphi(x) = \cos x e^{-ax^2}$$

aparțin spațiului $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

12.2.5 Definiție. Prin *distribuție* (temperată) se înțelege o funcțională

$$f: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$$

liniară și continuă (detalii în [10, 34]). În loc de $f(\varphi)$ scriem $\langle f, \varphi \rangle$.

12.2.6 Spațiul distribuțiilor temperate

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{ f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ este liniară și continuă } \},$$

considerat împreună cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle, \quad \langle \lambda f, \varphi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle,$$

este un spațiu vectorial.

12.2.7 Unei funcții $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, pentru care integrala există, îi asociem funcționala

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad (12.3)$$

care este o aplicație liniară deoarece

$$\langle T_f, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) dx = \alpha \langle T_f, \varphi \rangle + \beta \langle T_f, \psi \rangle.$$

Se poate arăta că dacă f este integrabilă pe orice mulțime compactă și are creștere lentă la infinit, atunci T_f este distribuție (detalii în [10, 34]).

Identificând fiecare astfel de funcție f cu distribuția corespunzătoare, obținem o scufundare a spațiului funcțiilor uzuale (cele care verifică anumite condiții) în spațiul $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ al distribuțiilor. În mod uzual, în loc de T_f se scrie tot f , semnificația lui f (funcție sau distribuție) deducându-se din context.

Se observă că, dacă funcțiile f și g diferă doar într-un număr finit de puncte, atunci $T_f = T_g$. Vom considera ca fiind identice funcțiile care diferă una de alta doar pe o mulțime de măsură nulă.

12.2.8 Exemple.

1. Funcția $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, privită ca distribuție, este funcționala

$$T_{x^2} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_{x^2}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx.$$

2. Funcția $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$, privită ca distribuție, este funcționala

$$T_{\sin x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_{\sin x}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \varphi(x) dx.$$

2. Funcția $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$, privită ca distribuție, este funcționala

$$T_{\cos x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_{\cos x}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \varphi(x) dx.$$

12.2.9 Oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}$, aplicația

$$\delta_{x_0} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0),$$

este o funcțională liniară și continuă,

$$\langle \delta_{x_0}, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\varphi(x_0) + \beta\psi(x_0) = \alpha\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \beta\langle \delta_{x_0}, \psi \rangle,$$

adică o distribuție temperată, numită *distribuția Dirac* cu suportul în x_0 .

În cazul în care $x_0 = 0$, în loc de δ_0 se scrie simplu δ , adică definiția devine

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

12.2.10 Distribuțiile de tip funcție (12.3) sunt numite *distribuții regulate*.

Celelalte distribuții din $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sunt numite *distribuții singulare*.

Se poate arăta că δ_{x_0} este distribuție singulară, adică nu există o funcție f astfel încât relația $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ să se poată scrie sub forma

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx,$$

și prin urmare să avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

12.2.11 Putem interpreta relația formală

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{x_0}(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0),$$

ca fiind definiția distribuției singulare δ_{x_0} , adică

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0),$$

scrisă utilizând o notație similară celei din cazul distribuțiilor regulate.

12.2.12 Definiție. Spunem că șirul de distribuții $(f_n)_{n \geq 0}$ converge la distribuția f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f,$$

dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

12.2.13 Exercițiu. Funcției (Fig. 12.1)

$$\varrho_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < -\frac{1}{2n}, \\ n & \text{dacă } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{dacă } x > \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

cu proprietatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = 0, \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0, \end{cases}$$

îi corespunde distribuția $T_{\varrho_n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\langle T_{\varrho_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx,$$

cu proprietatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\varrho_n} = \delta.$$

Astfel, relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \delta$$

este adevărată dacă prin ϱ_n se înțelege distribuția T_{ϱ_n} .

Rezolvare. Utilizând schimbarea de variabilă $t = nx$, obținem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{\varrho_n}, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(0) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

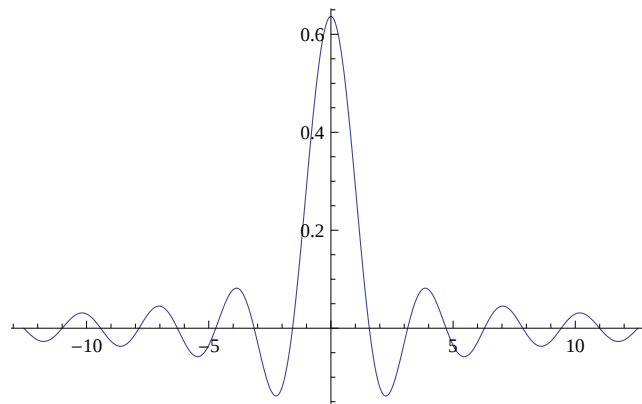


Figura 12.3: Graficul funcției f_2 .

12.2.14 Exercițiu. Funcției (Fig. 12.3)

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x},$$

cu proprietatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x = 0, \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0, \end{cases}$$

îi corespunde distribuția regulată

$$T_{f_n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx$$

cu proprietatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = \delta.$$

Rezolvare. Utilizând formula (10.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

și schimbarea de variabilă $t = nx$, obținem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \varphi(0) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

12.2.15 Derivata unei distribuții

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este distribuția

$$f' : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

12.2.16 Orice distribuție temperată este indefinit derivabilă.

Derivata de ordin k a distribuției f este

$$f^{(k)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle.$$

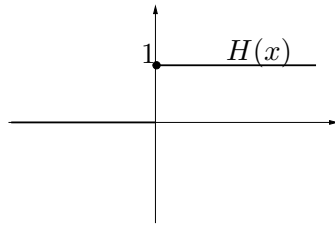


Figura 12.4: Funcția Heaviside H .

12.2.17 O funcție este numită funcție derivabilă dacă este derivabilă în fiecare punct.

Funcția Heaviside (vezi Fig. 12.4)

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0, \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$$

nu este o funcție derivabilă deoarece nu este derivabilă în 0,

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \neq 0, \\ \text{nu există} & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Distribuția corespunzătoare (numită *distribuția Heaviside*)

$$T_H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx,$$

este însă derivabilă și

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, adică avem

$$(T_H)' = \delta.$$

Funcția nederivabilă H este derivabilă în sensul teoriei distribuțiilor și $H' = \delta$.

12.2.18 Exercițiu. Știm că

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Să se arate că derivata distribuției corespunzătoare funcției $\sin x$ este distribuția corespunzătoare funcției $\cos x$, adică

$$(T_{\sin x})' = T_{\cos x}.$$

Rezolvare. Integrând prin părți, obținem

$$\begin{aligned} \langle (T_{\sin x})', \varphi \rangle &= -\langle T_{\sin x}, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \varphi'(x) dx \\ &= -\sin x \varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$, obținem

$$\langle (T_{\sin x})', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \varphi(x) dx = \langle T_{\cos x}, \varphi \rangle,$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, și prin urmare

$$(T_{\sin x})' = T_{\cos x}.$$

Se observă că φ joacă doar rolul unui catalizator, dispărând din rezultatul final.

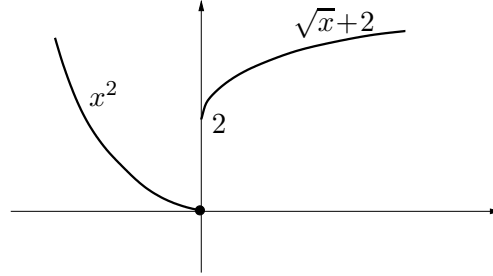


Figura 12.5: Graficul funcției f definite de relația (12.4).

12.2.19 Exercițiu. Fie funcția (Fig. 12.5) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 2 & \text{dacă } x > 0. \end{cases} \quad (12.4)$$

Să se arate că

$$(T_f)' = T_{f'} + 2\delta,$$

unde f' este derivata clasică

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dacă } x < 0, \\ \text{nu există} & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

prelungită arbitrar în $x = 0$.

Rezolvare. Integrând prin părți, obținem

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x^2 \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} (\sqrt{x} + 2) \varphi'(x) dx \\ &= -x^2 \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 2x \varphi(x) dx \\ &\quad -(\sqrt{x} + 2) \varphi(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(x) dx \\ &= 2\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \langle T_{f'} + 2\delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

12.2.20* Teoremă. În spațiul distribuțiilor $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ are loc egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}.$$

Demonstrație. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția (Fig. 12.6) periodică cu perioada 2π definită prin

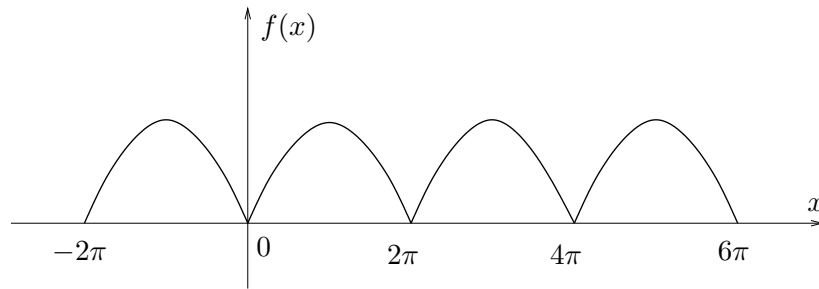


Figura 12.6: Graficul funcției periodice f definite de relația (12.5).

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi} \quad \text{pentru } 0 \leq x < 2\pi. \quad (12.5)$$

Funcția local integrabilă f definește o distribuție cu derivata de ordinul al doilea

$$f'' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}.$$

Seria Fourier corespunzătoare lui f converge uniform la f pe $\mathbb{R}$, adică

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{inx} = f(x), \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

și prin urmare, în spațiul distribuțiilor, are loc relația

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} e^{inx} = f,$$

care derivată termen cu termen de două ori, conduce la egalitatea

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{inx} = f''.$$

12.2.21 *Multiplicarea unei distribuții cu x^k .* Dacă $k \in \mathbb{N}$ și

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

este o distribuție temperată, atunci aplicația

$$x^k f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle x^k f, \varphi \rangle = \langle f, x^k \varphi \rangle,$$

este de asemenea o distribuție temperată.

12.2.22 Se poate arăta că aplicația

$$\vartheta f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \vartheta f, \varphi \rangle = \langle f, \vartheta \varphi \rangle,$$

este o distribuție dacă f este distribuție și dacă ϑ aparține mulțimii $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ a funcțiilor indefinit derivabile

$$\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

cu proprietatea că, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, există $m \in \mathbb{N}$ și $C \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|\vartheta^{(k)}(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

12.2.23 Exercițiu. Să se arate că dacă $\vartheta \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, atunci

$$\vartheta \delta_a = \vartheta(a) \delta_a.$$

Rezolvare. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avem

$$\langle \vartheta \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \vartheta \varphi \rangle = (\vartheta \varphi)(a) = \vartheta(a) \varphi(a) = \vartheta(a) \langle \delta_a, \varphi \rangle = \langle \vartheta(a) \delta_a, \varphi \rangle.$$

12.2.24 Exercițiu. Oricare ar fi $\vartheta \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ și $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, avem

$$(\vartheta f)' = \vartheta' f + \vartheta f'.$$

Rezolvare. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avem

$$\begin{aligned} \langle (\vartheta f)', \varphi \rangle &= -\langle \vartheta f, \varphi' \rangle = -\langle f, \vartheta \varphi' \rangle = -\langle f, (\vartheta \varphi)' - \vartheta' \varphi \rangle \\ &= \langle f', \vartheta \varphi \rangle + \langle f, \vartheta' \varphi \rangle = \langle \vartheta' f + \vartheta f', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

12.2.25 Exercițiu. Să se arate că

$$x\delta' = -\delta, \quad x\delta'' = -2\delta', \quad x^2\delta'' = 2\delta.$$

Rezolvare. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avem:

$$\begin{aligned} \langle x\delta', \varphi \rangle &= \langle \delta', x\varphi \rangle = -\langle \delta, (x\varphi)' \rangle = -\langle \delta, \varphi + x\varphi' \rangle = -\varphi(0) = \langle -\delta, \varphi \rangle; \\ \langle x\delta'', \varphi \rangle &= \langle \delta'', x\varphi \rangle = \langle \delta, (x\varphi)'' \rangle = \langle \delta, 2\varphi' + x\varphi'' \rangle = 2\varphi'(0) = \langle 2\delta, \varphi' \rangle = -\langle 2\delta', \varphi \rangle; \\ \langle x^2\delta'', \varphi \rangle &= \langle \delta'', x^2\varphi \rangle = \langle \delta, (x^2\varphi)'' \rangle = \langle \delta, 2\varphi + 4x\varphi' + x^2\varphi'' \rangle = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

12.2.26 Exercițiu. Să se arate că relațiile

$$x\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)}, \quad x^k\delta^{(k)} = (-1)^k k! \delta$$

au loc oricare ar fi $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Rezolvare. Utilizând formula lui Leibniz

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j f^{(j)} g^{(k-j)},$$

obținem

$$\begin{aligned} \langle x\delta^{(k)}, \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}, x\varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, (x\varphi)^{(k)} \rangle = (-1)^k \langle \delta, x\varphi^{(k)} + k\varphi^{(k-1)} \rangle \\ &= (-1)^k k\varphi^{(k-1)}(0) = -k(-1)^{k-1} \langle \delta, \varphi^{(k-1)} \rangle = -k \langle \delta^{(k-1)}, \varphi \rangle = \langle -k\delta^{(k-1)}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \langle x^k \delta^{(k)}, \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}, x^k \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, (x^k \varphi)^{(k)} \rangle \\ &= (-1)^k \left\langle \delta, \sum_{j=0}^k C_k^j (x^k)^{(j)} \varphi^{(k-j)} \right\rangle = (-1)^k \langle \delta, C_k^k (x^k)^{(k)} \varphi \rangle = \langle (-1)^k k! \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

12.2.27 În cazul funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, relația

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

nu definește o distribuție. Se poate însă arăta că funcționala

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

este o distribuție singulară (numită *valoarea principală* a lui $\frac{1}{x}$).

12.2.28 Exercițiu. Să se arate că

$$x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} \langle x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

12.2.29 Exercițiu. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln |x|.$$

Aplicația $\tilde{f} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln |x| \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln |x| \varphi(x) dx \right)$$

este o distribuție singulară și

$$(\tilde{f})' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Rezolvare. Utilizând integrarea prin părți, obținem

$$\begin{aligned}\langle (\tilde{f})', \varphi \rangle &= -\langle \tilde{f}, \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x) \varphi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln x \varphi'(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

12.2.30 Pentru a distinge variabila de alți parametri care apar în expresie, vom scrie uneori $\langle f(x), \varphi(x) \rangle$ în loc de $\langle f, \varphi \rangle$, fără ca $f(x)$ să însemne valoarea lui f în punctul x sau $\varphi(x)$ să însemne valoarea lui φ în punctul x .

12.2.31 Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două constante fixate, $a \neq 0$ și dacă pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definește o distribuție regulată, atunci distribuția definită de funcția

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) = f(ax+b),$$

este

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b) \varphi(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

adică

$$\langle T_{f(ax+b)}, \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle.$$

12.2.32 *Schimbarea de variabilă.* Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt două constante fixate, $a \neq 0$ și dacă $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ este distribuție, atunci se poate arăta că funcționala

$$f(ax+b) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f(ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle$$

este de asemenea distribuție. Cazuri particulare importante:

$$\text{Translatia :} \quad \langle f(x+b), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x-b) \rangle;$$

$$\text{Omotetia :} \quad \langle f(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle.$$

12.2.33 Exercițiu. Să se arate că

$$\delta(x-b) = \delta_b \quad \text{și} \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta.$$

Rezolvare. Oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avem

$$\langle \delta(x-b), \varphi(x) \rangle = \langle \delta, \varphi(x+b) \rangle = \varphi(b) = \langle \delta_b, \varphi \rangle,$$

$$\langle \delta(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \delta, \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0) = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta, \varphi \right\rangle.$$

Capitolul 13

Transformarea Fourier

13.1 Transformarea Fourier finită

13.1.1 Definiție. Spunem despre o funcție de variabilă discretă

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

că este *periodică* cu perioada N dacă

$$\varphi(n+N) = \varphi(n), \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{Z}.$$

13.1.2 Oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$, funcția exponențială

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : n \mapsto e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \tag{13.1}$$

este o funcție periodică cu perioada N ,

$$e^{\frac{2\pi i}{N} k(n+N)} = e^{\frac{2\pi i}{N} kn} e^{2k\pi i} = e^{\frac{2\pi i}{N} kn} (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^{\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

Deoarece $e^{\frac{2\pi i}{N} (k+N)n} = e^{\frac{2\pi i}{N} kn}$, există numai N funcții de forma (13.1).

13.1.3 Orice funcție

$$\varphi : \{0, 1, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate prelungi prin periodicitate până la o funcție periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N , și orice funcție periodică $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N este complet determinată de restricția ei la mulțimea $\{0, 1, \dots, N-1\}$, adică de numerele $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(N-1)$.

13.1.4 Teoremă. Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ este funcție periodică cu perioada N , atunci

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m), \quad (13.2)$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m). \quad (13.3)$$

Demonstrație. Din formula (suma seriei geometrice)

$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \begin{cases} N & \text{dacă } q = 1, \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{dacă } q \neq 1, \end{cases} \quad (13.4)$$

rezultă relația

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} m(n-k)} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N} (n-k)} \right)^m = \begin{cases} N & \text{dacă } k \equiv n \pmod{N}, \\ 0 & \text{dacă } k \not\equiv n \pmod{N}, \end{cases}$$

care conduce la

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nm} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} mk} \varphi(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} m(n-k)} \right) \varphi(k) = \varphi(n).$$

13.1.5 Știm că orice funcție periodică continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T , cu derivata continuă pe porțiuni, este dezvoltabilă în serie Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i}{T} kt} \quad \text{cu} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2\pi i}{T} kt} f(t) dt. \quad (13.5)$$

Din (13.2) rezultă că $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, periodică cu perioada N , admite reprezentarea

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \quad \text{cu} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m). \quad (13.6)$$

13.1.6 Definiție.

Transformata Fourier a funcției periodice $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N este

$$F[\varphi] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n). \quad (13.7)$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcția

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n). \quad (13.8)$$

13.1.7 Transformatele Fourier $F[\varphi]$ și $F^{-1}[\varphi]$ sunt funcții periodice cu perioada N ,

$$F[\varphi](k+N) = F[\varphi](k), \quad F^{-1}[\varphi](k+N) = F^{-1}[\varphi](k),$$

iar conform relațiilor (13.2) și (13.2), avem

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \quad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

13.1.8 Din relațiile (13.2) și (13.2) rezultă că sunt posibile și alte alegeri în ceea ce privește definiția transformării Fourier, cum ar fi

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n) \quad \text{cu inversa} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n)$$

sau

$$F[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n) \quad \text{cu inversa} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n).$$

13.1.9 În cazul $N=2$, transformata Fourier a unei funcții $\varphi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ este

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^1 e^{-\frac{2\pi i}{2} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^1 (-1)^{kn} \varphi(n),$$

adică funcția

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1), \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) - \varphi(1). \end{aligned}$$

Transformata inversă este

$$F^{-1}[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} F^{-1}[\varphi](0) &= \frac{1}{2}(\varphi(0) + \varphi(1)), \\ F^{-1}[\varphi](1) &= \frac{1}{2}(\varphi(0) - \varphi(1)). \end{aligned}$$

13.1.10 În cazul $N=4$, transformata Fourier a unei funcții $\varphi : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{C}$ este

$$F[\varphi] : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{2\pi i}{4} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^3 (-i)^{kn} \varphi(n),$$

adică avem

$$\begin{aligned}
F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3), \\
F[\varphi](1) &= \varphi(0) - i\varphi(1) - \varphi(2) + i\varphi(3), \\
F[\varphi](2) &= \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(3), \\
F[\varphi](3) &= \varphi(0) + i\varphi(1) - \varphi(2) - i\varphi(3).
\end{aligned}$$

13.1.11 Exercițiu. Fie $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ fixat și funcția delta discretă

$$\delta_m : \{0, 1, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m, \\ 0 & \text{dacă } n \neq m. \end{cases}$$

Să se arate că

$$F[\delta_m](k) = e^{-\frac{2\pi i}{N} km}.$$

În particular, scriind δ în loc de δ_0 , avem $F[\delta] = 1$.

Rezolvare. Avem

$$F[\delta_m](k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \delta_m(n) = e^{-\frac{2\pi i}{N} km} = \cos \frac{2\pi i}{N} km - i \sin \frac{2\pi i}{N} km.$$

13.1.12 Deoarece $e^{\frac{2\pi i}{N} kn} = e^{\frac{2\pi i}{N} k(n \pm N)}$ și $\varphi(n) = \varphi(n \pm N)$, avem

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n) \quad \text{și} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n).$$

oricare ar fi $n_0 \in \mathbb{Z}$. În particular, dacă $N=2M+1$ este impar, atunci

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=-M}^M e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n) \quad \text{și} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n).$$

13.1.13 Dacă funcția reală $\varphi : \{-M, -M+1, \dots, M-1, M\} \longrightarrow \mathbb{R}$ este pară, adică

$$\varphi(-n) = \varphi(n), \quad \text{oricare ar fi } n \in \{-M, -M+1, \dots, M-1, M\},$$

atunci, utilizând schimbarea $n \mapsto -n$, obținem

$$\begin{aligned}
F[\varphi](k) &= \sum_{n=-M}^M e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n) = \sum_{n=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(-n) \\
&= \sum_{n=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n) = \overline{F[\varphi](k)},
\end{aligned}$$

adică transformata Fourier $F[\varphi]$ este funcție reală.

13.1.14 În cazul în care $N=2M+1$ este impar, relația (13.2) devine

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m=-M}^M e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m). \quad (13.9)$$

Această relație, scrisă sub forma

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} nk} F[\varphi](k), \quad (13.10)$$

poate fi privită ca o reconstrucție a lui φ plecând de la valorile lui $F[\varphi]$.

Dacă numărul întreg L este astfel încât $0 < L < M$, atunci funcția

$$\varphi_L(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi i}{N} nk} F[\varphi](k) \quad (13.11)$$

este o aproximație a lui φ , obținută folosind doar $F[\varphi](k)$ cu $-L \leq k \leq L$. Astfel de aproximații sunt utilizate pentru compresia datelor în descrierea digitală a sunetelor sau imaginilor.

Trecerea $\varphi \mapsto \varphi_L$ poate fi utilizată pentru filtrarea semnalelor (eliminarea unor zgomote) și pentru prelucrarea imaginilor (eliminarea unor defecte).

13.1.15 Fie funcția periodică $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, cu perioada $N=20$, definită prin

$$\varphi(n) = (n/10)^2 \quad \text{pentru} \quad -10 \leq n \leq 9.$$

În acest caz,

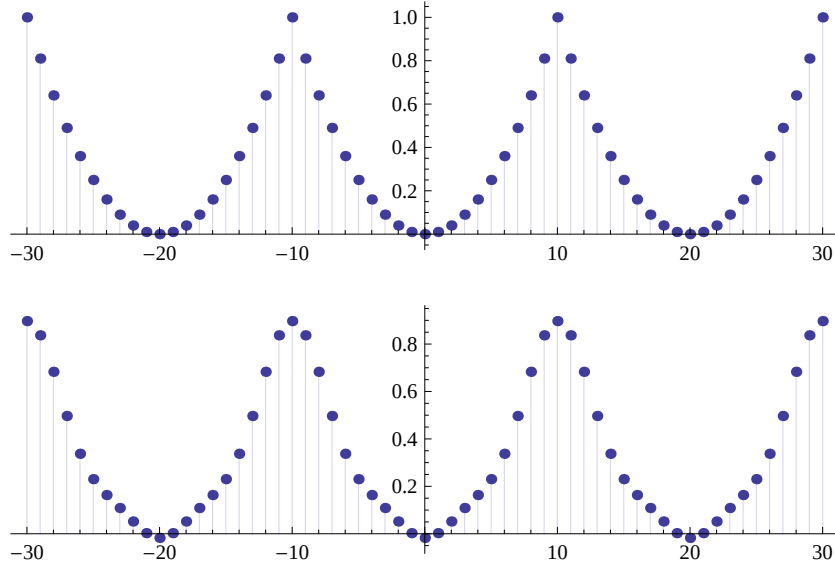
$$\varphi(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=-10}^9 e^{\frac{2\pi i}{20} nk} F[\varphi](k),$$

iar funcția (Fig. 13.1)

$$\varphi_3(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=-3}^3 e^{\frac{2\pi i}{20} nk} F[\varphi](k)$$

este o aproximație a lui φ , obținută utilizând doar o parte dintre valorile transformatei Fourier $F[\varphi]$.

13.1.16 MATHEMATICA: Figura 13.1 se poate obține cu programul

Figura 13.1: Funcțiile φ și φ_3 .

```

In[1]= M = 10; Nr = 2 M; L = 3
phi[n_] := ((Mod[n + M, Nr] - M)/10)^2
phi3[n_] := (1/Nr) Sum[ Exp[2 Pi I k n/Nr]
    Sum[Exp[-2 Pi I k m/Nr] phi[m], {m, -M, M - 1}], {k, -L, L}]
ListPlot[Table[{n, phi[n]}, {n, -3 M, 3 M}], Filling -> Axis,
    PlotStyle -> PointSize[Medium], PlotRange -> All, AspectRatio -> 0.3]
ListPlot[Table[{n, phi3[n]}, {n, -3 M, 3 M}], Filling -> Axis,
    PlotStyle -> PointSize[Medium], PlotRange -> All, AspectRatio -> 0.3]

```

13.1.17 Spațiul funcțiilor periodice $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, cu perioada N , se poate identifica cu $\mathbb{C}^N$ asociind funcției φ elementul $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ cu $x_n = \varphi(n)$. În cazul lui $\mathbb{C}^N$, transformarea Fourier este

$$F: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N : x \mapsto F[x], \quad \text{unde } F[x]_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} x_n,$$

cu inversa

$$F^{-1}: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N : x \mapsto F^{-1}[x], \quad \text{unde } F^{-1}[x]_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} x_n.$$

13.2 Transformarea Fourier a funcțiilor

13.2.1 Teoremă. Oricare ar fi $a \in (0, \infty)$ și $\xi \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \quad (13.12)$$

Demonstrație. Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x - i\frac{\xi}{2a})^2} dx.$$

Plecând de la integrala

$$\int_{-r}^r e^{-at^2} dt + \int_r^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz - \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz + \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{-r} e^{-az^2} dz = 0$$

a funcției

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^{-az^2},$$

de-a lungul drumului dreptunghiular din Fig. 13.2, arătăm că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-i\frac{\xi}{2a})^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Avem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt.$$

Alegând pentru drumul liniar ce unește r cu $r - i\frac{\xi}{2a}$ parametrizarea

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = r - it\frac{\xi}{2a},$$

obținem relația

$$\int_r^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = \int_0^1 e^{-a(r-it\frac{\xi}{2a})^2} (-i)\frac{\xi}{2a} dt = -i\frac{\xi}{2a} e^{-ar^2} \int_0^1 e^{irt\xi + \frac{t^2\xi^2}{4a}} dt,$$

din care rezultă

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_r^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = 0.$$

Similar se arată că

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{-r} e^{-az^2} dz = 0.$$

Alegând pentru drumul liniar ce unește $-r - i\frac{\xi}{2a}$ cu $-r$ parametrizarea

$$\gamma_2 : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = t - i\frac{\xi}{2a},$$

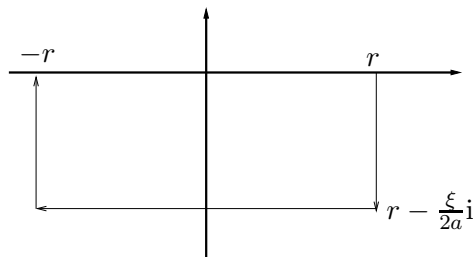


Figura 13.2: Drumul dreptunghiular utilizat.

obținem relația

$$\int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = \int_{-r}^r e^{-a(t-i\frac{\xi}{2a})^2} dt$$

din care rezultă

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r-i\frac{\xi}{2a}}^{r-i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-i\frac{\xi}{2a})^2} dt.$$

13.2.2 Teoremă. Fie $\kappa \in (0, \infty)$ o constantă fixată.

Dacă $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este astfel încât integralele sunt convergente, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi = \frac{2\pi}{\kappa} \varphi(x) \quad (13.13)$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa u x} \varphi(x) dx \right) du = \frac{2\pi}{\kappa} \varphi(\xi). \quad (13.14)$$

Demonstrație. Oricare ar fi $a \in (0, \infty)$, avem

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 - i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi(u-x)} e^{-a\xi^2} d\xi \right] du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-\frac{\kappa^2(u-x)^2}{4a}} du. \end{aligned}$$

Utilizând în ultima integrală schimbarea de variabilă $u = x + 2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t$, obținem relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 - i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x + 2\frac{\sqrt{a}}{\kappa}t\right) e^{-t^2} dt,$$

care pentru $a \searrow 0$ devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\xi u} \varphi(u) du \right) d\xi = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-t^2} dt.$$

Dar

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-t^2} dt = \frac{2\sqrt{\pi}}{\kappa} \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2\pi}{\kappa} \varphi(x).$$

A doua relație din enunțul teoremei se poate demonstra similar.

13.2.3 Definiție. Fie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Funcția (în cazul în care există)

$$\mathcal{F}[\varphi] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx$$

se numește *transformata Fourier* a lui φ ,

iar funcția (în cazul în care există)

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}^{-1}[\varphi](\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx$$

se numește *transformata Fourier inversă* a lui φ .

13.2.4 Din (13.13) și (13.14) rezultă că, în caz de existență,

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \varphi \quad \text{și} \quad \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] = \varphi.$$

13.2.5 Din relațiile (13.13) și (13.14) rezultă că sunt posibile și alte alegeri în ceea ce privește definiția transformării Fourier, cum ar fi

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx \quad \text{cu inversa}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \psi(\xi) d\xi$$

sau

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} \varphi(x) dx \quad \text{cu inversa}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \psi(\xi) d\xi.$$

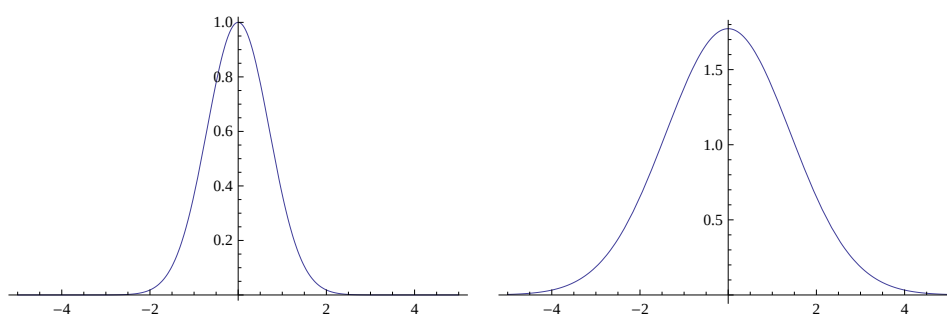


Figura 13.3: Funcția $\varphi(x) = e^{-x^2}$ și transformata ei Fourier $\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

13.2.6 Relația (13.12) se poate scrie sub forma

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{oricare ar fi } a \in (0, \infty).$$

13.2.7 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{Exp}[-t^2], t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

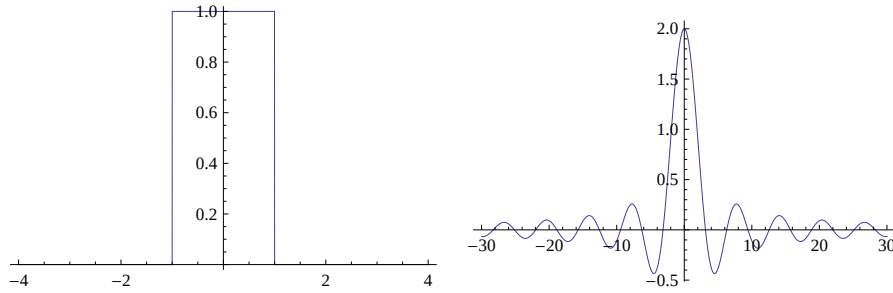


Figura 13.4: Funcția (13.15) în cazul $a=1$ și transformata ei Fourier.

13.2.8 MATHEMATICA: Figura 13.4 s-a obținut cu

```
In[1]:=Plot[HeavisidePi[x], {x, -4, 4}, Exclusions -> None]
Plot[2 Sin[x] /x, {x, -30, 30}, PlotRange -> All]
```

13.2.9 Exercițiu. Fie $a \in (0, \infty)$ și

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |x| \leq a, \\ 0 & \text{dacă } |x| > a. \end{cases} \quad (13.15)$$

Să se arate că (Fig. 13.4)

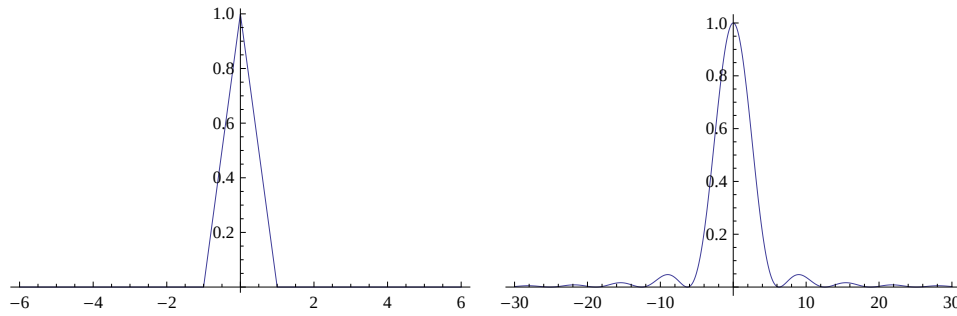
$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

Rezolvare. Pentru $\xi \neq 0$, avem

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx = \int_{-a}^a e^{i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} e^{i\xi x} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}}{i\xi} = \frac{2}{\xi} \sin a\xi.$$

13.2.10 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{HeavisidePi}[t], t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Sinc}\left[\frac{x}{2}\right]$$

Figura 13.5: Funcția (13.16) în cazul $a=1$ și transformata ei Fourier.

13.2.11 Exercițiu. Fie $a \in (0, \infty)$ și

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} & \text{dacă } |x| \leq a \\ 0 & \text{dacă } |x| > a. \end{cases} \quad (13.16)$$

Să se arate că (Fig. 13.5)

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{4 \sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2}.$$

Rezolvare. În cazul $\xi \neq 0$, utilizând schimbarea de variabilă $x \mapsto -x$ și formulele

$$\cos t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}, \quad \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2},$$

obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \varphi(x) dx = \int_{-a}^0 e^{ix\xi} \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx + \int_0^a e^{ix\xi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \\ &= \int_0^a e^{-ix\xi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx + \int_0^a e^{ix\xi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = 2 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos x\xi dx \\ &= \frac{2}{\xi} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) (\sin x\xi)' dx = \frac{2}{\xi} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin x\xi \Big|_0^a + \frac{2}{a\xi} \int_0^a \sin x\xi dx \\ &= -\frac{2}{a\xi^2} \cos x\xi \Big|_0^a = \frac{2}{a\xi^2} (1 - \cos x\xi) = \frac{4 \sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2}. \end{aligned}$$

În cazul $\xi = 0$, avem

$$\mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx + \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = a.$$

Deoarece

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2} = a \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(a\xi/2)}{a\xi/2} \right]^2 = a,$$

transformata Fourier este o funcție continuă.

13.2.12 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

`In[1]:=FourierTransform[(1-Abs[t]) HeavisidePi[t/2], t, x]     $\mapsto$     Out[1]= $\frac{-2+e^{-ix}+e^{ix}}{\sqrt{2\pi} x^2}$`

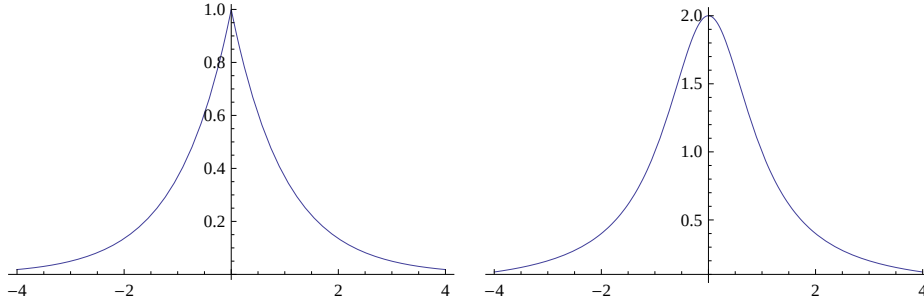


Figura 13.6: Funcția $e^{-|x|}$ și transformata ei Fourier.

13.2.13 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2},$$

oricare ar fi $a \in (0, \infty)$.

Rezolvare. Considerând integrala în sensul valorii principale, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-a|x|}](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-a|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} (\cos \xi x + i \sin \xi x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos \xi x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx. \end{aligned}$$

Integrând de două ori prin părți, obținem relația

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx &= \frac{1}{\xi} e^{-ax} \sin \xi x \Big|_0^{\infty} + \frac{a}{\xi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \xi x dx \\ &= -\frac{a}{\xi^2} e^{-ax} \cos \xi x \Big|_0^{\infty} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx = \frac{a}{\xi^2} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx, \end{aligned}$$

adică

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx = \frac{a}{\xi^2} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx,$$

din care deducem

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \xi x dx = \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$

13.2.14 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$
 $\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[1/(1 + t^2), t, x] \mapsto \text{Out}[1] = e^{-\text{Abs}[x]} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
 $\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[\text{Exp}[-\text{Abs}[t]], t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}$

13.2.15 Exercițiu. Oricare ar fi $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, funcția Hermite-Gauss

$$\Psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

este o funcție proprie a transformării Fourier:

$$\mathcal{F} \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] (\xi) = \sqrt{2\pi} i^n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Demonstrație. Din relația $(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k \varphi]$, care se poate scrie

$$\mathcal{F}[x^k \varphi](\xi) = (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \mathcal{F}[\varphi](\xi),$$

rezultă

$$\mathcal{F} \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) \mathcal{F} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right],$$

și prin urmare (a se vedea pag. 340-6)

$$\mathcal{F} \left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = \sqrt{2\pi} H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Folosind metoda inducției matematice, vom arăta că

$$H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i^n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Relația are loc pentru $n=0$ și presupunând că

$$H_k \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i^k H_k(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \text{pentru orice } k \leq n-1,$$

cu ajutorul relațiilor de recurență, obținem

$$\begin{aligned} H_n \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} &= -2i \frac{d}{d\xi} H_{n-1} \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} - 2(n-1) H_{n-2} \left(-i \frac{d}{d\xi} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= -2i \frac{d}{d\xi} \left[i^{n-1} H_{n-1}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right] - 2(n-1) i^{n-2} H_{n-2}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= i^n [-2H'_{n-1}(\xi) + 2\xi H_{n-1}(\xi) + 2(n-1) H_{n-2}(\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= i^n [-4(n-1) H_{n-2}(\xi) + 2\xi H_{n-1}(\xi) + 2(n-1) H_{n-2}(\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= i^n [2\xi H_{n-1}(\xi) - 2(n-1) H_{n-2}(\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i^n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \end{aligned}$$

13.3 Transformarea Fourier a distribuțiilor

13.3.1 În cazul $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, derivând sub integrală, se obține

$$(\mathcal{F}[\varphi])'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (ix) e^{i\xi x} \varphi(x) dx = \mathcal{F}[ix\varphi],$$

iar integrând prin părți, relația

$$\mathcal{F}[\varphi'](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi'(x) dx = -i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx = -i\xi \mathcal{F}[\varphi].$$

Iterând, se obțin relațiile

$$(\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k \varphi], \quad \mathcal{F}[\varphi^{(k)}](\xi) = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi).$$

13.3.2 Se poate arăta că

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

și că

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \varphi \mapsto \mathcal{F}[\varphi], \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(x) dx,$$

este o aplicație continuă, bijectivă și cu inversa

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \psi \mapsto \mathcal{F}^{-1}[\psi], \quad \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(\xi) d\xi.$$

13.3.3 Transformările Fourier directă și inversă au expresii foarte asemănătoare.

Utilizând schimbarea de variabilă $\xi = -y$, obținem

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \psi(-y) dy = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{\psi}](x),$$

adică

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\check{\psi}],$$

unde $\check{\psi}$ este aplicația

$$\check{\psi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \check{\psi}(y) = \psi(-y).$$

În particular,

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]] = \check{\varphi}.$$

Definiție. Prin *transformata Fourier a unei distribuții*

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

se înțelege distribuția $\mathcal{F}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$, definită prin relația

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle.$$

Transformata Fourier inversă este $\mathcal{F}^{-1}[f] : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$, definită prin

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle.$$

13.3.4 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F}[\delta_a] = e^{iax}$$

și prin urmare

$$\mathcal{F}[\delta] = 1.$$

Rezolvare. Avem

$$\langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \varphi(x) dx = \langle e^{iax}, \varphi \rangle.$$

13.3.5 Dacă funcția $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este astfel încât există transformata Fourier clasică $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, atunci din relația

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx \end{aligned}$$

rezultă că

$$\mathcal{F}[T_f] = T_{\mathcal{F}[f]}, \quad (13.17)$$

adică transformata Fourier a distribuției T_f definite de f este exact distribuția $T_{\mathcal{F}[f]}$ definită de transformata Fourier a lui f . Astfel, transformarea Fourier a distribuțiilor este o prelungire a transformării Fourier a funcțiilor.

13.3.6 În cazul funcției $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, nu există transformata Fourier clasică

$$\mathcal{F}[1] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[1](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi x) dx,$$

deoarece integralele sunt divergente. În schimb, există transformata Fourier a distribuției T_1 , notată în mod uzual tot cu 1. Din relația

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[\delta], 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle \delta, 2\pi \varphi \rangle = 2\pi \varphi(0) = \langle 2\pi \delta, \varphi \rangle.$$

rezultă că

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta.$$

13.3.7 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

$$\text{In}[1] := \text{FourierTransform}[1, t, x] \mapsto \text{Out}[1] = \sqrt{2\pi} \text{DiracDelta}[x]$$

13.3.8 Oricare ar fi distribuția f , din relațiile

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{F}[f])^{(k)}, \varphi \rangle &= (-1)^k \langle \mathcal{F}[f], \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[\varphi^{(k)}] \rangle \\ &= (-1)^k \langle f, (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle (i\xi)^k f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[(i\xi)^k f], \varphi \rangle, \\ \langle \mathcal{F}[f^{(k)}], \varphi \rangle &= \langle f^{(k)}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (-1)^k \langle f, (\mathcal{F}[\varphi])^{(k)} \rangle \\ &= (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[(ix)^k \varphi] \rangle = (-1)^k \langle \mathcal{F}[f], (ix)^k \varphi \rangle = \langle (-ix)^k \mathcal{F}[f], \varphi \rangle \end{aligned}$$

rezultă că

$$(\mathcal{F}[f])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k f], \quad \mathcal{F}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k \mathcal{F}[f]. \quad (13.18)$$

13.3.9 Exercițiu. Funcția $\cos x$ nu admite transformată Fourier deoarece integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \cos x \, dx$$

este divergentă, dar distribuția $\cos x$ admite transformata Fourier

$$\mathcal{F}[\cos x] = \pi(\delta_1 + \delta_{-1}).$$

Rezolvare. Transformarea Fourier fiind liniară, obținem

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \right] = \frac{1}{2} (\mathcal{F}[\delta_1] + \mathcal{F}[\delta_{-1}]) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x.$$

Din relația precedentă rezultă că

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos x] = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}).$$

Dar efectuând schimbarea de variabilă $x \mapsto -x$ obținem

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\cos x], \varphi \rangle &= \langle \cos x, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt \right) dx = \langle \cos x, 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\cos x], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

adică

$$\mathcal{F}[\cos x] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\cos x].$$

13.3.10 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

`In[1]:=FourierTransform[Cos[t], t, x]     $\mapsto$     Out[1]= $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  DiracDelta[-1+x]+ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  DiracDelta[1+x]`

13.3.11 Exercițiu. Funcția x^k nu admite transformată Fourier deoarece integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} x^k dx$$

este divergentă, dar distribuția x^k admite transformata Fourier

$$\mathcal{F}[x^k] = 2\pi(-i)^k \delta^{(k)}.$$

Rezolvare. Utilizând (13.18), obținem

$$\mathcal{F}[x^k] = (-i)^k \mathcal{F}[(ix)^k 1] = (-i)^k (\mathcal{F}[1])^{(k)} = 2\pi(-i)^k \delta^{(k)}.$$

13.3.12 Utilizând (13.18) se obține

$$\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\delta] = (-i\xi)^k 1 = (-i\xi)^k,$$

adică relația

$$\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (-i\xi)^k.$$

13.3.13 Exercițiu. Fie T_H distribuția regulată corespunzătoare funcției Heaviside

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0, \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Să se arate că

$$\mathcal{F}[T_H] = -i\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \pi\delta.$$

Rezolvare. Plecând de la egalitatea $(T_H)' = \delta$, deducem succesiv relațiile:

$$\mathcal{F}[(T_H)'] = 1,$$

$$-ix \mathcal{F}[T_H] = 1,$$

$$\mathcal{F}[T_H] = -i\mathcal{P}\frac{1}{x} + C\delta,$$

unde C este o constantă. Ultima relație este echivalentă cu

$$\langle \mathcal{F}[T_H], \varphi \rangle = -i \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle + C \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (13.19)$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T_H], e^{-x^2} \rangle &= \langle T_H, \mathcal{F}[e^{-x^2}] \rangle = \langle T_H, \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \rangle \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\xi}{2}\right)^2} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi \end{aligned}$$

și

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{-x^2} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{-x^2}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx \right) = 0,$$

rezultă că, în cazul $\varphi(x) = e^{-x^2}$, relația (13.19) devine $\pi = C \langle \delta, e^{-x^2} \rangle = C$.

13.3.14 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

`In[1]:=FourierTransform[HeavisideTheta[t], t, x]     $\mapsto$     Out[1]= $\frac{i}{\sqrt{2\pi}x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[x]$`

13.3.15 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{F} \left[\mathcal{P}\frac{1}{x} \right] = \pi i T_{\text{sign}},$$

unde T_{sign} este distribuția regulată corespunzătoare funcției

$$\text{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0, \\ 1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Plecând de la egalitatea $x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$, deducem succesiv relațiile:

$$\mathcal{F} \left[x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} \right] = 2\pi \delta,$$

$$-i \mathcal{F} \left[ix \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} \right] = 2\pi \delta,$$

$$-i \left(\mathcal{F} \left[\mathcal{P}\frac{1}{x} \right] \right)' = 2\pi \delta$$

$$\mathcal{F} \left[\mathcal{P}\frac{1}{x} \right] = 2\pi i H + C,$$

unde C este o constantă. Ultima relație este echivalentă cu

$$\left\langle \mathcal{F} \left[\mathcal{P}\frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle = 2\pi i \langle H, \varphi \rangle + C \langle 1, \varphi \rangle, \quad \text{oricare ar fi } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (13.20)$$

Deoarece

$$\left\langle \mathcal{F} \left[\mathcal{P}\frac{1}{x} \right], e^{-x^2} \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \mathcal{F} \left[e^{-x^2} \right] \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \right\rangle = 0,$$

în cazul $\varphi(x) = e^{-x^2}$, relația (13.20) devine

$$0 = 2\pi i \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx + C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

și conduce la $C = -\pi i$. Dar $2\pi i H - \pi i$ și sign definesc aceeași distribuție.

13.3.16 MATHEMATICA: Definiția utilizată $\mathcal{F}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(t) dt$

`In[1]:=FourierTransform[1/t, t, x]     $\mapsto$     Out[1]= $i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Sign}[x]$`

Capitolul 14

Spații Hilbert

14.1 Introducere

14.1.1 Definiție. Prin *spațiu unitar* se înțelege un spațiu vectorial complex cu produs scalar, considerat cu norma definită prin relația

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

14.1.2 Într-un spațiu unitar are loc inegalitatea lui Cauchy

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y||,$$

și identitatea paralelogramului

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2,$$

iar din relația

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_m \rangle - \langle a, b \rangle| &= |\langle x_n, y_m \rangle - \langle a, y_m \rangle + \langle a, y_m \rangle - \langle a, b \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - a, y_m \rangle| + |\langle a, y_m - b \rangle| \\ &\leq ||x_n - a|| \, ||y_m|| + ||a|| \, ||y_m - b||. \end{aligned}$$

rezultă că produsul scalar este o aplicație continuă, adică

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = b \end{array} \right\} \implies \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \langle x_n, y_m \rangle = \langle a, b \rangle. \quad (14.1)$$

14.1.3 Definiție. Prin *spațiu Hilbert* (complex) se înțelege un spațiu unitar în care orice șir Cauchy este convergent.

14.2 Spații Hilbert finit-dimensionale

14.2.1 Spațiul Hilbert d -dimensional

$$\mathbb{C}^d = \{ x = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \mid x_k \in \mathbb{C} \},$$

cu produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{d-1} \bar{x}_k y_k$$

și norma asociată

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{d-1} |x_k|^2},$$

poate fi privit ca fiind:

- spațiul de vectori coloană (v. pag. 278-5)

$$\mathbb{C}^d \equiv \left\{ |x\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix} \mid x_k \in \mathbb{C} \right\};$$

- spațiul de polinoame cu coeficienți complecși

$$\mathbb{C}^d \equiv \left\{ \alpha_0 X^{d-1} + \alpha_1 X^{d-2} + \dots + \alpha_{d-2} X + \alpha_{d-1} \mid \alpha_k \in \mathbb{C} \right\};$$

- spațiul funcțiilor definite pe o mulțime cu d elemente, cum ar fi

$$\mathbb{C}^d \equiv \{ \varphi: \{0, 1, 2, \dots, d-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \},$$

$$\mathbb{C}^d \equiv \{ \varphi: \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\} \longrightarrow \mathbb{C} \}, \text{ unde } d=2j+1. \quad (14.2)$$

Fiecare dintre aceste realizări ale lui $\mathbb{C}^d$ oferă anumite avantaje formale.

14.2.2 Orice spațiu Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensiune d se poate identifica cu $\mathbb{C}^d$ utilizând izomorfismul

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}^d : \sum_{k=0}^{d-1} x_k v_k \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$$

corespunzător unei baze ortonormate $\{v_0, v_1, \dots, v_{d-1}\}$ a lui $\mathcal{H}$.

În ceea ce privește structura de spațiu Hilbert, $\mathcal{H}$ și $\mathbb{C}^d$ sunt identice deoarece

$$\left\langle \sum_{n=0}^{d-1} x_n v_n, \sum_{k=0}^{d-1} y_k v_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{d-1} \bar{x}_k y_k = \langle (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}), (y_0, y_1, \dots, y_{d-1}) \rangle.$$

Spațiile Hilbert $\mathcal{H}$ și $\mathbb{C}^d$ diferă prin natura elementelor lor, nu prin structură.

14.2.3 Baza ortonormată $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, \dots, |e_{d-1}\rangle\}$, unde

$$|e_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |e_{d-1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

este numită *baza canonică* sau computațională.

14.2.4 În cazul reprezentării (14.2), definiția produsului scalar devine

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n=-j}^j \overline{\varphi(n)} \psi(n),$$

iar baza canonică este formată din funcțiile $\delta_{-j}, \delta_{-j+1}, \dots, \delta_{j-1}, \delta_j$, unde

$$\delta_m(k) = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{for } k=m, \\ 0 & \text{for } k \neq m. \end{cases}$$

Scriind $|j; m\rangle$ în loc de δ_m , avem (v. pag. 278-5)

$$\begin{aligned} \langle j; m | j; n \rangle &= \delta_{mn}, & \mathbb{I} &= \sum_{m=-j}^j |j; m\rangle \langle j; m|, \\ \psi(m) &= \langle j; m | \psi \rangle, & |\psi\rangle &= \sum_{m=-j}^j \psi(m) |j; m\rangle, \end{aligned}$$

oricare ar fi $\psi \in \mathbb{C}^d$. Transformarea Fourier finită $F : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$,

$$F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-j}^j e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} |j; k\rangle \langle j; n|$$

este o transformare unitară cu inversa

$$F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-j}^j e^{\frac{2\pi i}{d} kn} |j; k\rangle \langle j; n|.$$

14.2.5 Operatorul $Q: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d : \psi \mapsto Q\psi$, definit prin relația

$$(Q\psi)(n) = n \psi(n),$$

poate fi privit ca o versiune finită a operatorului coordonată (v. pag. 365-**30**), iar $P = F^{-1}QF$ ca o versiune finită a operatorului impuls (v. pag. 371-**41**). Notând $|j; m\rangle\rangle = F^{-1}|j; m\rangle$, avem

$$\begin{aligned} Q|j; m\rangle &= m |j; m\rangle & Q &= \sum_{n=-j}^j m |j; m\rangle \langle j; n|, \\ P|j; m\rangle\rangle &= m |j; m\rangle\rangle & P &= \sum_{n=-j}^j m |j; m\rangle\rangle \langle\langle j; n|. \end{aligned}$$

Bazele ortonormate $\{|j; m\rangle\}_{m=-j}^j$ și $\{|j; m\rangle\rangle\}_{m=-j}^j$ sunt complementare:

$$|\langle j; m | j, n \rangle\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}, \quad \text{oricare ar fi } m, n \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}.$$

14.2.6 Polinoamele de variabilă discretă *Kravchuk* $K_m(k)$ pot fi definite ca fiind polinoamele care verifică relația [24]

$$(1-X)^{j+k}(1+X)^{j-k} = \sum_{m=-j}^j K_m(k) X^{j+m}, \quad (14.3)$$

adică polinoamele

$$K_m(k) = \sum_{n=0}^{j+m} (-1)^n C_{j+k}^n C_{j-k}^{j+m-n}.$$

Primele trei polinoame Kravchuk sunt

$$K_{-j}(k) = 1, \quad K_{-j+1}(k) = -2k, \quad K_{-j+2}(k) = 2k^2 - j.$$

14.2.7 Din relația polinomială

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n=-j}^j \left(\frac{1}{2^{2j}} \sum_{k=-j}^j C_{2j}^{j+k} K_m(k) K_n(k) \right) X^{j+m} Y^{j+n} \\
&= \frac{1}{2^{2j}} \sum_{k=-j}^j C_{2j}^{j+k} \sum_{m=-j}^j K_m(k) X^{j+m} \sum_{n=-j}^j K_n(k) Y^{j+n} \\
&= \frac{1}{2^{2j}} \sum_{k=-j}^j C_{2j}^{j+k} (1-X)^{j+k} (1+X)^{j-k} (1-Y)^{j+k} (1+Y)^{j-k} \\
&= \frac{1}{2^{2j}} [(1-X)(1-Y) + (1+X)(1+Y)]^{2j} = (1+XY)^{2j} \\
&= \sum_{m=-j}^j C_{2j}^{j+m} X^{j+m} Y^{j+m}
\end{aligned}$$

rezultă că avem

$$\frac{1}{2^{2j}} \sum_{k=-j}^j C_{2j}^{j+k} K_m(k) K_n(k) = C_{2j}^{j+m} \delta_{mn}. \quad (14.4)$$

Funcțiile Kravchuk $\mathfrak{K}_{-j}, \mathfrak{K}_{-j+1}, \dots, \mathfrak{K}_{j-1}, \mathfrak{K}_j$, unde

$$\mathfrak{K}_m(k) = \frac{1}{2^j} \sqrt{\frac{C_{2j}^{j+k}}{C_{2j}^{j+m}}} K_m(k),$$

formează o bază ortonormată în $\mathbb{C}^{2j+1}$, adică avem

$$\langle \mathfrak{K}_m | \mathfrak{K}_n \rangle = \delta_{mn}, \quad \mathbb{I} = \sum_{m=-j}^j |\mathfrak{K}_m\rangle \langle \mathfrak{K}_m|.$$

Se poate arăta că funcțiile Kravchuk verifică relațiile

$$\mathfrak{K}_m(n) = \mathfrak{K}_n(m), \quad \mathfrak{K}_m(-n) = (-1)^{j+m} \mathfrak{K}_m(n).$$

14.2.8 În cazurile $d=2$ și $d=3$, funcțiile Kravchuk sunt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \mathfrak{K}_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\mathfrak{K}_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \mathfrak{K}_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

și respectiv

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_{-1}(-1) &= \frac{1}{2}, & \mathfrak{K}_0(-1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \mathfrak{K}_1(-1) &= \frac{1}{2}, \\
\mathfrak{K}_{-1}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \mathfrak{K}_0(0) &= 0, & \mathfrak{K}_1(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\mathfrak{K}_{-1}(1) &= \frac{1}{2}, & \mathfrak{K}_0(1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \mathfrak{K}_1(1) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

14.2.9 Operatorii $J_x, J_y, J_z: \mathbb{C}^{2j+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2j+1}$, definiți prin relațiile

$$\begin{aligned}(J_x \pm i J_y)|j; m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j; m \pm 1\rangle, \\ J_z|j; m\rangle &= m|j; m\rangle \quad (\text{adică } J_z = Q)\end{aligned}$$

satisfac relațiile de comutare

$$[J_x, J_y] = i J_z, \quad [J_y, J_z] = i J_x, \quad [J_z, J_x] = i J_y,$$

unde, prin definiție, $[A, B] = AB - BA$.

14.2.10 Din relația (14.3), prin derivare, se obține relația de recurență

$$(j+k+1) K_{k+1}(m) + (j-k+1) K_{k-1}(m) = -2m K_k(m),$$

unde, prin convenție, $K_{-j-1} = K_{j+1} = 0$. Din această relație rezultă că

$$\sqrt{(j-k)(j+k+1)} \mathfrak{K}_m(k+1) + \sqrt{(j+k)(j-m+1)} \mathfrak{K}_m(k-1) = -2m \mathfrak{K}_m(k), \quad (14.5)$$

unde, prin convenție, $\mathfrak{K}_m(-j-1) = \mathfrak{K}_m(j+1) = 0$.

14.2.11 În cazul transformării Fourier finite, spațiul (14.2) se poate identifica cu spațiul funcțiilor $\psi: j + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definite pe mulțimea $j + \mathbb{Z} = \{j+n \mid j \in \mathbb{Z}\}$ și periodice cu perioada d , iar în cazul utilizării funcțiilor Kravchuk spațiul (14.2) se poate identifica cu spațiul funcțiilor $\psi: j + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ nule în afara mulțimii $\{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$.

14.2.12 Relația (14.5) se poate scrie sub forma

$$\sqrt{(j-k)(j+k+1)} \langle \mathfrak{K}_m | j; k+1 \rangle + \sqrt{(j+k)(j-k+1)} \langle \mathfrak{K}_m | j; k-1 \rangle = -2m \langle \mathfrak{K}_m | j; k \rangle$$

sau sub forma

$$\langle \mathfrak{K}_m | (J_x + i J_y) | j; k \rangle + \langle \mathfrak{K}_m | (J_x - i J_y) | j; k \rangle = -2m \langle \mathfrak{K}_m | j; k \rangle,$$

echivalentă cu

$$J_x |\mathfrak{K}_m\rangle = -m |\mathfrak{K}_m\rangle.$$

Utilizând funcțiile

$$\tilde{\mathfrak{K}}_m(k) = i^k \mathfrak{K}_m(k),$$

relația (14.5), înmulțită cu $(-i)^k$, se poate scrie sub forma

$$i \sqrt{(j-k)(j+k+1)} \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m | j; k+1 \rangle - i \sqrt{(j+k)(j-k+1)} \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m | j; k-1 \rangle = -2m \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m | j; k \rangle$$

sau sub forma

$$i \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m | (J_x + i J_y) | j; k \rangle - i \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m | (J_x - i J_y) | j; k \rangle = -2m \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m | j; k \rangle,$$

echivalentă cu

$$J_y | \tilde{\mathfrak{K}}_m \rangle = m | \tilde{\mathfrak{K}}_m \rangle.$$

Astfel, funcțiile Kravchuk sunt funcții proprii ale operatorului J_x , iar $\tilde{\mathfrak{K}}_m$ funcții proprii ale operatorului J_y . Operatorii J_x , J_y , J_z admit descompunerile spectrale

$$J_x = \sum_{m=-j}^j m | \mathfrak{K}_{-m} \rangle \langle \mathfrak{K}_{-m} |, \quad J_y = \sum_{m=-j}^j m | \tilde{\mathfrak{K}}_m \rangle \langle \tilde{\mathfrak{K}}_m |, \quad J_z = \sum_{m=-j}^j m | j; m \rangle \langle j; m |.$$

14.3 Spații Hilbert infinit-dimensionale separabile

14.3.1 Definiție. Spunem despre o submulțime M a unui spațiu unitar $\mathcal{H}$ că este *densă* în $\mathcal{H}$ și scriem $\overline{M} = \mathcal{H}$ dacă, pentru orice element $a \in \mathcal{H}$, există un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ în M astfel încât $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

14.3.2 Definiție. Spunem despre un spațiu unitar $\mathcal{H}$ că este *separabil* dacă există o submulțime numărabilă $M \subset \mathcal{H}$, densă în $\mathcal{H}$.

14.3.3 Teoremă. Într-un spațiu unitar infinit-dimensional separabil $\mathcal{H}$ există un sistem ortonormat numărabil $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$, și orice sistem ortonormat infinit este numărabil.

Demonstrație. Plecând de la o mulțime numărabilă $\{w_0, w_1, w_2, \dots\}$, densă în $\mathcal{H}$ generăm sistemul $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ parcurgând următoarele etape:

- eliminăm din $\{w_0, w_1, w_2, \dots\}$ vectorii nuli (dacă există);
- eliminăm din șirul obținut primul vector care este combinație liniară de vectorii aflați înaintea lui. Repetând această operațiune (de o infinitate de ori !) generăm un șir în care niciun vector nu este combinație liniară de vectorii aflați înaintea lui.
- ortonormalizând șirul obținut, rezultă $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$.

Dacă $\{u_j\}_{j \in J}$ este sistem ortonormat, atunci

$$\|u_j - u_k\| = \sqrt{\langle u_j - u_k, u_j - u_k \rangle} = \sqrt{2}.$$

Alegând pentru fiecare u_j un element w_{n_j} astfel încât $\|u_j - w_{n_j}\| < \frac{1}{2}$, din relația

$$\begin{aligned} \|u_j - u_k\| &= \|u_j - w_{n_j} + w_{n_j} - w_{n_k} + w_{n_k} - u_k\| \\ &\leq \|u_j - w_{n_j}\| + \|w_{n_j} - w_{n_k}\| + \|w_{n_k} - u_k\| \end{aligned}$$

rezultă că $\|w_{n_j} - w_{n_k}\| > 0$, adică $w_{n_j} \neq w_{n_k}$ pentru $j \neq k$. Astfel, prin aplicația injectivă

$$\{u_j\}_{j \in J} \longrightarrow \{w_0, w_1, w_2, \dots\} : u_j \mapsto w_{n_j}$$

mulțimea $\{u_j\}_{j \in J}$ este pusă în corespondență cu un subsir al șirului $\{w_0, w_1, w_2, \dots\}$.

14.3.4 Fie $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ un sistem ortonormat dintr-un spațiu unitar $\mathcal{H}$.

Oricare ar fi $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$, spațiul $\mathbb{C}^d$ se poate identifica cu subspațiul

$$\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{d-1}\} = \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_{d-1} v_{d-1} \mid x_n \in \mathbb{C}\}$$

generat de $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{d-1}\}$. Reuniunea de subspații finit-generate

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\} &= \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{d-1}\} \\ &= \{x_0 v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \mid x_n \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\mathcal{H}$. Avem

$$\mathfrak{L}\{v_0\} \subset \mathfrak{L}\{v_0, v_1\} \subset \mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2\} \subset \dots \subset \mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\} \subset \overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}}.$$

14.3.5 Definiție. Fie $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ un sistem ortonormat din spațiul unitar $\mathcal{H}$.

Spunem că $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este *bază algebrică* în $\mathcal{H}$ dacă

$$\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\} = \mathcal{H}.$$

Spunem că $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este *bază ortonormată* în $\mathcal{H}$ dacă

$$\overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}} = \mathcal{H}.$$

14.3.6 Spațiul șirurilor de pătrat sumabil

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

este un spațiu vectorial în raport cu adunarea

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) + (y_0, y_1, y_2, \dots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

și înmulțirea cu numere complexe

$$\lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Aceste operații sunt bine-definite, deoarece din relațiile $|\lambda x_n| = |\lambda| |x_n|$ și

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^2 &= (\bar{x}_n + \bar{y}_n)(x_n + y_n) = |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2\Re(\bar{x}_n y_n) \\ &\leq |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2|\bar{x}_n y_n| \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2) \end{aligned}$$

rezultă că

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \ell^2 \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y \in \ell^2 \\ \lambda x \in \ell^2. \end{array} \right.$$

Deoarece $|\bar{x}_n y_n| \leq (|x_n|^2 + |y_n|^2)/2$, relația

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n y_n$$

definește un produs scalar pe ℓ^2 . Se poate arăta că orice șir Cauchy din ℓ^2 converge la un element din ℓ^2 . Prin urmare, ℓ^2 este spațiu Hilbert.

14.3.7 Sistemul ortonormat $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$, unde

$$e_0 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad e_1 = (0, 1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad \dots,$$

nu este bază algebrică în ℓ^2 deoarece $\mathfrak{L}\{e_0, e_1, e_2, \dots\} \neq \ell^2$.

Șirul $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots)$ din ℓ^2 nu aparține spațiului

$$\mathfrak{L}\{e_0, e_1, e_2, \dots\} = \{ (x_0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, 0, \dots) \mid x_n \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N} \}.$$

Dar, $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ este bază ortonormată în ℓ^2 deoarece, din relația

$$\|x - (x_0, x_1, \dots, x_k, 0, 0, 0, \dots)\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

verificată oricare ar fi $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, rezultă că

$$\overline{\mathfrak{L}\{e_0, e_1, e_2, \dots\}} = \ell^2.$$

14.3.8 Spațiul Hilbert infinit-dimensional ℓ^2 este separabil deoarece submulțimea

$$\{ (\alpha_0 + \beta_0 i, \alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_k + \beta_k i, 0, 0, 0, \dots) \mid \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \} \subset \ell^2$$

este numărabilă și densă în ℓ^2 .

14.3.9 Dacă M este o submulțime a unui spațiu unitar $\mathcal{H}$, atunci mulțimea vectorilor ortogonali pe M , adică

$$M^\perp = \{ x \in \mathcal{H} \mid \langle x, y \rangle = 0, \text{ oricare ar fi } y \in M \}$$

este un subspațiu vectorial închis al lui $\mathcal{H}$. Dacă un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ din $M^\perp$ este convergent, atunci (v. pag. 349-2)

$$\left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0$$

și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M^\perp$.

14.3.10 Teoremă. Dacă $\mathcal{K}$ este un subspațiu vectorial închis al spațiului Hilbert $\mathcal{H}$, atunci orice vector $x \in \mathcal{H}$ se scrie în mod unic sub forma

$$x = x' + x'' \quad \text{cu} \quad \begin{array}{l} x' \in \mathcal{K} \\ x'' \in \mathcal{K}^\perp \end{array}$$

și

$$\|x''\| = \|x - x'\| = \inf_{y \in \mathcal{K}} \|x - y\|, \quad (14.6)$$

adică $\delta = \|x - x'\|$ reprezintă distanța de la x la subspațiul $\mathcal{K}$.

Demonstrație. Alegem în $\mathcal{K}$ șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât

$$\|x - x_n\| < \delta^2 + \frac{1}{n^2}. \quad (14.7)$$

Utilizând identitatea paralelogramului (v. pag. 349-2), obținem relația

$$\|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2)$$

din care rezultă că

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) - 4\|x - (\tfrac{1}{2}x_n + \tfrac{1}{2}x_m)\|^2 \\ &\leq 2(\delta^2 + \tfrac{1}{n^2} + \delta^2 + \tfrac{1}{m^2}) - 4\delta^2 = \tfrac{2}{n^2} + \tfrac{2}{m^2} \end{aligned}$$

și prin urmare $(x_n)_{n \geq 0}$ este șir Cauchy. Prin trecere la limită, din (14.7) rezultă că vectorul $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ verifică relația $\|x - x'\| \leq \delta$. Pe de altă parte, spațiul $\mathcal{K}$ fiind închis, $x' \in \mathcal{K}$ și din (14.6) rezultă că $\|x - x'\| \geq \delta$. Prin urmare, avem $\delta = \|x - x'\|$.

Arătăm că $x'' = x - x' \in \mathcal{K}^\perp$. Dacă y este un vector nenul din $\mathcal{K}$, atunci din relația

$$\|x'' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geq \|x - x'\|^2 = \delta^2,$$

adevărată pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$, se obține inegalitatea

$$-\bar{\lambda}\langle y, x'' \rangle - \lambda\langle x'', y \rangle + |\lambda|^2\langle y, y \rangle \geq 0.$$

Alegând $\lambda = \frac{\langle x'', y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, se obține inegalitatea $\frac{|\langle x'', y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \leq 0$, posibilă doar dacă $\langle x'', y \rangle = 0$. Arătăm că descompunerea $x = x' + x''$ este unică. Presupunând că mai există $\tilde{x}' \in \mathcal{K}$ și $\tilde{x}'' \in \mathcal{K}^\perp$ astfel încât $x = \tilde{x}' + \tilde{x}''$, rezultă că $x' - \tilde{x}' = x'' - \tilde{x}'' \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp$, ceea ce este posibil doar dacă $x' = \tilde{x}'$ și $x'' = \tilde{x}''$.

14.3.11 Prin urmare, dacă $\mathcal{K}$ este subspațiu închis, atunci spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ admite descompunerea ortogonală

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp.$$

În reprezentarea $x = x' + x''$,

x' se numește *proiecția* lui x pe $\mathcal{K}$, iar

x'' se numește *proiecția* lui x pe $\mathcal{K}^\perp$.

14.3.12 Dacă $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este un sistem ortonormat din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ și dacă pentru $x \in \mathcal{H}$ există numerele $\alpha_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n v_n,$$

atunci (v. pag. 349-2)

$$\langle v_n, x \rangle = \left\langle v_n, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_k v_k \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle v_n, \sum_{k=0}^m \alpha_k v_k \right\rangle = \alpha_n,$$

și prin urmare

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n.$$

14.3.13 Definiție. Fie $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ un sistem ortonormat din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$. Fiecărui vector $x \in \mathcal{H}$ îi asociem seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n,$$

numită *seria Fourier* a lui x corespunzătoare sistemului $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$.

14.3.14 Teoremă. Dacă $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este un sistem ortonormat din spațiul Hilbert $\mathcal{H}$, atunci seria cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle v_n, x \rangle|^2$$

este convergentă oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ și are loc relația

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle v_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{inegalitatea lui Bessel}). \quad (14.8)$$

Demonstrație. Din relația

$$0 \leq \left\| x - \sum_{n=0}^k \langle v_n, x \rangle v_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^k |\langle v_n, x \rangle|^2,$$

adevărată oricare ar fi $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, rezultă că șirul sumelor parțiale este mărginit:

$$\sum_{n=0}^k |\langle v_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Din această relație, prin trecere la limită, se obține inegalitatea lui Bessel (14.8).

14.3.15 Teoremă. Dacă $\mathcal{H}$ este spațiu Hilbert și dacă $\{v_0, v_1, v_2, \dots\} \subset \mathcal{H}$ este un sistem ortonormat, atunci seria Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n$$

asociată oricărui element $x \in \mathcal{H}$ este convergentă, suma ei

$$x' = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n \quad \text{aparține spațiului } \overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}},$$

iar

$$x'' = x - x' \quad \text{aparține spațiului } \overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}}^{\perp}.$$

Demonstrație. Șirul sumelor parțiale $(s_k)_{k \geq 0}$, unde

$$s_k = \sum_{n=0}^k \langle v_n, x \rangle v_n,$$

este șir Cauchy deoarece, pentru $m \geq k$, avem

$$\|s_m - s_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^m \langle v_n, x \rangle v_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^m |\langle v_n, x \rangle|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0,$$

seria $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle v_n, x \rangle|^2$ fiind convergentă (v. pag. 360-14). Oricare ar fi k , avem

$$\langle v_k, x'' \rangle = \left\langle v_k, x - \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n \right\rangle = 0.$$

14.3.16 Dacă sistemul ortonormat $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este bază ortonormată în spațiul Hilbert $\mathcal{H}$, adică dacă $\overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}} = \mathcal{H}$, atunci $\overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}}^{\perp} = \{0\}$ și prin urmare

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}.$$

În notație Dirac, avem

$$|x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n\rangle \langle v_n|x\rangle, \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in \mathcal{H},$$

adică are loc rezoluția identității

$$\mathbb{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n\rangle \langle v_n|.$$

14.3.17 Sistemul ortonormat $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este bază ortonormată în spațiul Hilbert $\mathcal{H}$, adică are loc relația $\overline{\mathfrak{L}\{v_0, v_1, v_2, \dots\}} = \mathcal{H}$, dacă și numai dacă

$$\langle v_n|x\rangle = 0, \quad \text{oricare ar fi } n \quad \implies \quad x = 0.$$

14.3.18 Din relația

$$\left\| x - \sum_{n=0}^k \langle v_n, x \rangle v_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^k |\langle v_n, x \rangle|^2,$$

adevărată oricare ar fi $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, rezultă că avem

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n$$

dacă și numai dacă x satisface relația

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle v_n, x \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (\text{identitatea lui Parseval}).$$

14.3.19 Teoremă. Oricare ar fi spațiul Hilbert separabil $\mathcal{H}$, aplicația

$$\mathcal{H} \longrightarrow \ell^2 : \sum_{n=0}^{\infty} x_n v_n \mapsto (x_0, x_1, x_2, \dots) \quad (14.9)$$

asociată unei baze ortonormate $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ este un izomorfism, care permite identificarea lui $\mathcal{H}$ cu ℓ^2 .

Demonstrație. Orice vector $x \in \mathcal{H}$ admite o reprezentare de forma $\sum_{n=0}^{\infty} x_n v_n$ unică,

și anume $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_n, x \rangle v_n$, cu proprietățile

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle v_n, x \rangle} \langle v_n, y \rangle \quad \text{și} \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle v_n, x \rangle|^2.$$

Aplicația (14.9) este liniară, injectivă, surjectivă și păstrează produsul scalar.

14.3.20 Spațiile $\mathcal{H}$ și ℓ^2 diferă prin natura elementelor lor, nu prin structură.

Aproape toate spațiile Hilbert utilizate în modelele din fizică sunt separabile.

14.3.21 Dacă $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sunt două funcții și $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^2 &= (\overline{f(x)} + \overline{g(x)})(f(x) + g(x)) = |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2\Re(\overline{f(x)}g(x)) \\ &\leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2|\overline{f(x)}g(x)| \leq 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2), \\ |\lambda f(x)|^2 &= |\lambda|^2 |f(x)|^2 \quad \text{și} \quad |\overline{f(x)}g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2). \end{aligned}$$

14.3.22 Spațiul

$$\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

al tuturor funcțiilor $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pentru care integrala este convergentă, considerat împreună cu adunarea

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (14.10)$$

și înmulțirea cu numere complexe

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (14.11)$$

este un spațiu vectorial infinit-dimensional, iar aplicația

$$\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (14.12)$$

are proprietățile

$$\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle \quad \text{și} \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

Aplicația (14.12) nu este produs scalar deoarece

$$\langle f, f \rangle = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f = 0.$$

De exemplu, funcția nenulă

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = 0, \\ 0 & \text{dacă } x \neq 0, \end{cases}$$

apartine lui $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ și $\langle f, f \rangle = 0$.

14.3.23 Știm că dacă $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ este o funcție test, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k \varphi(x) = 0, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

și, în particular, există $C_k \in (0, \infty)$ astfel încât

$$|x^k \varphi(x)| \leq C_k, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Din relația

$$|(1+x^2) \varphi(x)| \leq |\varphi(x)| + |x^2 \varphi(x)| \leq C_0 + C_2$$

rezultă că

$$|\varphi(x)|^2 \leq \frac{(C_0 + C_2)^2}{(1+x^2)^2} \leq \frac{(C_0 + C_2)^2}{1+x^2}, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx$ este convergentă, și prin urmare

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

14.3.24 Funcția

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0, \\ x^2 & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$$

apartine spațiului $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, dar nu este derivabilă. Funcția indefinit derivabilă

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

aparține spațiului $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi,$$

dar $x f(x)$ nu aparține spațiului $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ deoarece $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x f(x) = \pm 1$.

14.3.25 Despre două funcții $f, g \in \mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ spunem că sunt *echivalente* și scriem $f \sim g$ dacă $f(x) = g(x)$ aproape peste tot, adică dacă $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ este o mulțime de măsură nulă. Pe spațiul $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ al claselor de funcții echivalente, relațiile (14.10) și (14.11) definesc o structură de spațiu vectorial, iar (14.12) un produs scalar. Se poate arăta că $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ nu este spațiu Hilbert, adică există șiruri Cauchy neconvergente în $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$.

14.3.26 Fiecărei funcții $f \in \mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ îi corespunde în $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ distribuția de tip funcție

$$f: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

Distribuțiile f și g corespunzătoare la două funcții $f, g \in \mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ coincid dacă și numai dacă $f \sim g$. Astfel, $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ poate fi privit ca fiind un subspațiu al spațiului distribuțiilor $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

14.3.27 Dacă $(f_n)_{n \geq 0}$ este șir Cauchy în $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$, atunci din relația

$$|\langle f_n, \varphi \rangle - \langle f_m, \varphi \rangle| = |\langle f_n - f_m, \varphi \rangle| \leq \|f_n - f_m\| \|\varphi\|$$

rezultă că $(\langle f_n, \varphi \rangle)_{n \geq 0}$ este un șir Cauchy de numere complexe, oricare ar fi funcția test φ . Se poate arăta [26] că aplicația

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

este distribuție. Considerând $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ ca un subspațiu al spațiului distribuțiilor, rezultă că orice șir Cauchy din $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ converge la un element din $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Adăugând la $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ limitele șirurilor Cauchy din $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$ neconvergente în $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})/\sim$, se obține spațiul Hilbert $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

În cazul în care $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, prin definiție

$$\langle f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_n(x)} g_n(x) dx.$$

14.3.28 Se poate arăta că orice element $f \in L^2(\mathbb{R})$ este o distribuție regulată, definită de o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu proprietatea că integrala în sens Lebesgue

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

este convergentă. Spațiul Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, numit *spațiul funcțiilor de pătrat integrabil*, este utilizat pentru descrierea sistemelor cuantice unidimensionale. O funcție $f \in L^2(\mathbb{R})$ este numită *funcție normată* dacă $\|f\| = 1$, unde

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Fiecărei funcții nenule $f \in L^2(\mathbb{R})$ îi corespunde funcția normată $\psi(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$.

14.3.29 În starea cuantică descrisă de funcția normată $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, numărul

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

reprezintă probabilitatea de a găsi particula în intervalul $[a, b]$, iar

$$\int_a^b |\mathcal{F}[\psi](p)|^2 dp$$

probabilitatea ca impulsul particulei să aparțină intervalului $[a, b]$.

În mecanica cuantica, se utilizează transformarea Fourier (v. pag. 339-5)

$$\mathcal{F}[f](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} f(x) dx \quad (14.13)$$

care este o transformare unitară, având ca inversă transformarea adjuncă

$$\mathcal{F}^+[f](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} f(x) dx.$$

Într-un sistem de unități de măsură în care $\hbar=1$, definiția (14.13) devine

$$\mathcal{F}[f](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) dx.$$

14.3.30 Operatorul coordonată (v. pag. 363-24)

$$\begin{aligned} \hat{x}: D_x &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) : f \mapsto \hat{x}f, \\ (\hat{x}f)(x) &= x f(x), \end{aligned}$$

definit pe subspațiul $D_x \subset L^2(\mathbb{R})$ format din funcțiile f cu proprietatea că funcția $x f(x)$ aparține lui $L^2(\mathbb{R})$, nu admite funcții proprii.

Utilizând scufundarea $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, putem considera prelungirea

$$\hat{x} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : f \mapsto xf,$$

pentru care distribuțiile Dirac δ_a sunt distribuții proprii

$$\hat{x}\delta_a = a\delta_a.$$

Se admite că δ_a descrie starea ideală în care particula este localizată în a .
Deoarece

$$\mathcal{F}[\delta_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \quad \text{și} \quad |\mathcal{F}[\delta_a](p)|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

în starea ideală δ_a , toate valorile impulsului sunt egal probabile.

14.3.31 Știm că polinoamele Hermite verifică relația (v. pag. 313-13)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_k(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nk}.$$

Se poate arăta că sistemul de funcții Hermite-Gauss $\{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots\}$, unde

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

este bază ortonormată în $L^2(\mathbb{R})$. Scriind $|n\rangle$ în loc de Ψ_n , avem

$$\langle n|k\rangle = \delta_{nk} \quad \text{și} \quad \mathbb{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|.$$

Din relația obținută la pag. 343-15, rezultă că

$$\mathcal{F}|n\rangle = (-i)^n |n\rangle$$

și prin urmare, putem defini transformarea Fourier pe $L^2(\mathbb{R})$ ca fiind

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n |n\rangle \langle n|.$$

14.3.32 Dacă scriem $|a\rangle$ în loc de δ_a , relația formală

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x) f(x) dx = f(t)$$

se poate scrie sub forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \langle x| f \rangle dx = |f\rangle$$

și formal avem

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|.$$

Avem aici o suprapunere de notații: $|x\rangle$, $|n\rangle$, $|z\rangle$ nu coincid pentru $x=n=z$.

14.3.33 Teoremă. *Stările coerente standard $\{|z\rangle\}_{z \in \mathbb{C}}$, unde*

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

nu formează un sistem ortonormat în $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z_1|^2 - \frac{1}{2}|z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2},$$

dar are loc rezoluția identității

$$\mathbb{I} = \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle \langle z|,$$

unde $d^2(x+yi) = \frac{1}{\pi} dx dy$.

Demonstrație. Oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$ avem

$$\langle z | z \rangle = e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} = 1.$$

Notând $z = \alpha + \beta i = r e^{i\theta}$ și utilizând relația

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{nm},$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z\rangle d^2 z \langle z| &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\iint d\alpha d\beta e^{-(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{(\alpha + \beta i)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\alpha - \beta i)^m}{\sqrt{m!}} \right) |n\rangle \langle m| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \left(\int_0^{\infty} dr r^{n+m+1} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} \right) |n\rangle \langle m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 \int_0^{\infty} dr r^{2n+1} e^{-r^2} \right) |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} \right) |n\rangle \langle n|. \end{aligned}$$

Deoarece, integrând prin părți

$$\int_0^\infty dt t^n e^{-t} = n \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t} = n(n-1) \int_0^\infty dt t^{n-2} e^{-t} = \dots = n!,$$

deducem că

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle \langle z| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}.$$

14.3.34 Utilizând funcțiile Hermite-Gauss $|n\rangle$, putem asocia unei funcții $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ operatorul autoadjunct

$$A_f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) |n\rangle \langle n|,$$

iar unui operator autoadjunct A funcția

$$f_A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_A(n) = \langle n|A|n\rangle.$$

Similar, utilizând stările coerente $|z\rangle$, putem asocia unei funcții $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ (pentru care integrala este convergentă) operatorul autoadjunct

$$A_f = \int_{\mathbb{C}} |z\rangle f(z) d^2 z \langle z|,$$

iar unui operator autoadjunct A funcția

$$f_A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_A(z) = \langle z|A|z\rangle.$$

În cazul oscilatorului armonic, operatorul corespunzător energiei

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$$

admite descompunerea spectrală

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle \langle n|$$

și reprezentarea

$$H = -\frac{1}{2} \mathbb{I} + \int_{\mathbb{C}} |z\rangle |z|^2 d^2 z \langle z|$$

Cuantificarea $f \mapsto A_f$ (trecere funcție $\mapsto$ operator) și decuantificarea $A \mapsto f_A$ (trecere operator $\mapsto$ funcție) joacă un rol important în mecanica cuantică.

14.3.35 Pentru descrierea stării sistemului cuantic, în locul funcției normate

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$, se mai pot utiliza:

- funcția $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \langle z | \psi \rangle$, având în vedere că

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} d^2z |z\rangle \langle z | \psi \rangle;$$

- proiectorul ortogonal $|\psi\rangle \langle \psi|$, adică operatorul densitate

$$L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) : |\varphi\rangle \mapsto |\psi\rangle \langle \psi | \varphi \rangle;$$

- funcția Wigner $W_\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, unde

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ipy} \overline{\psi(x+y)} \psi(x-y) dy.$$

Utilizând relația (v. pag. 337-1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

obținem că funcția Wigner corespunzătoare funcției gaussiene normate

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} e^{-ax^2},$$

unde $a \in (0, \infty)$, este produsul a două funcții gaussiene:

$$W_\psi(x, p) = \frac{\sqrt{2a}}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ipy} e^{-a(x+y)^2} e^{-a(x-y)^2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-2ax^2} e^{-\frac{p^2}{2a}}.$$

Utilizarea de descrieri alternative permite o mai buna investigare a efectelor cuantice, o diversificare și perfecționare a modelelor matematice utilizate.

14.3.36 Operatorul impuls (v. pag. 363-24)

$$\hat{p} : D_p \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \hat{p} = -i \frac{d}{dx},$$

definit pe subspațiul $D_p \subset L^2(\mathbb{R})$ format din funcțiile f derivabile și cu proprietatea că funcția f' aparține lui $L^2(\mathbb{R})$, nu admite funcții proprii.

Utilizând scufundarea $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, putem considera prelungirea

$$\hat{p} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : f \mapsto -if',$$

pentru care distribuțiile de tip funcție $\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$ sunt distribuții proprii

$$\hat{p}\phi_p = p\phi_p.$$

În cazul stării nenormabile descrise de ϕ_p , avem $|\phi_p(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ și prin urmare toate pozițiile sunt egal probabile. Deoarece

$$\langle \mathcal{F}[\phi_p], \varphi \rangle = \langle \phi_p, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \mathcal{F}[\varphi](x) dx = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]](p) = \varphi(p) = \langle \delta_p, \varphi \rangle$$

adică $\mathcal{F}[\phi_p] = \delta_p$, singura valoare posibilă pentru impuls este p .

14.3.37 Relația $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$, adevărată oricare ar fi distribuția f , scrisă formal

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ipy} f(y), \quad (14.14)$$

poate fi interpretată ca fiind

$$|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\phi_p\rangle \langle \phi_p| f\rangle$$

și prin urmare, simbolic, putem scrie

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dp |\phi_p\rangle \langle \phi_p|.$$

Relația (14.14), re-scrisă sub forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-y)} dp \right) f(y),$$

sugerează că, formal,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x-y)} dp = \delta_x(y) = \delta(x-y),$$

integrala fiind, evident, divergentă. Relația corespunde formulei $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$.

14.3.38 Utilizând egalitățile $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$ și $\hat{p}|\phi_p\rangle = p|\phi_p\rangle$, se obțin relațiile formale

$$\hat{x} = \hat{x}\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x|x\rangle \langle x| \quad \text{și} \quad \hat{p} = \hat{p}\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dp p|\phi_p\rangle \langle \phi_p|.$$

14.3.39 Relația

$$\begin{aligned} \varphi(x+a) &= \varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{1!}a + \frac{\varphi''(x)}{2!}a^2 + \dots \\ &= \left(\mathbb{I} + \frac{1}{1!}a\frac{d}{dx} + \frac{1}{2!}a^2\frac{d^2}{dx^2} + \dots \right) \varphi(x) = e^{a\frac{d}{dx}} \varphi(x) \end{aligned}$$

se mai poate scrie sub forma

$$\varphi(x+a) = e^{ia\hat{p}}\varphi(x).$$

14.3.40 Deoarece (v. pag. 328-24)

$$(xf)' = f + xf', \quad \text{oricare ar fi } f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

operatorii

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : f \mapsto xf, \\ \hat{p} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : f \mapsto -if' \end{aligned} \quad (14.15)$$

verifică relația de comutare

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\mathbb{I},$$

unde, prin definiție, $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$.

14.3.41 Transformările Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), & \mathcal{F}[\varphi](p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \varphi(x) dx, \\ \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}), & \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \end{aligned}$$

sunt bijective și $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Din

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[-i \frac{d\varphi}{dx} \right] (p) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \frac{d\varphi}{dx}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-ipx} \varphi(x) dx = p \mathcal{F}[\varphi](p), \end{aligned}$$

rezultă că restricțiile lui $\hat{x}$ și $\hat{p}$ la $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ verifică egalitatea

$$\mathcal{F}\hat{p} = \hat{x}\mathcal{F}$$

adică

$$\hat{p} = \mathcal{F}^{-1} \hat{x} \mathcal{F}. \quad (14.16)$$

Din relațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} [\hat{x}\mathcal{F}[\varphi]](p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \varphi(y) dy \right) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \varphi(y) dy \right) dx = -\mathcal{F} [\hat{x}\mathcal{F}^{-1}[\varphi]](p), \\ \langle \hat{p}f, \varphi \rangle &= \langle -if', \varphi \rangle = \langle f, i\varphi' \rangle = \langle f, -\hat{p}\varphi \rangle = \langle f, -\mathcal{F}^{-1}[\hat{x}\mathcal{F}[\varphi]] \rangle \\ &= \langle f, \mathcal{F}[\hat{x}\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \hat{x}\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[\hat{x}\mathcal{F}[f]], \varphi \rangle \end{aligned}$$

rezultă că și operatorii (14.15) verifică relația (14.16).

14.3.42 În cazul unei măsurători ideale, observabila este descrisă de un operator autoadjunct A . În starea pură descrisă de funcția normată $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, la o repetare a măsurătorii, rezultatele obținute sunt distribuite în jurul valorii medii

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle.$$

O măsură a gradului de dispersare a lor este dată de *abaterea medie pătratică*

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle} = \sqrt{\langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2},$$

adică

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

14.3.43 Dacă $|\psi\rangle$ este stare proprie a observabilei A ,

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle,$$

atunci, în starea $|\psi\rangle$, avem

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2} = 0.$$

14.3.44 Teoremă (Relația de incertitudine).

Dacă A și B sunt doi operatori autoadjuncți și

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle}, \quad \Delta B = \sqrt{\langle \psi, (B - \langle B \rangle)^2 \psi \rangle},$$

atunci

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|}{2},$$

oricare ar fi starea normată $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Demonstrație. Fie $C = A - \langle A \rangle$, $D = B - \langle B \rangle$, $[C, D] = CD - DC$, $\{C, D\} = CD + DC$ și

$$\langle C\psi, D\psi \rangle = \alpha + \beta i \quad \text{cu} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Din relațiile

$$\langle \psi, CD\psi \rangle = \langle C\psi, D\psi \rangle = \alpha + \beta i$$

$$\langle \psi, DC\psi \rangle = \langle D\psi, C\psi \rangle = \alpha - \beta i$$

rezultă că

$$\langle \psi, [C, D]\psi \rangle = \langle \psi, CD\psi \rangle - \langle \psi, DC\psi \rangle = 2\beta i$$

$$\langle \psi, \{C, D\}\psi \rangle = \langle \psi, CD\psi \rangle + \langle \psi, DC\psi \rangle = 2\alpha$$

și prin urmare

$$|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2 + |\langle \psi, \{C, D\}\psi \rangle|^2 = 4 |\langle C\psi, D\psi \rangle|^2.$$

Însă, conform inegalității Cauchy-Schwarz,

$$|\langle C\psi, D\psi \rangle|^2 \leq \langle C\psi, C\psi \rangle \langle D\psi, D\psi \rangle.$$

Deoarece $\langle C\psi, C\psi \rangle = \langle \psi, C^2\psi \rangle$ și $\langle D\psi, D\psi \rangle = \langle \psi, D^2\psi \rangle$, din ultimele relații obținem

$$|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2 \leq 4 |\langle C\psi, D\psi \rangle|^2 \leq 4 \langle \psi, C^2\psi \rangle \langle \psi, D^2\psi \rangle,$$

adică inegalitatea

$$\langle \psi, C^2\psi \rangle \langle \psi, D^2\psi \rangle \geq \frac{|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2}{4}.$$

Utilizând relațiile

$$\begin{aligned} \langle \psi, C^2\psi \rangle &= \langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2\psi \rangle = (\Delta A)^2, \\ \langle \psi, D^2\psi \rangle &= \langle \psi, (B - \langle B \rangle)^2\psi \rangle = (\Delta B)^2, \\ \langle \psi, [C, D]\psi \rangle &= \langle \psi, [A, B]\psi \rangle, \end{aligned}$$

ultima inegalitate se mai scrie

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle \psi, [A, B]\psi \rangle|}{2}.$$

14.3.45 Dacă pregătim un număr mare de sisteme cuantice identice, toate în aceeași stare $|\psi\rangle$, și le utilizăm pe unele dintre ele pentru a măsura observabila A , iar pe celelalte pentru a măsura observabila B , atunci abaterile medii pătratice ΔA și ΔB verifică relația de incertitudine

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|}{2}.$$

În particular, deoarece $[\hat{x}, \hat{p}] = i\mathbb{I}$, avem

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{1}{2}.$$

14.3.46 În cazul stării cuantice descrise de funcția gaussiană normată

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$$

unde $a \in (0, \infty)$ este un parametru, din relațiile

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi, \hat{x} \psi \rangle = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = 0,$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \psi, \hat{x}^2 \psi \rangle = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = a^2,$$

$$\mathcal{F}[\psi](p) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} \mathcal{F} \left[e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \right] (p) = \sqrt[4]{\frac{2a^2}{\pi}} e^{-a^2 p^2},$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi, \mathcal{F}^+ \hat{x} \mathcal{F} \psi \rangle = \langle \mathcal{F}[\psi], \hat{x} \mathcal{F}[\psi] \rangle = 0,$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \psi, \mathcal{F}^+ \hat{x}^2 \mathcal{F} \psi \rangle = \langle \mathcal{F}[\psi], \hat{x}^2 \mathcal{F}[\psi] \rangle = \frac{1}{4a^2}$$

rezultă că

$$\Delta \hat{x} = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = a, \quad \Delta \hat{p} = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \frac{1}{2a}$$

și prin urmare, are loc relația

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} = \frac{1}{2}.$$

14.3.47 Fiecare funcție $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, definită pe un interval (a, b) , poate fi privită ca fiind restricția la (a, b) a funcției $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in (a, b) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (a, b). \end{cases}$$

Plecând de la spațiul

$$\mathfrak{L}^2(a, b) = \left\{ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right. \right\}$$

și urmând analogia cu construcția lui $L^2(\mathbb{R})$, se obține spațiul Hilbert $L^2(a, b)$ cu produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

14.3.48 Se poate arăta că sistemul de funcții $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ este bază ortonormată în spațiul Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$. Plecând de la polinoamele Legendre și folosind metoda prezentată la pag. 366-31, se obține o bază ortonormată în spațiul Hilbert $L^2(-1, 1)$. Similar, dar plecând de la polinoamele Laguerre se obține o bază ortonormată în spațiul Hilbert $L^2(0, \infty)$.

Bibliografie

- [1] I. Armeanu, *Analiză Funcțională*, Editura Universității din București, 1998.
- [2] S. Barnett, *Quantum Information*, Oxford University Press, 2009.
- [3] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg, E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003.
- [4] H. Cartan, *Calcul différentiel, Formes différentielles*, Herman, Paris, 1967.
- [5] Liviu-Adrian Cotfas, A finite-dimensional quantum model for the stock market, *Physica A* **392** (2013) 371-380.
- [6] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Properties of finite Gaussians and the discrete-continuous transition, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 425305.
- [7] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Finite oscillator obtained through finite frame quantization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013) 355301
- [8] N. Cotfas, J.-P. Gazeau and A. Vourdas, Finite-dimensional Hilbert space and frame quantization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 175303.
- [9] N. Cotfas și L.-A. Cotfas, *Elemente de Algebra Liniară*, Editura Universității din București, 20015.
- [10] N. Cotfas și L.-A. Cotfas, *Complemente de Matematică I*, Editura Universității din București, 2012.
- [11] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis I*, Academic Press, New York, 1960.

- [12] J.-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin, 2009.
- [13] G. Jaeger, *Quantum Information*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [14] J. F. James, *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2011.
- [15] S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2011.
- [16] A. Halanay, V. Olariu și S. Turbatu, *Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [17] P. Hamburg, P. Mocanu și N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcții complexe)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [18] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Analiză Funcțională*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [19] S. Lang, *Analysis I*, Addison Wesley, Massachusetts, 1969.
- [20] M. L. Mehta, 1987 Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 781
- [21] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [22] G. Mocică, *Probleme de Funcții Speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988.
- [23] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
- [24] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, and V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [25] I. L. Popescu, I. Armeanu, D. Blideanu, N. Cotfas și I. Șandru, *Probleme de Analiză Complexă*, Editura Tehnică, București, 1995.
- [26] R. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1978.

- [27] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc. Graw-Hill, New York, 1964.
- [28] L. Schwartz, *Analyse Mathématique* I, II, Hermann, Paris, 1967.
- [29] O. Stănășilă, *Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [30] D. Ștefănescu, *Analiză Reală*, Editura Universității din București, 1990.
- [31] J.D. Talman, *Special Functions. A Group Theoretical Approach*, Benjamin, New York, 1968.
- [32] C. Timofte, *Differential Calculus*, Editura Universității din București, 2009.
- [33] C. Timofte, *Complex Analysis*, Editura Universității din București, 2014.
- [34] V. S. Vladimirov, *Ecuațiile Fizicii Matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
- [35] V. S. Vladimirov și alții, *Culegere de Probleme de Ecuațiile Fizicii Matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
- [36] A. Vourdas, Quantum systems with finite Hilbert space, *Rep. Prog. Phys.* **67** (2004) 267-320.
- [37] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Cambridge Mathematical Library: A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [38] *** *Analiză Matematică* (Universitatea din București), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.