

Nicolae Cotfas

Liviu-Adrian Cotfas

ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

N. Cotfas:

Tel: 074 278 4634

E-mail: ncotfas@yahoo.com

<https://unibuc.ro/user/nicolae.cotfas/>

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

Introducere

Pe parcursul acestei cărți ne propunem să oferim o inițiere în algebra liniară celor interesați de utilizarea modelelor matematice în fizică, inginerie și economie. Prezentarea unor noțiuni și rezultate referitoare la matrice, determinanți, spații vectoriale, operatori liniari și produse tensoriale este urmată de aplicații în studiul formelor pătratice, conicelor, ecuațiilor diferențiale liniare, reprezentărilor liniare ale grupurilor, reprezentărilor liniare ale algebrelor Lie și în descrierea sistemelor cuantice.

Introducerea unei noțiuni sau prezentarea unui rezultat matematic este pregătită prin exemple adecvate. În cazul unor demonstrații mai dificile ne-am limitat la analiza unui caz particular sau la prezentarea de exemple care să scoată în evidență ideea de bază a demonstrației. Împărțirea materialului expus în itemi a permis inserarea unui număr mare de trimiteri atât la definiții și teoreme cât și la diverse comentarii, exemple și exerciții. Itemii marcați cu * pot fi ocoliți la o primă lectură.

Cartea se adresează în primul rând studenților de la facultățile de fizică. Se urmărește familiarizarea cititorului cu convenția de sumare a lui Einstein, notația lui Dirac, operatorii Pauli, transformarea Fourier finită și cu produsul tensorial de spații și operatori. Pentru a fi în concordanță cu terminologia din mecanica cuantică, în loc de spațiu cu produs scalar finit-dimensional se utilizează termenul de spațiu Hilbert. În ultimul capitol al cărții arătăm cum sunt utilizate în mecanica cuantică unele dintre noțiunile și rezultatele prezentate în capitolele 1-3. Considerăm că studiul sistemelor cuantice cu spațiu Hilbert finit-dimensional, bazat ca model matematic pe algebra liniară, este adecvat pentru un prim contact al studenților cu universul fascinant al fizicii cuantice.

Cartea se bazează pe cursurile predate de primul autor la Facultatea de Fizică, Universitatea din București. Noțiunile și rezultatele teoretice au fost amplu ilustrate de al doilea autor prin inserarea unor exerciții și a unor aplicații bazate pe programul MATHEMATICA.

București, 2015

Nicolae Cotfas
Liviu-Adrian Cotfas

Cuprins

1	Matrice și determinanți	11
1.1	Matrice	11
1.2	Determinanți	16
1.3	Matrice diagonalizabile	27
1.4	Matrice hermitiene	31
1.5	Matrice unitare și ortogonale	32
1.6	Produs tensorial de matrice	34
2	Spații vectoriale finit-dimensionale	39
2.1	Spații vectoriale	39
2.2	Transformări liniare	59
2.3	Dualul unui spațiu vectorial	79
2.4	Sume de spații vectoriale	83
2.5	Produs tensorial de spații vectoriale	88
2.6	Tensori pe un spațiu vectorial	96
3	Spații Hilbert finit-dimensionale	103
3.1	Spații cu produs scalar	103
3.2	Baze ortonormate	109
3.3	Dualul unui spațiu cu produs scalar	115
3.4	Frame-uri exacte	120
3.5	Spații Hilbert	124
3.6	Mulțimi convexe	128
3.7	Adjunctul unui operator liniar	130
3.8	Operatori autoadjuncți (hermitieni)	134

3.9	Elemente de calcul funcțional	141
3.10	Operatori pozitivi	144
3.11	Proiectori	146
3.12	Transformări unitare și ortogonale	151
3.13	Transformarea Fourier finită	159
3.14	Transformarea Fourier finită bidimensională	169
3.15	Transformarea Fourier unitară	173
3.16	Elemente ale structurii unui spațiu Hilbert	178
3.17	Produs tensorial de spații Hilbert	186
4	Forme pătratice	193
4.1	Definiție și exemple	193
4.2	Reducerea la forma canonică	196
5	Conice și cuadrice	203
5.1	Conice	203
5.2	Reducerea la forma canonică	208
5.3	Cuadrice	212
6	Ecuatii și sisteme de ecuații diferențiale liniare	215
6.1	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi	215
6.2	Ecuatii diferențiale liniare de ordin superior	221
6.3	Sisteme diferențiale liniare	231
7	Reprezentări liniare	241
7.1	Grupuri	241
7.2	Reprezentări liniare	242
7.3	Reprezentări ireductibile	245
7.4	Reprezentări unitare și ortogonale	247
7.5	Grupul rotațiilor. Reprezentări liniare	249
8	Algebre Lie	257
8.1	Algebre Lie	257
8.2	Reprezentări liniare	264
8.3	Reprezentări ireductibile	266

8.4	Reprezentările algebrelor $sl(2, \mathbb{C})$, $su(2)$ și $o(3)$	268
9	Sisteme cuantice cu spațiu Hilbert finit-dimensional	279
9.1	Stări pure și stări mixte	279
9.2	Sisteme cuantice cu spațiu Hilbert bidimensional	285
9.3	Măsurători ideale	294
9.4	Măsurători generalizate	302
9.5	Sisteme compuse	306
9.6	Evoluția în timp a stării unui sistem cuantic	324
9.7	Versiuni finit-dimensionale ale oscilatorului armonic	335

Capitolul 1

Matrice și determinanți

1.1 Matrice

1.1.1 Definiție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Prin *matrice* cu n linii și m coloane, cu elemente din $\mathbb{K}$, se înțelege o aplicație de forma

$$A : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K} : (i, j) \mapsto a_{ij},$$

descrisă uzual cu ajutorul tabloului

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

care conține valorile funcției. Vom nota cu $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ mulțimea tuturor matricelor cu n linii și m coloane, cu elemente din $\mathbb{K}$.

1.1.2 O reprezentare alternativă foarte avantajoasă este

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

1.1.3 O notație standard pentru elementele matricei A este A_{ij} , respectiv A_j^i , adică

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}, \quad \text{respectiv} \quad A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^m \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \cdots & A_n^m \end{pmatrix}.$$

1.1.4 *Suma* $A+B$ a două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ se definește prin relația

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix},$$

iar *produsul* dintre un număr $\lambda \in \mathbb{K}$ și o matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ prin

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

1.1.5 Propoziție. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, atunci

$$(A+B)+C = A+(B+C), \quad A+B = B+A,$$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$1A = A, \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

Demonstrație. Relațiile rezultă din

$$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}), \quad a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij},$$

$$\alpha(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}, \quad (\alpha+\beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij},$$

$$1 a_{ij} = a_{ij}, \quad \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij}.$$

1.1.6 Produsul AB al matricelor $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ se definește prin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{1j} b_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{nj} b_{jp} \end{pmatrix}.$$

Înmulțirea matricelor este definită numai în cazul în care numărul de coloane ale primului factor este egal cu numărul de linii ale celui de al doilea.

1.1.7 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ și $C \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{K})$, atunci

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demonstrație. Avem

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}.$$

1.1.8 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ și $B, C \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$, atunci

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Demonstrație. Avem

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^m a_{ij} c_{jk}.$$

1.1.9 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ și $\lambda \in \mathbb{K}$, atunci

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Demonstrație. Avem

$$\lambda \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^m (\lambda a_{ij}) b_{jk} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (\lambda b_{jk}).$$

1.1.10 În cazul unei matrice pătrate A , elementele a_{ii} formează diagonala principală. Dacă singurele elemente nenule sunt cele de pe diagonala principală, A este numită *matrice diagonală*. O notație convenabilă este

$$\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

1.1.11 Pentru orice n , *matricea unitate* de ordinul n

$$I \equiv I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

este element neutru față de înmulțirea matricelor

$$AI = IA = A, \quad \text{oricare ar fi } A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

1.1.12 Definiție. O matrice pătrată $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este *inversabilă* dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$AB = BA = I.$$

Matricea B este numită *inversa* lui A și se notează cu A^{-1} .

1.1.13 Inversa unei matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, dacă există, este unică,

$$\left. \begin{array}{l} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{array} \right\} \implies B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

1.1.14 Pentru o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, se definesc puterile întregi prin

$$A^0 = I, \quad A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ ori}}, \quad A^{-k} = \underbrace{A^{-1} A^{-1} \dots A^{-1}}_{k \text{ ori}}.$$

1.1.15 Pentru $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ există AB și BA , dar, în general,

$$AB \neq BA.$$

De exemplu,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.16 Definiție. *Comutatorul* a două matrice pătrate $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este

$$[A, B] = AB - BA$$

iar *anti-comutatorul* este

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

1.1.17 Matricele Pauli (mai multe notații alterantive sunt prezentate)

$$\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

verifică relațiile

$$\begin{aligned} [\sigma_1, \sigma_2] &= 2i\sigma_3, & [\sigma_2, \sigma_3] &= 2i\sigma_1, & [\sigma_3, \sigma_1] &= 2i\sigma_2 \\ \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, & \{\sigma_1, \sigma_2\} &= \{\sigma_2, \sigma_3\} = \{\sigma_3, \sigma_1\} = 0. \end{aligned}$$

1.1.18 Definiție. *Urma* unei matrice pătrate este suma elementelor de pe diagonala principală

$$\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

1.1.19 Aplicația $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} : A \mapsto \operatorname{tr} A$ este liniară,

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B, \quad \operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A,$$

și ciclică,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \quad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB).$$

În particular, dacă S este o matrice inversabilă, atunci

$$\operatorname{tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{tr} A.$$

1.1.20 Definiție. Fiecarei matrice i se poate asocia *transpusa*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \mapsto {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

1.1.21 Aplicația $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : A \mapsto {}^tA$ este liniară,

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA,$$

și

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA, \quad {}^t({}^tA) = A.$$

1.1.22 Definiție. $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este numită *matrice simetrică* dacă $A = {}^tA$, adică

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{oricare ar fi } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este numită *matrice antisimetrică* dacă $A = -{}^tA$.

1.1.23 Orice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este suma dintre o matrice simetrică și una antisimetrică

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA).$$

1.1.24 În mod uzual, o matrice este definită ca fiind o aplicație

$$A: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K},$$

dar în anumite situații, o definiție alternativă poate fi mai avantajoasă.

Putem, de exemplu, defini o matrice ca fiind o aplicație de forma

$$A: \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sau

$$A: \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\} \times \{-m, -m+1, \dots, m-1, m\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sau

$$A: (\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, m\}) \times (\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, m\}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

1.2 Determinanți

1.2.1 Definiție. Prin *permutare* de ordinul n se înțelege o funcție bijectivă

$$s: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

descrișă în mod uzual cu ajutorul unui tabel

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}.$$

Notăm cu S_n mulțimea tuturor permutărilor de ordinul n .

1.2.2 Prin *signatura* permutării $s: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ se înțelege numărul

$$\varepsilon(s) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{s(i) - s(j)}{i - j}.$$

1.2.3 Definiție. *Determinantul* matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}).$$

este numărul

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \cdots a_{ns(n)} \quad (1.1)$$

1.2.4 Exemplu. Avem $S_2 = \{s_1, s_2\}$, unde

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(s_1) = 1 \quad \text{și} \quad \varepsilon(s_2) = -1.$$

Determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$$

este

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \quad (1.2)$$

1.2.5 Exemplu. Avem $S_3 = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$, unde

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

și

$$\varepsilon(s_1) = \varepsilon(s_2) = \varepsilon(s_3) = 1, \quad \varepsilon(s_4) = \varepsilon(s_5) = \varepsilon(s_6) = -1.$$

Determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$$

este

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \quad (1.3)$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

1.2.6 Din definiția (1.1) rezultă că $\det A$ este o sumă de produse de câte n elemente ale matricei A , fiecare produs conținând un singur element de pe fiecare linie, și un singur element de pe fiecare coloană.

1.2.7 Din relația (1.3) rezultă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(determinantul unei matrice coincide cu determinantul transpusei). Se poate demonstra ca o astfel de relație are loc pentru orice matrice pătrată.

1.2.8 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, atunci

$$\det A = \det {}^t A.$$

1.2.9 Din (1.3) rezultă relațiile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

(dacă schimbăm între ele două linii semnul determinantului se schimbă),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

(dacă schimbăm între ele două coloane semnul determinantului se schimbă). Se poate demonstra ca un astfel de rezultat este valabil pentru orice matrice pătrată.

1.2.10 Propoziție. Dacă se schimbă între ele două linii (sau două coloane) ale unei matrice pătrate, atunci se obține o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

1.2.11 Propoziție. Dacă în matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ toate elementele unei linii (sau coloane) sunt nule, atunci $\det A = 0$.

Demonstrație. Afirmatia rezultă direct din definiția (1.1).

1.2.12 Din (1.3) rezultă că

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & a_{13} \\ \alpha_2 & \alpha_2 & a_{23} \\ \alpha_3 & \alpha_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Se poate demonstra următorul rezultat mai general.

1.2.13 Propoziție. *Determinantul unei matrice pătrate cu două linii (sau coloane) identice este nul.*

1.2.14 Propoziție. *Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

și

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Relațiile rezultă direct din definiția (1.1).

1.2.15 Propoziție. *Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale, atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Afirmția rezultă din propozițiile 13 și 14.

1.2.16 Propoziție. *Avem*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \cdots & a_{kn} + b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

și

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} + b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} + b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Relațiile rezultă direct din definiția (1.1).

1.2.17 Propoziție. *Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătrate este o combinație liniară de celelalte linii (respectiv coloane), atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Afirmția rezultă din propozițiile 15 și 16.

1.2.18 Propoziție. *Dacă la o linie (sau coloană) a unei matrice pătrate adunăm elementele unei alte linii (respectiv coloane) înmulțite cu același număr determinantul matricei rezultate coincide cu determinantul matricei inițiale.*

Demonstrație. Afirmția rezultă din propozițiile 15 și 16.

1.2.19 Relația (1.3) se poate scrie sub formele

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după prima linie),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după linia a doua),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după linia a treia),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{2+1}a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după prima coloană),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{2+2}a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după coloana a doua),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{2+3}a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(dezvoltare după coloana a treia).

1.2.20 Relațiile anterioare pot fi generalizate și utilizate în calculul determinanților.

1.2.21 Propoziție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}),$$

atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (1.4)$$

unde A_{ij} este matricea care se obține din A eliminând linia i și coloana j .

1.2.22 Propoziție. Oricare ar fi $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{k+j} \det A_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq k \\ \det A & \text{dacă } i = k \end{cases} \quad (1.5)$$

notațiile fiind cele din propoziția anterioară.

Demonstrație. În cazul $i = k$ afirmația rezultă din propoziția anterioară. În cazul $i \neq k$ relația rezultă dezvoltând după linia k determinantul cu două linii identice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

obținut înlocuind în

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

linia k cu linia i .

1.2.23 Teoremă. Matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$, și inversa ei este

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{2+1} A_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} A_{n1} \\ (-1)^{1+2} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{1+n} A_{1n} & (-1)^{2+n} A_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n} A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

Demonstrație. Afirmația rezultă din propoziția anterioară.

[illegible]
$$Ax = b$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$
[illegible]
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad \cdots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Demonstrație. Scriind sistemul sub forma matriceală

$$Ax = b$$

rezultă ca el are soluția

$$x = A^{-1}b.$$

Din relațiile (1.4) și (1.6) rezultă

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n b_j (-1)^{j+1} A_{j1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \\ x_n = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n b_j (-1)^{j+n} A_{jn} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

1.2.26 Exercițiu. Să se verifice prin calcul direct că în cazul a două matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

avem

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

1.2.27 Se poate arăta că relația $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ are loc oricare ar fi matricele A și B de același ordin. În particular, în cazul unei matrice inversabile

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

1.2.28 Definiție. Prin *grup* se înțelege o mulțime G înzestrată cu o lege de compoziție

$$G \times G \longrightarrow G : (a, b) \mapsto a * b$$

satisfăcând condițiile:

- 1) $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G;$
- 2) există $e \in G$ astfel încât
$$a * e = e * a = a \quad \forall a \in G;$$
- 3) oricare ar fi $a \in G$ există $a' \in G$ astfel încât
$$a * a' = a' * a = e.$$

1.2.29 Multimea

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0 \},$$

înzestrată cu înmulțirea, este grup (numit *grupul general liniar* de ordinul n).

Submultimea

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det A = 1 \}$$

este subgrup al lui $GL(n, \mathbb{K})$ (numit *grupul special liniar* de ordinul n).

1.2.30 Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ și fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

Prin *minor* de ordin k al lui A se înțelege un determinant de forma

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

unde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ și $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$.

1.2.31 Definiție. Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ are *rangul* r și scriem

$$\text{rang } A = r$$

dacă A are un minor de ordinul r nenul și toți minorii de ordin mai mare sunt nuli.

1.2.32 Propoziție. Matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ are rangul r dacă are un minor de ordinul r nenul și toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli.

Demonstrație. Conform relației (1.4), orice minor de ordinul $r+2$ (sau mai mare) se poate exprima ca o combinație liniară de minori de ordinul $r+1$.

1.2.33 Propoziție. Dacă matricele A, B sunt astfel încât AB există, atunci

$$\text{rang}(AB) \leq \text{rang } A \quad \text{și} \quad \text{rang}(AB) \leq \text{rang } B.$$

Demonstrație. Orice minor de ordin r al lui AB este o combinație liniară de minori de ordin r ai lui A

$$\begin{vmatrix} (AB)_{i_1 j_1} & \cdots & (AB)_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (AB)_{i_r j_1} & \cdots & (AB)_{i_r j_r} \end{vmatrix} = \sum_{k_1, \dots, k_r} B_{k_1 j_1} \cdots B_{k_r j_r} \begin{vmatrix} A_{i_1 k_1} & \cdots & A_{i_1 k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_r k_1} & \cdots & A_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

și în același timp o combinație liniară de minori de ordin r ai lui B .

$$\begin{vmatrix} (AB)_{i_1 j_1} & \cdots & (AB)_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (AB)_{i_r j_1} & \cdots & (AB)_{i_r j_r} \end{vmatrix} = \sum_{k_1, \dots, k_r} A_{i_1 k_1} \cdots A_{i_r k_r} \begin{vmatrix} B_{k_1 j_1} & \cdots & B_{k_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_r j_1} & \cdots & B_{k_r j_r} \end{vmatrix}.$$

1.2.34 Dacă elementele matricei

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

sunt funcții derivabile, atunci utilizând definiția

$$A'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0},$$

obținem

$$A'(t_0) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a_{11}(t) - a_{11}(t_0)}{t - t_0} & \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a_{12}(t) - a_{12}(t_0)}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a_{21}(t) - a_{21}(t_0)}{t - t_0} & \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a_{22}(t) - a_{22}(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}(t_0) & a'_{12}(t_0) \\ a'_{21}(t_0) & a'_{22}(t_0) \end{pmatrix},$$

adică formula

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

În cazul determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t) a_{22}(t) - a_{12}(t) a_{21}(t),$$

formula de derivare se poate scrie sub formele

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix},$$

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

Formulele obținute se pot generaliza ușor.

1.3 Matrice diagonalizabile

1.3.1 Definiție. Prin *valoare proprie* a unei matrice pătrate $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ se înțelege orice soluție a ecuației $\det(A - \lambda I) = 0$, adică a ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.2 Definiție. Spunem despre o matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ că este *diagonalizabilă* dacă există $S \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ inversabilă și $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S. \quad (1.7)$$

1.3.3 Deoarece $I = S^{-1}S$ avem

$$A - \lambda I = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} S,$$

și prin urmare

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Valorile proprii ale matricei diagonalizabile A sunt numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

1.3.4 Din relația (1.7) rezultă că, în cazul matricei diagonalizabile A , avem

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad \text{și} \quad \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

1.3.5 Dacă A este diagonalizabilă, din (1.7) rezultă că

$$A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} S, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Dacă $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \neq 0$, atunci A este inversabilă,

$$A^{-1} = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} S$$

și

$$A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} S, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

1.3.6 Dacă matricea (1.7) satisface condițiile $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, atunci

$$M = S^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S$$

are proprietatea $M^2 = A$ și definim

$$\sqrt{A} = S^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S.$$

În general, matricea M cu proprietatea $M^2 = A$ nu este unică.

De exemplu, dacă $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$, atunci

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 \\ = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2.$$

1.3.7 Utilizând relația

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

adevărată oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, se poate arăta că

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} S = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S.$$

1.3.8 Definiție. *Exponențiala* matricei diagonalizabile

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} S$$

este matricea

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S.$$

1.3.9 Dacă A este diagonalizabilă,

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} S,$$

și t este un parametru real, atunci

$$tA = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n t \end{pmatrix} S, \quad e^{tA} = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S$$

și

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S \\ &= S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S = A e^{tA}. \end{aligned}$$

1.3.10 Dacă matricea (1.7) satisface condițiile $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$, atunci

$$M = S^{-1} \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ln \lambda_n \end{pmatrix} S$$

are proprietatea $e^M = A$ și definim

$$\ln A = S^{-1} \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ln \lambda_n \end{pmatrix} S.$$

1.3.11 În general, dacă $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție și matricea (1.7) satisface condiția $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in J$, atunci putem defini matricea

$$f(A) = S^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S.$$

1.4 Matrice hermitiene

1.4.1 Definiție. *Adjuncta* (conjugata transpusei) matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

este matricea

$$A^* = {}^t \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1m} & \bar{a}_{2m} & \cdots & \bar{a}_{nm} \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Adjuncta unei matrice cu elemente reale este transpusa

$$A^* = {}^t A, \quad \text{oricare ar fi } A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

1.4.3 Aplicația $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : A \mapsto A^*$ este conjugat liniară

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*,$$

și

$$(AB)^* = B^* A^*, \quad (A^*)^* = A.$$

1.4.4 Definiție. O *matrice hermitiană* (autoadjunctă) este o matrice pătrată

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

care coincide cu adjuncta ei ($A^* = A$), adică satisface relația

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Matricea A este numită *antihermitiană* dacă $A^* = -A$.

1.4.5 Orice matrice A este suma dintre o matrice hermitiană și una antihermitiană,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*).$$

1.4.6 Matricele Pauli (pag. 14-17) sunt hermitiene și pentru orice matrice hermitiană $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ există $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, unic determinate, astfel încât

$$A = \frac{1}{2} (a_0 I + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3).$$

Această relație se poate scrie sub forma

$$A = \frac{1}{2} (a_0 I + a \cdot \sigma)$$

utilizând notațiile

$$a = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{și} \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

În particular, avem $\text{tr } A = a_0$.

1.4.7 Orice matrice hermitiană este diagonalizabilă (a se vedea pag. 137-12).

1.5 Matrice unitare și ortogonale

1.5.1 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, atunci relațiile

$$A A^* = I, \quad A^* A = I, \quad A^{-1} = A^*$$

sunt echivalente.

Demonstrație. Dacă $A A^* = I$, atunci A este inversabilă,

$$A A^* = I \implies \det A \det A^* = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$$

și înmulțind relația $A A^* = I$ la stânga cu A^{-1} obținem $A^{-1} = A^*$. Similar, dacă $A^* A = I$, atunci A este inversabilă,

$$A^* A = I \implies \det A^* \det A = \det I = 1 \implies \det A \neq 0$$

și înmulțind relația $A A^* = I$ la dreapta cu A^{-1} obținem $A^{-1} = A^*$. Evident, relația $A^{-1} = A^*$ implică celelalte două relații.

1.5.2 Definiție. O matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ este numită *matrice unitară* dacă

$$A^* A = I$$

(condiție echivalentă cu $A^{-1} = A^*$ și cu $A A^* = I$).

1.5.3 Dacă A este matrice unitară, atunci $|\det A| = 1$. Într-adevăr,

$$A^* A = I \implies \det A \det A^* = 1 \implies |\det A|^2 = 1.$$

1.5.4 Mulțimea

$$U(n) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^* A = I \},$$

înzestrată cu înmulțirea, este grup (numit *grupul unitar* de ordinul n).

Submulțimea

$$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$$

este subgrup al lui $U(n)$ (numit *grupul special unitar* de ordinul n).

1.5.5 Orice matrice unitară este diagonalizabilă (a se vedea pag. 154-9).

1.5.6 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, atunci relațiile

$$A {}^t A = I, \quad {}^t A A = I, \quad A^{-1} = {}^t A$$

sunt echivalente.

1.5.7 Definiție. O matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ este numită *matrice ortogonală* dacă

$${}^t A A = I$$

(condiție echivalentă cu $A^{-1} = {}^t A$ și cu $A {}^t A = I$).

1.5.8 Dacă A este matrice ortogonală, atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

1.5.9 Mulțimea

$$O(n) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid {}^t A A = I \},$$

înzestrată cu înmulțirea, este grup (numit *grupul ortogonal* de ordinul n).

Submulțimea

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$$

este subgrup al lui $O(n)$ (numit *grupul special ortogonal* de ordinul n).

1.6 Produs tensorial de matrice

1.6.1 Definiție (caz particular). *Suma directă* a matricelor

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

este matricea bloc-diagonală

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^1 & b_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

Definiția se poate ușor extinde la matrice arbitrare.

1.6.2 Definiție (caz particular). *Produsul tensorial* al matricelor

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}$$

este bloc-matricea

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B & a_3^1 B \\ a_1^2 B & a_2^2 B & a_3^2 B \\ a_1^3 B & a_2^3 B & a_3^3 B \end{pmatrix},$$

adică

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_2^1 & a_2^1 b_1^1 & a_2^1 b_2^1 & a_3^1 b_1^1 & a_3^1 b_2^1 \\ a_1^1 b_1^2 & a_1^1 b_2^2 & a_2^1 b_1^2 & a_2^1 b_2^2 & a_3^1 b_1^2 & a_3^1 b_2^2 \\ a_2^2 b_1^1 & a_2^2 b_2^1 & a_2^2 b_1^1 & a_2^2 b_2^1 & a_3^2 b_1^1 & a_3^2 b_2^1 \\ a_2^2 b_1^2 & a_2^2 b_2^2 & a_2^2 b_1^2 & a_2^2 b_2^2 & a_3^2 b_1^2 & a_3^2 b_2^2 \\ a_1^3 b_1^1 & a_1^3 b_2^1 & a_2^3 b_1^1 & a_2^3 b_2^1 & a_3^3 b_1^1 & a_3^3 b_2^1 \\ a_1^3 b_1^2 & a_1^3 b_2^2 & a_2^3 b_1^2 & a_2^3 b_2^2 & a_3^3 b_1^2 & a_3^3 b_2^2 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Definiția se poate ușor extinde la matrice arbitrare.

Produsul tensorial mai este numit *produs direct* sau *produs Kronecker*.

1.6.3 Exemple. Avem

$$I \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6.4 Se arată ușor ca produsul tensorial are următoarele proprietăți

$$(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B);$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C;$$

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C;$$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C;$$

$${}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB.$$

1.6.5 Exercițiu. Arătați că

$$\text{tr}(A \otimes B) = (\text{tr } A)(\text{tr } B).$$

1.6.6 Teoremă . Dacă $A, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ și $B, D \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$, atunci

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Demonstrație. A se vedea pag. 94-20

1.6.7 Dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$, atunci

$$A \otimes B = (A \otimes I_m)(I_n \otimes B) \quad \det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

Dacă matricele A, B sunt inversabile, atunci $A \otimes B$ este inversabilă și

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

1.6.8 Teoremă.

Dacă matricele A, B sunt hermitiene, atunci $A \otimes B$ este hermitiană.

Dacă matricele A, B sunt unitare, atunci $A \otimes B$ este unitară.

Demonstrație. Avem

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* \quad \text{și} \quad (A \otimes B)(A \otimes B)^* = (AA^*) \otimes (BB^*).$$

1.6.9 Exercițiu. Fie $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$ și $C = A \otimes I_m + I_n \otimes B$.

Arătați că

$$[A \otimes I_m, I_n \otimes B] = 0, \quad e^C = e^A \otimes e^B.$$

1.6.10 Teoremă. Dacă a este valoare proprie a matricei $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ și b este valoare proprie a matricei $B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$, atunci:
 ab este valoare proprie a matricei $A \otimes B$;
 $a+b$ este valoare proprie a matricei $A \otimes I + I \otimes B$.

Demonstrație. A se vedea pag. 188-6.

1.6.11 În cazul produsului tensorial este avantajoasă folosirea perechilor de indici pentru indexarea liniilor și coloanelor. Utilizând prescurtarea $ij \equiv (i, j)$ și ordonarea lexicografică, avem

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{11, 12, 21, 22, 31, 32\}.$$

Produsul tensorial (1.8) poate fi privit ca fiind aplicația

$$A \otimes B: \{11, 12, 21, 22, 31, 32\} \times \{11, 12, 21, 22, 31, 32\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (A \otimes B)_{k\ell}^{ij} = A_k^i B_\ell^j,$$

și avem

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{11} & \alpha_{11}^{12} & \alpha_{11}^{21} & \alpha_{11}^{22} & \alpha_{11}^{31} & \alpha_{11}^{32} \\ \alpha_{12}^{11} & \alpha_{12}^{12} & \alpha_{12}^{21} & \alpha_{12}^{22} & \alpha_{12}^{31} & \alpha_{12}^{32} \\ \alpha_{21}^{11} & \alpha_{21}^{12} & \alpha_{21}^{21} & \alpha_{21}^{22} & \alpha_{21}^{31} & \alpha_{21}^{32} \\ \alpha_{22}^{11} & \alpha_{22}^{12} & \alpha_{22}^{21} & \alpha_{22}^{22} & \alpha_{22}^{31} & \alpha_{22}^{32} \\ \alpha_{31}^{11} & \alpha_{31}^{12} & \alpha_{31}^{21} & \alpha_{31}^{22} & \alpha_{31}^{31} & \alpha_{31}^{32} \\ \alpha_{32}^{11} & \alpha_{32}^{12} & \alpha_{32}^{21} & \alpha_{32}^{22} & \alpha_{32}^{31} & \alpha_{32}^{32} \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad \alpha_{k\ell}^{ij} = a_k^i b_\ell^j.$$

1.6.12 Definiție. Pentru o matrice descrisă utilizând perechi de indici

$$T = \left(T_{k\ell}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m}$$

se pot defini două *urme parțiale* și anume,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1 T &= \left(\sum_{i=1}^n T_{i\ell}^{ij} \right)_{1 \leq j, \ell \leq m}, \\ \mathrm{tr}_2 T &= \left(\sum_{j=1}^m T_{kj}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n}.\end{aligned}$$

1.6.13 În cazul produsului tensorial (1.8) avem

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1 (A \otimes B) &= \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{i\ell}^{ij} \right)_{1 \leq j, \ell \leq 2} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^i b_\ell^j \right)_{1 \leq j, \ell \leq 2} = (\mathrm{tr} A) B, \\ \mathrm{tr}_2 (A \otimes B) &= \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_{kj}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq 3} = \left(\sum_{j=1}^2 a_k^i b_j^j \right)_{1 \leq i, k \leq 3} = (\mathrm{tr} B) A.\end{aligned}$$

Relațiile obținute,

$$\mathrm{tr}_1 (A \otimes B) = (\mathrm{tr} A) B, \quad \mathrm{tr}_2 (A \otimes B) = (\mathrm{tr} B) A$$

au loc oricare ar fi matricele A și B .

1.6.14 Matricea $\mathrm{tr}_1 T$ este o sumă de blocuri diagonale

$$\mathrm{tr}_1 \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} & T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} & T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \\ T_{11}^{21} & T_{12}^{21} & T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} & T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix},$$

iar $\mathrm{tr}_2 T$ are ca elemente urmele tuturor blocurilor

$$\mathrm{tr}_2 \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} & T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} & T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \\ T_{11}^{21} & T_{12}^{21} & T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} & T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{tr} \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} \end{pmatrix} & \mathrm{tr} \begin{pmatrix} T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \end{pmatrix} \\ \mathrm{tr} \begin{pmatrix} T_{11}^{21} & T_{12}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} \end{pmatrix} & \mathrm{tr} \begin{pmatrix} T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

1.6.15 Propoziție. Oricare ar fi matricele A, B , avem

$$(\mathrm{tr}_2 (A \otimes B)) \otimes (\mathrm{tr}_1 (A \otimes B)) = (\mathrm{tr} (A \otimes B)) A \otimes B.$$

Demonstrație. Consecință directă a relațiilor

$$\mathrm{tr}_1(A \otimes B) = (\mathrm{tr} A)B, \quad \mathrm{tr}_2(A \otimes B) = (\mathrm{tr} B)A, \quad \mathrm{tr}(A \otimes B) = (\mathrm{tr} A)(\mathrm{tr} B).$$

1.6.16 Matricea

$$T = \begin{pmatrix} T_{11}^{11} & T_{12}^{11} & T_{21}^{11} & T_{22}^{11} \\ T_{11}^{12} & T_{12}^{12} & T_{21}^{12} & T_{22}^{12} \\ T_{11}^{21} & T_{12}^{21} & T_{21}^{21} & T_{22}^{21} \\ T_{11}^{22} & T_{12}^{22} & T_{21}^{22} & T_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nu este produsul tensorial a două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$ deoarece

$$(\mathrm{tr}_2 T) \otimes (\mathrm{tr}_1 T) \neq (\mathrm{tr} T) T.$$

1.6.17 Teoremă. Dacă T este o matrice descrisă cu perechi de indici

$$T = \left(T_{k\ell}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m},$$

atunci

$$\mathrm{tr}((A \otimes I_m)T) = \mathrm{tr}(A \mathrm{tr}_2 T), \quad \text{oricare ar fi } A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}),$$

$$\mathrm{tr}((I_n \otimes B)T) = \mathrm{tr}(B \mathrm{tr}_1 T), \quad \text{oricare ar fi } B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{C}).$$

Demonstrație. Avem

$$\mathrm{tr}((A \otimes I_m)T) = \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} (A \otimes I_m)_{k\ell}^{ij} T_{ij}^{k\ell} = \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} A_k^i \delta_\ell^j T_{ij}^{k\ell} = \sum_{i,k} A_k^i (\mathrm{tr}_2 T)_i^k = \mathrm{tr}(A \mathrm{tr}_2 T),$$

$$\mathrm{tr}((I_n \otimes B)T) = \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} (I_n \otimes B)_{k\ell}^{ij} T_{ij}^{k\ell} = \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} \delta_k^i B_\ell^j T_{ij}^{k\ell} = \sum_{j,\ell} B_\ell^j (\mathrm{tr}_1 T)_j^\ell = \mathrm{tr}(B \mathrm{tr}_1 T).$$

1.6.18 Definiție. În cazul oricărei matrice descrise folosind perechi de indici

$$T = \left(T_{k\ell}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m}$$

se pot defini două *transpuse parțiale* și anume

$${}^{t_1}T = \left({}^{t_1}T_{k\ell}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m}, \quad \text{unde } {}^{t_1}T_{k\ell}^{ij} = T_{i\ell}^{kj},$$

$${}^{t_2}T = \left({}^{t_2}T_{k\ell}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m}, \quad \text{unde } {}^{t_2}T_{k\ell}^{ij} = T_{kj}^{i\ell}.$$

Capitolul 2

Spații vectoriale finit-dimensionale

2.1 Spații vectoriale

2.1.1 Definiție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Un *spațiu vectorial* peste $\mathbb{K}$ este o mulțime $\mathcal{V}$ considerată împreună cu două operații

$$\begin{aligned} + : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} : (x, y) \mapsto x + y && \text{(adunarea),} \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} : (\alpha, x) \mapsto \alpha x && \text{(înmulțirea cu scalari)} \end{aligned}$$

satisfăcând următoarele axiome:

1. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{V};$
2. există un element $0 \in \mathcal{V}$ astfel încât $0 + x = x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathcal{V};$
3. oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$ există $-x \in \mathcal{V}$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0;$
4. $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathcal{V};$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathcal{V};$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathcal{V};$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathcal{V};$
8. $1x = x, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$

2.1.2 Elementele spațiului $\mathcal{V}$ sunt numite *vectori*, iar cele ale lui $\mathbb{K}$ *scalari*.

Un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ este numit *spațiu vectorial real*, iar unul peste $\mathbb{C}$ *spațiu vectorial complex*. În loc de $x + (-y)$ scriem $x - y$.

2.1.3 Propoziție. *Dacă $\mathcal{V}$ este spațiu vectorial, atunci:*

- a) $\alpha x = 0 \iff \alpha = 0 \text{ or } x = 0;$
- b) $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x;$
- c) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y;$
- d) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x.$

Demonstrație. a) Avem

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x \implies 0x = 0,$$

$$\alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0 \implies \alpha 0 = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{array} \right\} \implies x = \frac{1}{\alpha} 0 = 0.$$

- b) $0 = \alpha 0 = \alpha(x + (-x)) = \alpha x + \alpha(-x) \implies \alpha(-x) = -\alpha x,$
 $0 = 0x = (\alpha + (-\alpha))x = \alpha x + (-\alpha)x \implies (-\alpha)x = -\alpha x.$
- c) $\alpha(x - y) = \alpha(x + (-y)) = \alpha x + \alpha(-y) = \alpha x - \alpha y.$
- d) $(\alpha - \beta)x = (\alpha + (-\beta))x = \alpha x + (-\beta)x = \alpha x - \beta x.$

2.1.4 Exemplu. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, unde

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

este un spațiu vectorial real.

2.1.5 Exemplu. Mulțimea de matrice

$$\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

are o structură de spațiu vectorial real definită prin

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} & x_{13} + y_{13} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} & x_{23} + y_{23} \end{pmatrix},$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} & \alpha x_{13} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} & \alpha x_{23} \end{pmatrix}.$$

2.1.6 Exemplu. Mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a tuturor funcțiilor $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ are o structură de spațiu vectorial complex definită de

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x), \\ (\alpha \varphi)(x) &= \alpha \varphi(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

2.1.7 Exemplu. $\mathbb{R}$ este spațiu vectorial real în raport cu adunarea și înmulțirea.

2.1.8 Exemplu. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, unde

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) &= x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i, \\ \alpha(x + yi) &= \alpha x + \alpha yi, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

este un spațiu vectorial real.

2.1.9 Exemplu. $\mathbb{C}$ are o structura de spațiu vectorial complex în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe.

2.1.10 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Prin *subspațiu vectorial* al lui $\mathcal{V}$ se înțelege o submulțime $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ satisfăcând condiția

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \mathcal{W} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}. \quad (2.1)$$

2.1.11 Propoziție. *Submulțimea $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este subspațiu vectorial dacă și numai dacă următoarele condiții sunt îndeplinite:*

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{W} \\ y \in \mathcal{W} \end{array} \right\} \implies x + y \in \mathcal{W}, \quad (2.2)$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{W} \\ \alpha \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \alpha x \in \mathcal{W}. \quad (2.3)$$

Demonstrație. (2.1) $\Rightarrow$ (2.2): Alegem $\alpha = \beta = 1$.

(2.1) $\Rightarrow$ (2.3): Alegem $\beta = 0$.

(2.2) & (2.3) $\Rightarrow$ (2.1):

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \mathcal{W} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \xrightarrow{(2.3)} \left. \begin{array}{l} \alpha x \in \mathcal{W} \\ \beta y \in \mathcal{W} \end{array} \right\} \xrightarrow{(2.2)} \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}.$$

2.1.12 Orice subspațiu vectorial $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ are o structura de spațiu vectorial, operațiile fiind cele induse din $\mathcal{V}$.

2.1.13 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{W} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

este un subspațiu vectorial al spațiului $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

2.1.19 Propoziție.

Dacă $\mathcal{V}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathcal{V}$, atunci

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$$

este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{V}$, numit subspațiul generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} & \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + \mu(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)v_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)v_2 + \dots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)v_n. \end{aligned}$$

2.1.20 Definiție. Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un *sistem de generatori* pentru $\mathcal{V}$

sau că $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ generează spațiul $\mathcal{V}$ dacă

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \mathcal{V}.$$

2.1.21 Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathcal{V}$, atunci orice vector $x \in \mathcal{V}$ se poate scrie sub forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

2.1.22 Exercițiu. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 1)$ și $v_2 = (1, -1)$ formează un sistem de generatori pentru spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. Avem de arătat că $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{v_1, v_2\}$, adică

$$\mathbb{R}^2 = \{ \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Evident, $\{ \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$. Rămâne de arătat incluziunea inversă. Fie $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Arătăm că există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$

adică $(x_1, x_2) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1)$, ceea ce este echivalent cu

$$(x_1, x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2).$$

Această relație se mai poate scrie

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = x_2 \end{cases}$$

și conduce la

$$\alpha_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

2.1.23 Exercițiu. Să se arate că în $\mathbb{R}^3$ avem

$$\text{span}\{(1, 2, 3), (-1, 1, 0)\} = \text{span}\{(1, 2, 3), (-1, 1, 0), (0, 3, 3)\}.$$

Indicație. Avem $(0, 3, 3) = (1, 2, 3) + (-1, 1, 0)$.

2.1.24 Propoziție. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un sistem de generatori pentru V astfel încât există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu

$$v_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i,$$

atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \setminus \{v_k\}$ este sistem de generatori pentru V .

Demonstrație. Orice vector $x \in V$ este o combinație liniară de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Dar

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \implies x = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i + \alpha_k \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i = \sum_{i \neq k} (\alpha_i + \alpha_k \lambda_i) v_i.$$

2.1.25 Definiție. Spunem că spațiul vectorial $\mathcal{V}$ este *finit generat* dacă admite un sistem de generatori finit.

2.1.26 Convenție. Dacă nu se menționează contrariul, spațiile vectoriale considerate în continuare vor fi presupuse finit generate.

2.1.27 Propoziție. Următoarele două afirmații sunt echivalente:

- a) Niciunul dintre vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ nu se poate scrie ca o combinație liniară de ceilalți;
- b) relația $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ este posibilă numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, adică

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Demonstrație. a) $\implies$ b) Presupunând, de exemplu, că relația $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ are loc pentru $\alpha_n \neq 0$ obținem

$$v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1}.$$

b) $\implies$ a) Dacă, de exemplu, avem $v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1}$, atunci

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0,$$

adică $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ nu este singurul caz în care $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.

2.1.28 Definiție. Sistemul de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este *liniar independent* dacă

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

2.1.29 În cazul unui sistem de vectori liniar independenți niciunul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori.

2.1.30 Exercițiu. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 2)$ și $v_2 = (-1, 3)$ din $\mathbb{R}^2$ sunt liniar independenți.

Rezolvare. Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, adică

$$\begin{aligned}\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(-1, 3) &= (0, 0) \\ (\alpha_1, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, 3\alpha_2) &= (0, 0) \\ (\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) &= (0, 0).\end{aligned}$$

Ultima relație este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

care conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2.1.31 Exercițiu. Un sistem de vectori liniar independenți nu poate conține vectorul nul.

Rezolvare. Dacă $v_n = 0$, atunci $0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{n-1} + 1v_n = 0$.

2.1.32 Orice subsistem al unui sistem de vectori liniar independenți este un sistem de vectori liniar independenți.

2.1.33 Propoziție. Dacă $\{v_1, \dots, v_n\}$ este un sistem de vectori astfel încât niciunul dintre ei nu este combinație liniară de cei scriși în fața lui, atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este un sistem de vectori liniar independenți.

Demonstrație. Fie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0. \quad (2.4)$$

Trebuie ca $\alpha_n = 0$ deoarece în caz contrar

$$v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} v_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} v_{n-1},$$

adică v_n este combinație liniară de vectorii scriși în fața lui. Având în vedere că $0v_n = 0$, relația (2.4) se mai scrie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

La fel ca mai sus se arată că $\alpha_{n-1} = 0$, apoi $\alpha_{n-2} = 0, \dots, \alpha_1 = 0$.

2.1.34 Din orice sistem de generatori ai unui spațiu vectorial V se poate obține un sistem de generatori liniar independenți eliminând succesiv vectorii care se pot scrie ca o combinație liniară de vectorii aflați înaintea lor. Mai exact, plecăm de la sistemul de generatori $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și aplicăm următoarele operații sistemului rezultat în etapa anterioară:

- a) eliminăm primul vector dacă acesta este nul;
- b) eliminăm al doilea vector dacă acesta se obține din primul prin înmulțirea cu un scalar;
- c) eliminăm al treilea vector dacă acesta este combinație liniară de primii doi;
- d) eliminăm al patrulea vector dacă acesta este combinație liniară de vectorii precedenți, etc.

2.1.35 Exercițiu. Să se obțină un sistem liniar independent plecând de la sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset \mathbb{R}^4$, unde $v_1 = (0, 0, 0, 0)$,
 $v_2 = (1, 0, -1, 1)$, $v_3 = (2, 0, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (2, 1, 0, 2)$.

Răspuns. $\{v_2, v_4\}$.

2.1.36 Definiție. Prin *bază* a unui spațiu vectorial se înțelege un sistem de generatori format din vectori liniar independenți.

2.1.37 Pentru a arăta că $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în $\mathcal{V}$ avem de arătat că:

- a) $\mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;
- b) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

2.1.38 Propoziție. Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în $\mathcal{V}$, atunci orice vector $x \in \mathcal{V}$ se poate scrie în mod unic sub forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

(numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se numesc *coordonatele* lui x în baza $\mathfrak{B}$).

Demonstrație. Deoarece $\mathfrak{B}$ generează spațiul $\mathcal{V}$ există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ în $\mathbb{K}$ astfel încât

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Relația

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n,$$

echivalentă cu

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0,$$

conduce la $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$, adică $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

2.1.39 Exercițiu. Să se arate că $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ este bază în $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. $\mathcal{B}$ este sistem de generatori: oricare ar fi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

$\mathcal{B}$ este sistem de vectori liniar independenți:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0).$$

2.1.40 Propoziție. Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial,

$$M = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

este un sistem de vectori liniar independenți și

$$S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$$

este un sistem de generatori ai lui $\mathcal{V}$, atunci:

a) $n \leq k$;

b) sistemul de vectori M se poate completa până la o bază a lui $\mathcal{V}$ adăugând vectori din S .

Demonstrație. a) Vectorul v_n este nenul deoarece sistemul de vectori liniar independenți M nu poate conține vectorul nul. Acest vector este o combinație liniară de $w_1, w_2, \dots, w_k$. Deoarece cel puțin unul dintre coeficienții acestei combinații liniare este nenul, din sistemul de generatori $\{v_n, w_1, w_2, \dots, w_k\}$ se poate elimina un vector astfel încât el să rămână în continuare sistem de generatori. Vom elimina primul vector care este

combinație liniară de cei aflați înaintea lui. Vectorul eliminat este unul dintre vectorii $w_1, w_2, \dots, w_k$ și-l notăm cu w_{i_1} . Considerăm în continuare sistemul de vectori liniar independenți

$$M_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$$

sistemul de generatori

$$S_1 = \{v_n, w_1, w_2, \dots, w_k\} \setminus \{w_{i_1}\}$$

și facem aceleași operații, adică luăm v_{n-1} din M_1 , îl adăugăm la S_1 și eliminăm primul vector w_{i_2} care este combinație liniară de cei aflați în fața lui. Rezultă astfel sistemul de vectori liniar independenți

$$M_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$$

și sistemul de generatori

$$S_2 = \{v_{n-1}, v_n, w_1, w_2, \dots, w_k\} \setminus \{w_{i_1}, w_{i_2}\}.$$

Procesul poate fi continuat până introducem toți vectorii sistemului de vectori liniar independenți M în sistemul de generatori, ceea ce arată că $n \leq k$.

b) După introducerea tuturor vectorilor din M în sistemul de generatori se obține un sistem de generatori

$$S_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_k\} \setminus \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_n}\}.$$

Eliminând vectorii care sunt combinații liniare de cei aflați în fața lor rezultă o bază care conține vectorii din M .

2.1.41 Teoremă. *Oricare două baze ale unui spațiu vectorial $\mathcal{V}$ conțin același număr de vectori.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_k\}$ două baze ale lui $\mathcal{V}$. Fiecare dintre ele este atât sistem de vectori liniar independenți cât și sistem de generatori pentru $\mathcal{V}$. Conform propoziției precedente trebuie să avem simultan $n \leq k$ și $k \leq n$.

2.1.42 Definiție. Spunem că spațiul vectorial V are dimensiune n și scriem

$$\dim \mathcal{V} = n$$

dacă $\mathcal{V}$ admite o bază formată din n vectori.

2.1.43 Notăție. Pentru a indica corpul peste care este considerat $\mathcal{V}$ scriem $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

2.1.44 Exercițiu. Să se arate că:

- a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$
- b) $\dim_{\mathbb{R}} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = 2$
- c) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
- d) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Rezolvare. a) $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ este bază a lui $\mathbb{R}^2$.

b) Din

$$\begin{aligned} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

rezultă că $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ este sistem de generatori. Deoarece relația

$$x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

conduce la $x_1 = x_2 = 0$, sistemul de generatori $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ este un sistem de vectori liniar independenți și deci o bază.

c) $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ considerat ca spațiu vectorial real admite baza $\{1, i\}$.

d) O bază a lui $\mathbb{C}$ peste $\mathbb{C}$ este $\mathcal{B} = \{1\}$.

2.1.45 MATHEMATICA: Dimensiunea subspațiului generat de o mulțime

$$\text{In}[1]:=\text{MatrixRank}[\{\{1,0,0\}, \{0,1,1\}, \{1,1,1\}\}] \mapsto \text{Out}[1]=2$$

2.1.46 Propoziție. a) Dacă $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este subspațiu vectorial, atunci $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$.

b) Dacă $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este subspațiu și $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$, atunci $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Demonstrație. a) Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bază în $\mathcal{V}$ și $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ bază în $\mathcal{W}$. Deoarece $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ este sistem liniar independent în $\mathcal{V}$ și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sistem de generatori în $\mathcal{V}$ rezultă că $k \leq n$ (vezi pag. 47-40).

b) Orice bază a lui $\mathcal{W}$ este sistem liniar independent în $\mathcal{V}$ și deci poate fi prelungită până la o bază a lui $\mathcal{V}$. Deoarece $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$ rezultă că orice bază a lui $\mathcal{W}$ este deja bază pentru $\mathcal{V}$.

ξi

atunci

$$\text{rang } A = \dim \text{span}\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \dim \text{span}\{A^1, A^2, \dots, A^m\}.$$

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_r A^r = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1r}\alpha_r = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2r}\alpha_r = 0 \\ \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \cdots + a_{rr}\alpha_r = 0 \end{array} \right.$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0.$$

2.1.54 Propoziție. Matricea S este inversabilă și inversa ei

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la baza $\mathfrak{B}'$ la $\mathfrak{B}$.

Demonstrație. Fie $v_j = \beta_j^k v'_k$. Din relațiile

$$v_j = \beta_j^k v'_k = \beta_j^k \alpha_k^i v_i, \quad v'_i = \alpha_i^j v_j = \alpha_i^j \beta_j^k v'_k$$

rezultă egalitățile

$$\beta_j^k \alpha_k^i = \delta_j^i, \quad \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k, \quad (2.7)$$

unde

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

2.1.55 Teoremă.

$$\left. \begin{matrix} v'_i = \alpha_i^j v_j \\ x = x^j v_j = x'^i v'_i \end{matrix} \right\} \implies \left\{ \begin{matrix} x^j = \alpha_i^j x'^i \\ x'^i = \beta_j^i x^j \end{matrix} \right.$$

Demonstrație. Din

$$x^j v_j = x'^i v'_i = x'^i \alpha_i^j v_j$$

rezultă relația

$$x^j = \alpha_i^j x'^i$$

care conduce la

$$\beta_j^k x^j = \beta_j^k \alpha_i^j x'^i = \delta_i^k x'^i = x'^k,$$

adică

$$x'^k = \beta_j^k x^j.$$

2.1.56 Propoziție. Orice spațiu vectorial complex $\mathcal{V}$ are o structură naturală de spațiu vectorial real care se poate obține prin restricția scalarilor și

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază a spațiului vectorial complex $\mathcal{V}$. Oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$ există numerele complexe $\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i, \dots, \alpha_n + \beta_n i$ astfel încât

$$x = (\alpha_1 + \beta_1 i)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2 i)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)v_n.$$

Scriind această relație sub forma

$$x = \alpha_1 v_1 + \beta_1 i v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_2 i v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_n i v_n,$$

deducem că

$$\mathcal{B} = \{v_1, i v_1, v_2, i v_2, \dots, v_n, i v_n\}$$

este sistem de generatori pentru spațiul vectorial real $\mathcal{V}$. Arătăm că vectorii care formează sistemul $\mathcal{B}$ sunt liniar independenți peste $\mathbb{R}$. Relația

$$\alpha_1 v_1 + \beta_1 i v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_2 i v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_n i v_n = 0$$

se poate scrie

$$(\alpha_1 + \beta_1 i)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2 i)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)v_n = 0$$

și conduce la $\alpha_1 + \beta_1 i = \alpha_2 + \beta_2 i = \dots = \alpha_n + \beta_n i = 0$, adică la

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \dots = \alpha_n = \beta_n = 0.$$

2.1.57 Propoziție. Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial real, atunci spațiul

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathcal{V} \}$$

considerat împreună cu adunarea pe componente

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

și înmulțirea cu numere complexe

$$(\alpha + \beta i)(x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \beta x_2, \alpha x_2 + \beta x_1)$$

este un spațiu vectorial complex notat cu ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V}$ și

$$\dim_{{}^{\mathbb{C}}}\mathcal{V} = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}$$

(spațiul ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V}$ se numește complexificatul lui $\mathcal{V}$)

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază a spațiului vectorial real $\mathcal{V}$. Arătăm că

$$\mathcal{B} = \{ (v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0) \}$$

este bază a spațiului vectorial complex ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V}$. Oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$, există numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ și $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ astfel încât

$$x_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \quad x_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n.$$

Deoarece $i(v_j, 0) = (0, v_j)$, avem

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, 0) + (0, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 i)(v_1, 0) + (\alpha_2 + \beta_2 i)(v_2, 0) + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)(v_n, 0). \end{aligned}$$

Dacă

$$(\alpha_1 + \beta_1 i)(v_1, 0) + (\alpha_2 + \beta_2 i)(v_2, 0) + \dots + (\alpha_n + \beta_n i)(v_n, 0) = (0, 0),$$

atunci

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) = 0$$

ceea ce conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ și $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

2.1.58 Scriind $x_1 + x_2 i$ în loc de (x_1, x_2) , obținem

$${}^{\mathbb{C}}\mathcal{V} = \{ x_1 + x_2 i \mid x_1, x_2 \in \mathcal{V} \}$$

și înmulțirea cu scalari

$$(\alpha + \beta i)(x_1 + x_2 i) = (\alpha x_1 - \beta x_2) + (\alpha x_2 + \beta x_1)i$$

coincide formal cu înmulțirea numerelor complexe.

2.1.59 Definiție. Prin *relație de echivalență* pe o mulțime M se înțelege o submulțime $\mathcal{R} \subseteq M \times M$ cu proprietățile:

- 1) $(x, x) \in \mathcal{R}, \quad \forall x \in M$ (reflexivitate);
- 2) $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}$ (simetrie);
- 3) $\left. \begin{array}{l} (x, y) \in \mathcal{R} \\ (y, z) \in \mathcal{R} \end{array} \right\} \implies (x, z) \in \mathcal{R}$ (tranzitivitate).

În loc de $(x, y) \in \mathcal{R}$ se preferă să se scrie $x \mathcal{R} y$ sau $x \sim y$.

2.1.60 Definiție. Prin *partiție* a unei mulțimi M se înțelege o familie $\{M_i\}_{i \in J}$ de submulțimi ale lui M cu proprietățile:

- 1) $M_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in J$
- 2) $M_i \cap M_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in J \text{ cu } i \neq j$
- 3) $\bigcup_{i \in J} M_i = M.$

2.1.61 Propoziție. a) Dacă $\sim$ este o relație de echivalență pe M , atunci mulțimile distincte de forma

$$\hat{x} = \{ y \mid y \sim x \} \quad (\text{clasă de echivalență a lui } x)$$

formează o partiție a lui M , notată cu $M/\sim$.

b) Invers, dacă $\{M_i\}_{i \in J}$ este o partiție a lui M , atunci relația

$$x \sim y \quad \text{dacă există } i \in J \text{ astfel încât } x, y \in M_i$$

este o relație de echivalență pe M .

Demonstrație. a) Reunind toate clasele de echivalență obținem mulțimea M și avem $\hat{x} \neq \emptyset$ deoarece $x \in \hat{x}$. În plus,

$$x \in \hat{y} \cap \hat{z} \implies \begin{cases} x \sim y \\ x \sim z \end{cases} \implies y \sim z \implies \hat{y} = \hat{z}.$$

b) Evident, relația $\sim$ este reflexivă și simetrică. Dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci există $i, j \in J$ astfel încât $x, y \in M_i$ și $y, z \in M_j$. Mulțimile partiției fiind disjuncte, rezultă că $M_i = M_j$ și prin urmare $x \sim z$.

2.1.62 Propoziție. Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ și $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este un subspațiu vectorial, atunci relația

$$x \sim y \quad \text{dacă } x - y \in \mathcal{W}$$

este o relație de echivalență pe $\mathcal{V}$. Mulțimea factor $\mathcal{V}/\sim$ formată din toate clasele de echivalență

$$\hat{x} = x + \mathcal{W} = \{ x + y \mid y \in \mathcal{W} \}$$

considerată împreună cu operațiile

$$\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}, \quad \alpha \hat{x} = \widehat{\alpha x},$$

este spațiu vectorial (numit spațiu factor și notat cu $\mathcal{V}/\mathcal{W}$).

Demonstrație. Avem

$$x - x = 0 \in \mathcal{W} \implies x \sim x,$$

$$x \sim y \implies x - y \in \mathcal{W} \implies y - x \in \mathcal{W} \implies y \sim x,$$

$$\left. \begin{array}{l} x \sim y \\ y \sim z \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x - y \in \mathcal{W} \\ y - z \in \mathcal{W} \end{array} \right\} \implies x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{W} \implies x \sim z.$$

Deoarece $\mathcal{W} + \mathcal{W} = \{ x + y \mid x, y \in \mathcal{W} \} = \mathcal{W}$ și $\alpha\mathcal{W} = \{ \alpha x \mid x \in \mathcal{W} \} = \mathcal{W}$, avem

$$(x + \mathcal{W}) + (y + \mathcal{W}) = x + y + \mathcal{W}, \quad \alpha(x + \mathcal{W}) = \alpha x + \mathcal{W}$$

ceea ce arată că operațiile cu clase de echivalență sunt bine definite (nu depind de reprezentantul ales). Elementul neutru este $\hat{0} = 0 + \mathcal{W} = \mathcal{W}$, iar opusul lui $\hat{x}$ este $-\hat{x} = \widehat{-x} = -x + \mathcal{W}$.

2.1.63 Exercițiu. Descrieți spațiul vectorial factor $\mathbb{R}^2/\mathcal{W}$ în cazul

$$\mathcal{W} = \{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

Rezolvare. În acest caz

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) - (x', y') \in \mathcal{W} \iff y = y'.$$

Rezultă că

$$\widehat{(x, y)} = (x, y) + \mathcal{W} = \{ (x', y) \mid x' \in \mathbb{R} \}$$

și prin urmare

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{W} = \{ \widehat{(0, y)} \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Trecerea de la $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^2/\mathcal{W}$ se realizează “ignorând” coordonata x , adică identificând vectorii (x, y) din $\mathbb{R}^2$ cu același y . Elementele lui $\mathbb{R}^2/\mathcal{W}$ sunt clasele de echivalență $\widehat{(0, y)}$, adică dreptele paralele cu Ox .

2.1.64 Teoremă. Dacă $\mathcal{W}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{V}$, atunci

$$\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{W}.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ o bază a lui $\mathcal{W}$ pe care o completăm până la o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ a lui $\mathcal{V}$. Arătăm că $\{\hat{v}_{k+1}, \hat{v}_{k+2}, \dots, \hat{v}_n\}$ este bază a lui $\mathcal{V}/\mathcal{W}$. Dacă

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \mathcal{V},$$

atunci

$$\hat{x} = \alpha_1 \hat{v}_1 + \dots + \alpha_k \hat{v}_k + \alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \hat{v}_n = \alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \hat{v}_n.$$

Rezultă că $\{\hat{v}_{k+1}, \hat{v}_{k+2}, \dots, \hat{v}_n\}$ este sistem de generatori. Pe de altă parte, dacă

$$\alpha_{k+1} \hat{v}_{k+1} + \alpha_{k+2} \hat{v}_{k+2} + \dots + \alpha_n \hat{v}_n = \hat{0},$$

atunci

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n \in \mathcal{W}$$

și deci există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k,$$

relație care conduce la $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$.

2.2 Transformări liniare

2.2.1 Definiție. Fie $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. O aplicație

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} : x \mapsto Ax$$

este numită *transformare liniară* (sau *operator liniar*, *aplicație liniară*) dacă

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2.2.2 Utilizăm notațiile

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \{ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \mid A \text{ este transformare liniară} \}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{V}) = \{ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid A \text{ este operator liniar} \}.$$

2.2.3 Exercițiu. Dacă $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, atunci $A0 = 0$.

2.2.4 Exercițiu. Să se arate că

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$

este transformare liniară.

Rezolvare. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vectori din $\mathbb{R}^3$. Avem

$$\begin{aligned}
 A(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) \\
 &= A((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)) \\
 &= A(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \\
 &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3), \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_3 + \beta y_3) \\
 &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_1 + \alpha x_3) + (\beta y_1 + 2\beta y_2 - \beta y_3, \beta y_1 + \beta y_3) \\
 &= \alpha(x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 - y_3, y_1 + y_3) \\
 &= \alpha A(x_1, x_2, x_3) + \beta A(y_1, y_2, y_3) = \alpha Ax + \beta Ay.
 \end{aligned}$$

2.2.5 Exercițiu. Să se arate că

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$$

este operator liniar.

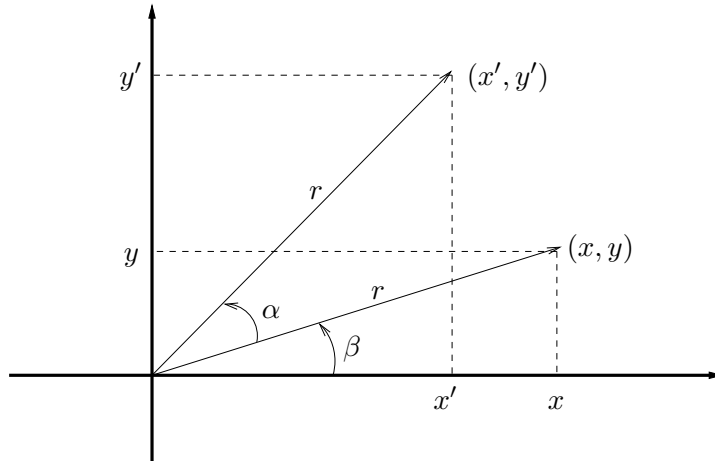


Figura 2.1: Rotația planului de unghi α .

2.2.6 Exercițiu. Să se arate că rotația planului de unghi α este un operator liniar.

Indicație. Identificăm planul cu spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$. Expresia în coordonate a rotației de unghi α este

$$\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x', y'),$$

unde (v. Fig. 2.1)

$$x' = r \cos(\beta + \alpha) = r \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$y' = r \sin(\beta + \alpha) = r \cos \beta \sin \alpha + r \sin \beta \cos \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

adică

$$\mathcal{R}_\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

2.2.7 Exercițiu. Fie

$$\mathcal{V} = \{ a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2.

Să se arate că operatorul de derivare

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \frac{d}{dx}(a_0 x^2 + a_1 x + a_2) = 2a_0 x + a_1,$$

este operator liniar.

2.2.8 Exercițiu. Compusa a două transformări liniare este transformare liniară.

2.2.9 Propoziție. Dacă $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ este o transformare liniară, atunci

$$\ker A \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in \mathcal{V} \mid Ax = 0 \}$$

este subspațiu al lui $\mathcal{V}$, numit nucleul lui A , și

$$\text{im } A \stackrel{\text{def}}{=} \{ Ax \mid x \in \mathcal{V} \}$$

este subspațiu al lui $\mathcal{W}$, numit imaginea lui A .

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \ker A \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0 \implies \alpha x + \beta y \in \ker A.$$

Dacă $v, w \in \text{im } A$, atunci există $x, y \in \mathcal{V}$ încât $v = Ax$ și $w = Ay$. Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avem

$$\alpha v + \beta w = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y),$$

ceea ce arată că $\alpha v + \beta w \in \text{im } A$.

2.2.10 MATHEMATICA: Bază în $\ker A$

$$\begin{array}{ll} \text{In}[1] := \text{MatrixForm}[\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 6, 9\}\}] & \mapsto \text{Out}[1] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{In}[2] := \text{NullSpace}[\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 6, 9\}\}] & \mapsto \text{Out}[2] = \{\{-3, 0, 1\}, \{-2, 1, 0\}\} \end{array}$$

2.2.11 Teoremă. *Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial finit-dimensional și*

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

o transformare liniară, atunci

$$\dim \mathcal{V} = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A.$$

Demonstrație. Fie $\mathcal{B}_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ o bază a subspațiului $\ker A$, unde $k = \dim \ker A$. Acest sistem de vectori liniar independenți îl prelungim până la o bază a lui $\mathcal{V}$

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\},$$

unde $n = \dim \mathcal{V}$. Vom arăta că

$$\mathcal{B}' = \{Av_{k+1}, Av_{k+2}, \dots, Av_n\}$$

este o bază a subspațiului $\operatorname{im} A$.

$\mathcal{B}'$ este sistem de vectori liniar independenți: Din

$$\alpha_{k+1} Av_{k+1} + \alpha_{k+2} Av_{k+2} + \dots + \alpha_n Av_n = 0$$

rezultă

$$A(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n) = 0,$$

ceea ce arată că $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n \in \ker A$. Sistemul de vectori $\mathcal{B}_0$ fiind o bază în $\ker A$, rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k,$$

adică

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \alpha_{k+2} v_{k+2} - \dots - \alpha_n v_n = 0.$$

Deoarece $\mathcal{B}$ este bază în $\mathcal{V}$, această relație este posibilă doar în cazul

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0,$$

ceea ce arată că $\mathcal{B}'$ este sistem de vectori liniar independenți.

$\mathcal{B}'$ este sistem de generatori: Oricare ar fi $y \in \operatorname{im} A$ există $x \in \mathcal{V}$ astfel încât $y = Ax$.

Plecând de la reprezentarea $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ a lui x în baza $\mathcal{B}$ se obține

$$\begin{aligned} y = Ax &= \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \dots + \lambda_k Av_k + \lambda_{k+1} Av_{k+1} + \dots + \lambda_n Av_n \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + \lambda_k Av_k + \lambda_{k+1} Av_{k+1} + \dots + \lambda_n Av_n, \end{aligned}$$

ceea ce arată că $\mathcal{B}'$ este sistem de generatori pentru $\text{im } A$.

2.2.12 Exercițiu. Fie aplicația liniară $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3, 2x_1 + x_2, x_2 + 2x_3).$$

Descrieți $\ker A$ și $\text{im } A$ indicând baze în aceste subspații.

Rezolvare. Avem

$$\ker A = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \{ \alpha(1, -2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

Rezultă că $\{(1, -2, 1)\}$ este bază în $\ker A$. Completăm această bază până la baza $\{(1, -2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$. Din demonstrația teoremei precedente rezultă că $\{A(0, 1, 0), A(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 2)\}$ este bază a subspațiului vectorial $\text{im } A$.

2.2.13 Exercițiu. Fie operatorul liniar

$$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

Descrieți $\ker P$ și $\text{im } P$ indicând baze în aceste subspații.

2.2.14 Propoziție. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ o transformare liniară.

- a) Transformarea A este injectivă dacă și numai dacă $\ker A = \{0\}$.
- b) Transformarea A este surjectivă dacă și numai dacă $\text{im } A = \mathcal{W}$.

Demonstrație. a) Știm că $A0 = 0$. Dacă A este injectivă, atunci $Ax = 0$ implică $x = 0$ și deci $\ker A = \{0\}$. Invers, dacă $\ker A = \{0\}$, atunci

$$Ax = Ay \implies Ax - Ay = 0 \implies A(x - y) = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y.$$

b) Afirmatia rezultă din definiția subspațiului $\text{Im } A$.

2.2.15 Exercițiu. Dacă $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ este o transformare liniară injectivă, atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este sistem de vectori liniar independenți în $\mathcal{V}$ dacă și numai dacă $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ este sistem de vectori liniar independenți în $\mathcal{W}$.

Rezolvare. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sistem de vectori liniar independenți. Relația

$$\alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \dots + \alpha_n Av_n = 0,$$

care se mai poate scrie

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = 0,$$

conduce la relația

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0,$$

din care rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Invers, presupunând că $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ este sistem de vectori liniar independenți, relația

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

implică

$$\alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \dots + \alpha_n Av_n = 0,$$

relație care conduce la $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

2.2.16 Propoziție. *Inversa unei aplicații liniare bijective este o aplicație liniară.*

Demonstrație. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ o aplicație liniară bijectivă. Oricare ar fi $x, y \in \mathcal{W}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, are loc relația

$$\alpha x + \beta y = \alpha A(A^{-1}x) + \beta A(A^{-1}y) = A(\alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y)$$

și prin urmare $A^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y$.

2.2.17 Definiție. Prin *izomorfism liniar* se înțelege o transformare liniară bijectivă.

2.2.18 Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ o transformare liniară. Avem

$$A \text{ este izomorfism} \iff \begin{cases} \ker A = \{0\} \\ \operatorname{im} A = \mathcal{W}. \end{cases}$$

2.2.19 Definiție. Spunem că spațiile vectoriale $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ sunt *izomorfe* dacă există un izomorfism liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$.

2.2.20 Teoremă. *Două spații vectoriale (finit dimensionale) peste același corp $\mathbb{K}$ sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ spații vectoriale peste $\mathbb{K}$ izomorfe și fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ un izomorfism liniar. Din relațiile

$$\ker A = \{0\}, \quad \operatorname{im} A = \mathcal{W}, \quad \dim \mathcal{V} = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A$$

rezultă că $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$. Invers, dacă $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$, alegând o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ în $\mathcal{V}$ și o bază $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ în $\mathcal{W}$, putem defini izomorfismul

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}, \quad A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n.$$

2.2.21 Privite doar ca spații vectoriale, spațiile izomorfe nu diferă prin nimic unul față de altul, și pot fi identificate. Ele sunt doar reprezentări diferite ale aceluiași obiect matematic. În unele construcții sau aplicații, anumite concretizări ale unui spațiu vectorial pot fi mai utile decât altele.

2.2.22 Teoremă. Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$, atunci orice bază

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

a lui $\mathcal{V}$ (cu ordinea vectorilor fixată) definește izomorfismul

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

care permite identificarea lui $\mathcal{V}$ cu $\mathbb{K}^n$.

Demonstrație. Aplicația A este liniară, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ și $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$.

2.2.23 Până la un izomorfism,

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^3, \dots$$

sunt toate spațiile vectoriale reale finit-dimensionale, iar

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{C}^3, \dots$$

sunt toate spațiile vectoriale complexe finit-dimensionale posibile.

2.2.24 Exercițiu. Să se arate că aplicația

$$A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

este izomorfism liniar.

2.2.25 Exercițiu. Să se arate că spațiile vectoriale reale $\mathbb{C}$ și $\mathbb{R}^2$ sunt izomorfe.

Indicație. Aplicația $A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x + yi) = (x, y)$ este un izomorfism liniar.

2.2.26 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$,

$\mathfrak{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bază în $\mathcal{V}$,

$\mathfrak{B}_{\mathcal{W}} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bază în $\mathcal{W}$,

$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ transformare liniară și fie

$$Av_i = a_i^j w_j,$$

adică

$$Av_1 = a_1^1 w_1 + a_1^2 w_2 + \dots + a_1^n w_n,$$

$$Av_2 = a_2^1 w_1 + a_2^2 w_2 + \dots + a_2^n w_n,$$

.....

$$Av_m = a_m^1 w_1 + a_m^2 w_2 + \dots + a_m^n w_n.$$

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

este numită *matricea lui A în raport cu bazele $\mathfrak{B}_{\mathcal{V}}$ și $\mathfrak{B}_{\mathcal{W}}$* .

2.2.27 În cazul unei aplicații $A : V \longrightarrow V$ alegem, în general, o singură bază.

2.2.28 Orice vector x se poate reprezenta unic sub forma

$$x = x^i v_i, \quad \text{adică} \quad x = \sum_{i=1}^n x^i v_i$$

și

$$Ax = A \left(\sum_{i=1}^m x^i v_i \right) = \sum_{i=1}^m x^i Av_i = \sum_{i=1}^m x^i \left(\sum_{j=1}^n a_i^j w_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_i^j x^i \right) w_j.$$

Transformarea A este complet determinată de matricea corespunzătoare.

2.2.29 Utilizând notațiile

$$x = x^i v_i = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^m v_m, \quad y = y^j w_j = y^1 w_1 + y^2 w_2 + \dots + y^n w_n,$$

relația $y = Ax$ se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}.$$

2.2.30 Exercițiu. Să se determine matricea aplicației liniare

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$$

în raport cu bazele

$$\{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)\} \quad \text{în } \mathbb{R}^2,$$

$$\{w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 1)\} \quad \text{în } \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare. Din relațiile

$$Av_1 = A(1, 1) = (-1, 3, 0) = -1w_1 + 3w_2 + 0w_3$$

$$Av_2 = A(1, -1) = (5, -1, 2) = 5w_1 - 1w_2 + 2w_3$$

rezultă că matricea căutată este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.31 Propoziție. Fie $A : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ două aplicații liniare și fie $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ și $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ baze în spațiile vectoriale $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$, respectiv. Matricea aplicației

$$BA : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}, \quad (BA)x = B(Ax)$$

în raport cu bazele $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ este produsul dintre matricea aplicației B în raport cu bazele $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ și matricea aplicației A în raport cu bazele $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ și $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$. Dacă

$$Au_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j, \quad Bv_j = \sum_{k=1}^p b_{kj} w_k,$$

atunci

$$\begin{aligned}(BA)u_i &= B(Au_i) = B \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j = \sum_{j=1}^m a_{ji} Bv_j \\ &= \sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^p b_{kj} w_k = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m b_{kj} a_{ji} \right) w_k.\end{aligned}$$

2.2.32 Teoremă. În cazul unei schimbări de bază, matricea unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ se transformă conform formulei

$$A' = S^{-1}AS,$$

unde S este matricea de trecere de la baza veche la cea nouă.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ două baze în $\mathcal{V}$,

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad v'_i = \alpha_i^j v_j,$$

matricea de trecere de la baza $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$ și fie

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad Av_i = a_i^k v_k,$$

și

$$A' = \begin{pmatrix} a'_1{}^1 & a'_2{}^1 & \cdots & a'_n{}^1 \\ a'_1{}^2 & a'_2{}^2 & \cdots & a'_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_1{}^n & a'_2{}^n & \cdots & a'_n{}^n \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad Av'_i = a'_i{}^k v'_k,$$

matricele lui A în raport cu bazele $\mathfrak{B}$ și respectiv $\mathfrak{B}'$. Din relațiile

$$\begin{aligned}Av'_i &= A \left(\alpha_i^j v_j \right) = \alpha_i^j Av_j = \alpha_i^j a_j^k v_k, \\ Av'_i &= a'_i{}^j v'_j = a'_i{}^j \alpha_j^k v_k\end{aligned}$$

rezultă că

$$\alpha_j^k a'_i{}^j = a_j^k \alpha_i^j,$$

adică relația $SA' = AS$, care poate fi scrisă sub forma $A' = S^{-1}AS$.

2.2.33 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar. Spunem că numărul $\lambda \in \mathbb{K}$ este *valoare proprie* a lui A dacă există un vector $v \neq 0$, numit *vector propriu*, astfel încât

$$Av = \lambda v.$$

2.2.34 Propoziție. Dacă λ este valoare proprie a operatorului $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, atunci

$$\mathcal{V}_\lambda = \{ x \in \mathcal{V} \mid Ax = \lambda x \}$$

este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{V}$ (numit subspațiul propriu corespunzător valorii proprii λ).

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \mathcal{V}_\lambda \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

2.2.35 Exercițiu. Să se afle valorile proprii ale operatorului

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2),$$

și să se determine subspațiile proprii corespunzătoare.

Rezolvare. Fie λ valoare proprie. Rezultă că există $x = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ încât

$$A(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3),$$

adică

$$(x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

ceea ce este echivalent cu faptul că sistemul omogen

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_3, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

admite și alte soluții în afară de $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Știm că acest lucru se întâmplă dacă și numai dacă λ este astfel încât

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

adică dacă

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0,$$

relație care conduce la valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ și $\lambda_3 = 2$. Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{-1} &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = -x\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) = (-x_1, -x_2, -x_3)\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \{(\alpha, \beta, -\alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

și

$$\mathcal{V}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 2x\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\} = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.2.36 În raport cu baza canonică $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, matricea lui A este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar ecuația (2.8) s-a obținut scăzând λ din fiecare element situat pe diagonala principală. Ecuația (2.8) se mai poate scrie

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

unde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea unitate.

2.2.37 Propoziție. *Polinomul (numit polinomul caracteristic)*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

asociat unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ folosind matricea într-o bază fixată, nu depinde de baza aleasă.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} \det(A' - \lambda I) &= \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \det S^{-1} \det(A - \lambda I) \det S = \frac{1}{\det S} \det(A - \lambda I) \det S = \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

2.2.38 Deoarece

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det A,$$

rezultă că în cazul unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, urma operatorului

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

și $\det A$, numere definite cu ajutorul unei baze, nu depind de baza aleasă.

2.2.39 MATHEMATICA: `Det[A], Tr[A], CharacteristicPolynomial[A,t]` ,

`In[1]:=Det[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]`

$\mapsto$ `Out[1]=0`

`In[2]:=Tr[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}]`

$\mapsto$ `Out[2]=15`

`In[3]:=CharacteristicPolynomial[{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}},t]`

$\mapsto$ `Out[3]=18t+15t2-t3`

2.2.40 Propoziție (Ciclicitatea urmei).

Dacă $A, B, C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ sunt operatori liniari, atunci

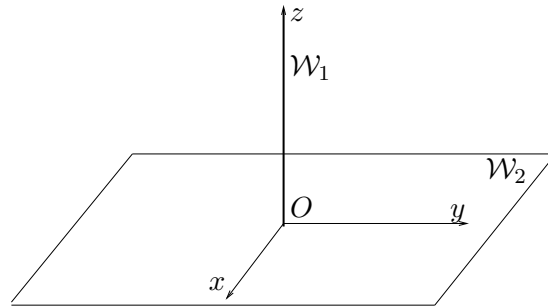
$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \quad \text{și} \quad \operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} BCA = \operatorname{tr} CAB.$$

Demonstrație. Dacă a_i^j și b_i^j sunt elementele matricelor A și B într-o bază fixată, atunci

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i,j} a_i^j b_j^i = \sum_{i,j} b_j^i a_i^j = \operatorname{tr} BA.$$

Utilizând această proprietate a urmei, obținem

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} ABC &= \operatorname{tr} A(BC) = \operatorname{tr} (BC)A = \operatorname{tr} BCA, \\ \operatorname{tr} ABC &= \operatorname{tr} (AB)C = \operatorname{tr} C(AB) = \operatorname{tr} CAB. \end{aligned}$$

Figura 2.2: Subspațiile invariante ale unei rotații în jurul lui Oz .

subspațiile

$$\mathcal{W}_1 = \{ (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R} \} \quad (\text{axa } Oz),$$

$$\mathcal{W}_2 = \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \quad (\text{planul } xOy)$$

sunt subspații invariante (v. Fig. 2.2).

2.2.45 Propoziție. *Dacă subspațiul $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de dimensiune m este subspațiu invariant al operatorului $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, atunci există o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ în raport cu care matricea lui A are forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{m+2,m+1} & \cdots & a_{m+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Baza $\mathcal{B}$ se poate obține completând o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ a lui $\mathcal{W}$ până la o bază a lui $\mathcal{V}$.

2.2.46 Am arătat că valorile proprii ale operatorului

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2),$$

sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ și că subspațiile proprii corespunzătoare sunt

$$\mathcal{V}_{-1} = \{ \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

și

$$\mathcal{V}_2 = \{ \alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

Matricea lui A în raport cu baza

$$\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (1, 1, 1)\}$$

a lui $\mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii ai lui A are forma diagonală

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.47 Propoziție. *Matricea unui operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ în raport cu o bază $\mathcal{B}$ este o matrice diagonală dacă și numai dacă $\mathcal{B}$ este formată doar din vectori proprii ai lui A .*

Demonstrație. Dacă $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{V}$ formată din vectori proprii ai lui A

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

(unele dintre numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ putând fi egale), atunci matricea lui A în această bază este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Invers, dacă matricea lui A în raport cu o bază $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ are forma

diagonală

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

atunci

$$Aw_i = \alpha_i w_i,$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Deoarece o bază nu poate conține vectorul nul, rezultă că $w_1, w_2, \dots, w_n$ sunt vectori proprii ai lui A și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ valorile proprii corespunzătoare.

2.2.48 Exercițiu. Nu există o bază în raport cu care matricea operatorului

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 2x_2),$$

să fie matrice diagonală.

Rezolvare. Este suficient să arătăm că nu există o bază a lui $\mathbb{R}^2$ formată din vectori proprii ai lui A . În raport cu baza canonică $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, matricea lui A este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2$$

admite rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Singura valoare proprie este $\lambda = 2$ și subspațiul propriu corespunzător este

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x_1, x_2) = 2(x_1, x_2)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x_1 + x_2, 2x_2) = (2x_1, 2x_2)\} \\ &= \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

ceea ce arată că toți vectorii proprii ai lui A sunt de forma $\alpha(1, 0)$. Nu există doi vectori proprii liniar independenți care să formeze o bază a lui $\mathbb{R}^2$.

2.2.49 Exercițiu. Rotația de unghi α a planului

$$\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{R}_\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha),$$

admite valori proprii numai în cazul în care $\alpha \in \mathbb{Z}\pi$.

2.2.50 Studiul unui operator liniar devine mai ușor de realizat prin utilizarea unei baze în raport cu care matricea lui este diagonală. O astfel de bază nu există în toate cazurile.

2.2.51 Dacă există o bază în raport cu care matricea lui A este diagonală

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

atunci rădăcinile polinomului caracteristic

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda) \cdots (\alpha_n - \lambda)$$

sunt $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, și aparțin toate lui $\mathbb{K}$ (numărul lor, ținând seama de multiplicități, este $\dim \mathcal{V}$).

2.2.52 Definiție. Fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar și λ o valoare proprie a lui A .

Spunem că λ are *multiplicitatea algebrică* k dacă este rădăcină de ordinul k a polinomului caracteristic.

Prin *multiplicitate geometrică* a lui λ se înțelege dimensiunea subspațiului propriu $\mathcal{V}_\lambda$ corespunzător lui λ .

2.2.53 Propoziție. Dacă $v_1, \dots, v_k$ sunt vectori proprii ai operatorului $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ corespunzători la valori proprii distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$,

$$Av_i = \lambda_i v_i,$$

atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este sistem de vectori liniar independenți.

Demonstrație (cazul $n = 3$). Din

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \quad (2.9)$$

rezultă $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = 0$, adică relația

$$\alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \alpha_3 Av_3 = 0,$$

care se mai scrie

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \alpha_3 \lambda_3 v_3 = 0. \quad (2.10)$$

Adunând relația (2.10) cu relația (2.9) înmulțită cu $(-\lambda_3)$ se obține

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)v_2 = 0. \quad (2.11)$$

Aplicând operatorul A relației (2.11) obținem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1 v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2 v_2 = 0. \quad (2.12)$$

Adunând relația (2.12) cu relația (2.11) înmulțită cu $(-\lambda_2)$ rezultă

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0.$$

Deoarece $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt distincte și $v_1 \neq 0$, rezultă $\alpha_1 = 0$ și apoi din (2.11) obținem $\alpha_2 = 0$. Înlocuind în (2.9) pe α_1 și α_2 cu 0, deducem că $\alpha_3 = 0$.

2.2.54 Din propoziția anterioară rezultă existența formei diagonale în cazul în care rădăcinile polinomului caracteristic sunt distincte și toate aparțin corpului $\mathbb{K}$ peste care este considerat $\mathcal{V}$.

2.2.55 Teoremă. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ și fie $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ un operator liniar. Există o bază a lui $\mathcal{V}$ în raport cu care matricea lui A este diagonală dacă și numai dacă toate rădăcinile polinomului caracteristic aparțin lui $\mathbb{K}$ și pentru fiecare dintre ele multiplicitatea algebrică este egală cu cea geometrică.

Demonstrație. (în cazul a două rădăcini $\lambda_1 \neq \lambda_2$ cu multiplicitățile 2 și respectiv 3). În cazul considerat $\dim \mathcal{V} = 2 + 3 = 5$, $\dim \mathcal{V}_{\lambda_1} = 2$ și $\dim \mathcal{V}_{\lambda_2} = 3$. Fie $\{v_1, v_2\}$ bază în

$$\mathcal{V}_{\lambda_1} = \{ x \in \mathcal{V} \mid Ax = \lambda_1 x \}$$

și $\{w_1, w_2, w_3\}$ bază în

$$\mathcal{V}_{\lambda_2} = \{ x \in \mathcal{V} \mid Ax = \lambda_2 x \}.$$

Este suficient să arătăm că $\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3\}$ este bază în $\mathcal{V}$. Fie

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 + \alpha_5 w_3 = 0. \quad (2.13)$$

Aplicând A obținem

$$\lambda_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \lambda_2(\alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 + \alpha_5 w_3) = 0.$$

Adunând această relație cu relația (2.13) înmulțită cu $(-\lambda_2)$, obținem

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$$

de unde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Înlocuind în (2.13), rezultă $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

2.2.56 Fiecare matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

poate fi privită ca fiind matricea în raport cu baza canonică

$$\mathfrak{B} = \{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

a operatorului liniar

$$A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.2.57 Valorile proprii ai unei matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ coincid cu valorile proprii ale operatorului liniar asociat $A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

2.2.58 MATHEMATICA: `Eigenvalues[A]`, `Eigenvectors[A]`

$$\begin{array}{ll} \text{In[1]:=MatrixForm}[\{\{0,1,1\}, \{1,0,1\}, \{1,1,0\}\}] & \mapsto \text{Out[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{In[2]:=Eigenvalues}[\{\{0,1,1\}, \{1,0,1\}, \{1,1,0\}\}] & \mapsto \text{Out[2]} = \{2, -1, -1\} \\ \text{In[3]:=Eigenvectors}[\{\{0,1,1\}, \{1,0,1\}, \{1,1,0\}\}] & \mapsto \text{Out[3]} = \{\{1,1,1\}, \{-1,0,1\}, \{-1,1,0\}\} \end{array}$$

2.2.59 O matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este *diagonalizabilă* dacă operatorul liniar asociat $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ este diagonalizabil.

2.3 Dualul unui spațiu vectorial

2.3.1 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. O funcție

$$\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă liniară* dacă

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2.3.2 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este bază în $\mathcal{V}$ și $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}$ este formă liniară, atunci există numerele $\varphi_i = \varphi(v_i)$, unic determinate, astfel încât

$$\varphi(x) = \varphi_i x^i, \quad \text{adică} \quad \varphi(x^i v_i) = \varphi_i x^i.$$

2.3.3 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Spațiul $\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{K})$, adică

$$\mathcal{V}^* = \{ \varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ este formă liniară} \}$$

considerat împreună cu adunarea

$$\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^* : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi, \quad \text{unde} \quad \begin{aligned} \varphi + \psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{K}, \\ (\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x) \end{aligned}$$

și înmulțirea cu scalari

$$\mathbb{K} \times \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^* : (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda \varphi, \quad \text{unde} \quad \begin{aligned} \lambda \varphi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{K}, \\ (\lambda \varphi)(x) &= \lambda \varphi(x) \end{aligned}$$

este spațiu vectorial (numit *dualul* lui $\mathcal{V}$).

2.3.4 Teoremă Dacă $\mathcal{V}$ este spațiu vectorial, atunci

$$\dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}.$$

Demonstrație Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază în $\mathcal{V}$. Arătăm că $\mathfrak{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$, unde

$$v^i : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}, \quad v^i(v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

adică

$$v^i : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}, \quad v^i(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n) = x^i,$$

este bază în $\mathcal{V}^*$. Fie

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n = 0,$$

adică

$$(\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{V},$$

sau echivalent

$$\alpha_1 v^1(x) + \alpha_2 v^2(x) + \cdots + \alpha_n v^n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Alegând $x = v_1$ obținem $\alpha_1 = 0$, alegând $x = v_2$ obținem $\alpha_2 = 0$, etc.

Dacă $\varphi \in V^*$, atunci notând $\varphi_i = \varphi(v_i)$ obținem

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n) = x^1 \varphi(v_1) + x^2 \varphi(v_2) + \cdots + x^n \varphi(v_n) \\ &= v^1(x) \varphi_1 + v^2(x) \varphi_2 + \cdots + v^n(x) \varphi_n = (\varphi_1 v^1 + \varphi_2 v^2 + \cdots + \varphi_n v^n)(x), \end{aligned}$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$, adică

$$\varphi = \varphi_1 v^1 + \varphi_2 v^2 + \cdots + \varphi_n v^n = \varphi_i v^i.$$

2.3.5 Definiție. Fie $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază în $\mathcal{V}$. Baza lui $\mathcal{V}^*$

$$\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\},$$

formată din formele liniare $v^i : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, definite prin

$$v^i(v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j, \\ 0 & \text{pentru } i \neq j, \end{cases}$$

adică din funcțiile

$$v^i : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad v^i(x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n) = x^i$$

este numită *duala* bazei $\mathfrak{B}$.

2.3.6 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază în $\mathcal{V}$ și $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ este duala ei

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{V} &\implies x = x^i v_i && \text{cu } x^i = v^i(x) \\ \varphi \in \mathcal{V}^* &\implies \varphi = \varphi_i v^i && \text{cu } \varphi_i = \varphi(v_i). \end{aligned}$$

2.3.7 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază în $\mathcal{V}$ și $\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ duala ei, atunci

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}^n : \varphi \mapsto (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n)$$

sunt izomorfisme care permit identificarea spațiilor $\mathcal{V}$ și $\mathcal{V}^*$ cu $\mathbb{K}^n$. Avem

$$\varphi(x) = (\varphi_i v^i)(x) = \varphi_i x^i = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

2.3.8 Teoremă. Fie $\mathcal{V}$ spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$,

$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ două baze în $\mathcal{V}$,

$\mathfrak{B}^* = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$, $\mathfrak{B}'^* = \{v'^1, v'^2, \dots, v'^n\}$ dualele lor și

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

matricele de trecere între $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B}'$. Oricare ar fi

$$x = x^j v_j = x'^i v'_i \in \mathcal{V} \quad \text{și} \quad \varphi = \varphi_j v^j = \varphi'_i v'^i \in \mathcal{V}^*$$

avem

$$\begin{aligned} v'_i &= \alpha_i^j v_j, & v'^i &= \beta_j^i v^j, \\ \varphi'_i &= \alpha_i^j \varphi_j, & x'^i &= \beta_j^i x^j. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Demonstrație. Avem

$$x^j v_j = x'^i v'_i = x'^i \alpha_i^j v_j \implies x^j = \alpha_i^j x'^i \implies \beta_j^k x^j = \beta_j^k \alpha_i^j x'^i = \delta_i^k x'^i = x'^k.$$

Deoarece $x'^k = v'^k(x)$ și $x^j = v^j(x)$, relația precedentă se poate scrie sub forma

$$v'^k(x) = \beta_j^k v^j(x) \quad \text{sau} \quad v'^k(x) = (\beta_j^k v^j)(x).$$

Relația având loc oricare ar fi $x \in \mathcal{V}$, rezultă că

$$v'^k = \beta_j^k v^j.$$

Utilizând liniaritatea lui φ obținem

$$\varphi'_i = \varphi(v'_i) = \varphi(\alpha_i^j v_j) = \alpha_i^j \varphi(v_j) = \alpha_i^j \varphi_j.$$

2.3.9 Definiție.

Dualul $\mathcal{V}^{**} = (\mathcal{V}^*)^*$ al dualului lui $\mathcal{V}^*$ este numit *bidualul* lui $\mathcal{V}$.

2.3.10 Avem

$$\mathcal{V}^{**} = \{ f : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este formă liniară} \} \quad \text{și} \quad \dim \mathcal{V}^{**} = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}.$$

Spațiile $\mathcal{V}$ și $\mathcal{V}^{**}$ având aceeași dimensiune, pot fi identificate alegând câte o bază în fiecare dintre ele. Evident, o astfel de identificare se face într-o infinitate de feluri. Arătăm că există un mod natural de a identifica pe $\mathcal{V}$ cu $\mathcal{V}^{**}$. Relațiile (2.14) arată existența unei periodicități în trecerea la dual.

2.3.11 Teoremă Izomorfismul liniar

$$\Psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^{**} : x \mapsto \Psi[x],$$

prin care x corespunde formei liniare

$$\Psi[x] : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Psi[x](f) = f(x),$$

permite o identificare naturală a lui $\mathcal{V}$ cu $\mathcal{V}^{**}$.

Demonstrație. Funcția $\Psi[x]$ aparține spațiului $\mathcal{V}^{**}$ deoarece

$$\Psi[x](\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \Psi[x](f) + \beta \Psi[x](g).$$

Aplicația $\Psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^{**}$ este transformare liniară

$$\Psi[\alpha x + \beta y](f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = (\alpha \Psi[x] + \beta \Psi[y])(f),$$

oricare ar fi $f \in \mathcal{V}^*$. Transformarea Ψ este injectivă deoarece

$$\Psi[x] = 0 \iff \Psi[x](f) = 0, \forall f \in \mathcal{V}^* \iff f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{V}^*,$$

adică $\ker \Psi = \{0\}$. Din teoremă dimensiunii rezultă relația

$$\dim \ker \Psi + \dim \operatorname{im} \Psi = \dim \mathcal{V},$$

care conduce la egalitatea $\operatorname{im} \Psi = \mathcal{V}^{**}$, echivalentă cu surjectivitatea lui Ψ .

2.4 Sume de spații vectoriale

2.4.1 Propoziție. Dacă $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{V}$ și $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$ sunt subspații vectoriale, atunci

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$$

este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{V}$.

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in \mathcal{W} \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x, y \in \mathcal{W}_1 \\ x, y \in \mathcal{W}_2 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}_1 \\ \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathcal{W}.$$

2.4.2 În general, reuniunea a două subspații vectoriale ale unui spațiu vectorial $\mathcal{V}$ nu este un subspațiu vectorial. De exemplu,

$$\mathcal{W}_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{și} \quad \mathcal{W}_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

sunt subspații vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$, dar $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr, $(1, 0) \in \mathcal{W}$ și $(0, 1) \in \mathcal{W}$ dar $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin \mathcal{W}$.

2.4.3 Propoziție. Dacă $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{V}$ și $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$ sunt subspații vectoriale, atunci

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathcal{W}_1, w_2 \in \mathcal{W}_2\}$$

este un subspațiu vectorial al lui $\mathcal{V}$.

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + w_2 \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \\ w'_1 + w'_2 \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(w_1 + w_2) + \beta(w'_1 + w'_2) \\ = (\alpha w_1 + \beta w'_1) + (\alpha w_2 + \beta w'_2) \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2. \end{array} \right.$$

2.4.4 Definiție. Fie $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$ două subspații vectoriale. Subspațiul vectorial

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in \mathcal{W}_1, w_2 \in \mathcal{W}_2\}$$

este numit *suma* a subspațiilor $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$.

2.4.5 Exercițiu Să se arate că:

- $\mathcal{W}_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$;
- $\mathcal{W}_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$;
- $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^2$.

2.4.6 Teorema (dimensiunii). *Dacă $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$ sunt subspații vectoriale în $\mathcal{V}$, atunci*

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2).$$

Demonstrație. Fie

$$\mathcal{B}_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

o bază a spațiului vectorial $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ pe care o completăm până la o bază

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

a spațiului vectorial $\mathcal{W}_1$ și până la o bază

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

a spațiului vectorial $\mathcal{W}_2$, unde

$$n = \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2), \quad n + k = \dim \mathcal{W}_1, \quad n + m = \dim \mathcal{W}_2.$$

Este suficient să arătăm că

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

este o bază a lui $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

$\mathcal{B}$ este sistem de generatori: Orice vector de forma $x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \mathcal{W}_1$ și $x_2 \in \mathcal{W}_2$ este o combinație liniară de vectorii lui $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ este sistem de vectori liniar independenți: Relația

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = 0 \quad (2.15)$$

se poate scrie sub forma

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m.$$

Egalitatea dintre vectorul $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$ aparținând lui $\mathcal{W}_1$ și vectorul $-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m$ aparținând lui $\mathcal{W}_2$ este posibilă numai dacă $-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, adică dacă există $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$-\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 - \dots - \gamma_m w_m = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_n u_n.$$

Scriind ultima relație sub forma

$$\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \dots + \delta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_m w_m = 0$$

și ținând seama de faptul că $\mathcal{B}_2$ este bază în $\mathcal{W}_2$, rezultă

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 0.$$

Relația (2.15) devine

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = 0.$$

Tinând seama de faptul că $\mathcal{B}_1$ este bază în $\mathcal{W}_1$, obținem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0.$$

Prin urmare $\mathcal{B}$ este bază a lui $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ și

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = n + k + m = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2).$$

2.4.7 Definiție. Fie $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ două subspații ale spațiului vectorial $\mathcal{V}$.

Spunem că suma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ este *directă* și utilizăm notația

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$$

dacă reprezentarea unui vector $w \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ ca suma $w = w_1 + w_2$ a unui vector $w_1 \in \mathcal{W}_1$ și a unui vector $w_2 \in \mathcal{W}_2$ este unică.

2.4.8 Propoziție. Fie $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{V}$ două subspații.

Suma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ este directă dacă și numai dacă

$$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}.$$

Demonstrație. “ $\implies$ ” Dacă $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \neq \{0\}$, atunci există $x \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ nenul care admite reprezentările $x = x + 0$ și $x = 0 + x$, ceea ce arată că suma nu este directă.

“ $\impliedby$ ” Fie subspațiile $\mathcal{W}_1$ și $\mathcal{W}_2$ cu $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}$. Dacă $v \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ admite reprezentările

$$\begin{aligned} v &= w_1 + w_2 & \text{cu } w_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ și } w_2 \in \mathcal{W}_2, \\ v &= w'_1 + w'_2 & \text{cu } w'_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ și } w'_2 \in \mathcal{W}_2, \end{aligned}$$

atunci

$$w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2.$$

Scriind această relație sub forma

$$w_1 - w'_1 = w_2 - w'_2$$

din $w_1 - w'_1 \in \mathcal{W}_1$, $w_2 - w'_2 \in \mathcal{W}_2$ și $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}$ deducem că $w_1 - w'_1 = 0$, $w_2 - w'_2 = 0$, adică $w_1 = w'_1$ și $w_2 = w'_2$, ceea ce arată că suma este directă.

2.4.9 Dacă $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ este sumă directă, atunci $\dim \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2$.

2.4.10 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} + \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} &= \mathbb{R}^2 \\ \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

2.4.11 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} + \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

dar suma nu este directă.

Rezolvare. Orice vector $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ admite reprezentarea

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, 0) + (0, 0, \gamma)$$

cu $(\alpha, \beta, 0) \in \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ și $(0, 0, \gamma) \in \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$, dar

$$\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cap \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2.4.12 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathbb{R}^2 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Rezolvare. Orice vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admite reprezentarea

$$(x, y) = (x, x) + (0, y - x)$$

cu $(x, x) \in \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ și $(0, y - x) \in \{(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$. În plus

$$\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cap \{(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0)\}.$$

2.4.13 Exercițiu. Să se arate că

$$\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\} \oplus \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$$

unde tA este transpusa matricei A .

Indicație. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ admite reprezentarea

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

cu ${}^t(A + {}^tA) = A + {}^tA$ și ${}^t(A - {}^tA) = -(A - {}^tA)$.

2.4.14 Am definit suma a două spații vectoriale în cazul în care ambele sunt subspații ale unui spațiu vectorial dat. Ea poate fi privită ca o sumă directă *interioară*. Suma directă a două spații vectoriale se poate însă defini în cazul a două spații vectoriale peste același corp, arbitrare ca o sumă *exterioară*.

2.4.15 Propoziție. Dacă $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ sunt două spații peste același corp $\mathbb{K}$, atunci

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} = \{ (x, y) \mid x \in \mathcal{V}, y \in \mathcal{W} \},$$

considerat împreună cu adunarea

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

și înmulțirea cu scalari

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

este un spațiu vectorial, notat cu $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, și

$$\dim(\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W}.$$

Demonstrație. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ sunt baze în $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$, atunci

$$\{ (v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), (0, w_2), \dots, (0, w_k) \}$$

este bază în $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

2.4.16 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$.

Spațiul vectorial

$$\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \mid x \in \mathcal{V}, y \in \mathcal{W} \}$$

este numit *suma directă* a spațiilor $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$.

2.4.17 Spațiile $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ pot fi identificate respectiv cu subspațiile

$$\{ (x, 0) \mid x \in \mathcal{V} \}, \quad \{ (0, y) \mid y \in \mathcal{W} \}$$

ale spațiului $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, și avem

$$\{ (x, 0) \mid x \in \mathcal{V} \} \cap \{ (0, y) \mid y \in \mathcal{W} \} = \{ (0, 0) \},$$

$$\{ (x, 0) \mid x \in \mathcal{V} \} + \{ (0, y) \mid y \in \mathcal{W} \} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}.$$

2.4.18 Exemplu. Avem $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, ...

2.5 Produs tensorial de spații vectoriale

2.5.1 Pentru a defini produsul tensorial a două spații vectoriale este preferabil ca spațiile să fie privite ca spații de funcții.

Un spațiu vectorial $\mathcal{V}$ peste $\mathbb{K}$ se poate identifica cu bidualul

$$\mathcal{V} \equiv (\mathcal{V}^*)^* = \{ f : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este formă liniară} \}$$

asociind fiecărui vector $x \in \mathcal{V}$ forma liniară

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \mapsto \varphi(x).$$

Această identificare are avantajul că nu presupune alegerea unei baze.

Alegând o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și asociind fiecărui vector $x = x^i v_i$ funcția

$$x : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x(i) = x^i,$$

obținem identificarea

$$\mathcal{V} \equiv \{ f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este funcție} \}.$$

2.5.2 Forma liniară

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \mapsto \varphi(x)$$

este complet determinată de valorile luate pe baza duală $\{v^1, v^2, \dots, v^n\}$:

$$v^1(x) = x^1, \quad v^2(x) = x^2, \quad \dots, \quad v^n(x) = x^n.$$

Astfel, reprezentările alternative

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{și} \quad x : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K}$$

ale unui vector $x \in \mathcal{V}$ se pot obține una din cealaltă.

2.5.3 Definiție. Fie $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. O aplicație

$$\Phi : \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă biliniară* dacă

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi, \eta) = \alpha\Phi(\varphi, \eta) + \beta\Phi(\psi, \eta),$$

$$\Phi(\varphi, \alpha\eta + \beta\mu) = \alpha\Phi(\varphi, \eta) + \beta\Phi(\varphi, \mu),$$

oricare ar fi $\varphi, \psi \in \mathcal{V}^*, \eta, \mu \in \mathcal{W}^*$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2.5.4 Produsul tensorial a doi vectori $x \in \mathcal{V}$ și $y \in \mathcal{W}$, identificați cu formele liniare

$$x: \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}: \varphi \mapsto \varphi(x) \quad \text{și} \quad y: \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}: \psi \mapsto \psi(y)$$

este forma biliniară

$$x \otimes y: \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(\varphi, \psi) = \varphi(x) \psi(y)$$

Au loc relațiile

$$\begin{aligned} (x+y) \otimes z &= x \otimes z + y \otimes z, & \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall z \in \mathcal{W}; \\ x \otimes (y+z) &= x \otimes y + x \otimes z, & \forall x \in \mathcal{V}, \quad \forall y, z \in \mathcal{W}; \\ (\alpha x) \otimes y &= x \otimes (\alpha y) = \alpha x \otimes y, & \forall x \in \mathcal{V}, \quad \forall y \in \mathcal{W}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

2.5.5 Definiție. Utilizând identificările $\mathcal{V} \equiv (\mathcal{V}^*)^*$ și $\mathcal{W} \equiv (\mathcal{W}^*)^*$, *produsul tensorial* al spațiilor vectoriale $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ se definește ca fiind spațiul vectorial

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \{ \Phi: \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid \Phi \text{ este formă biliniară} \}$$

al tuturor formelor biliniare $\Phi: \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}$.

2.5.6 Teoremă Fie $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ două spații vectoriale peste același corp $\mathbb{K}$. Dacă

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2, \dots, v_n\} &\text{ este bază în } \mathcal{V} \text{ și} \\ \{w_1, w_2, \dots, w_m\} &\text{ este bază în } \mathcal{W}, \end{aligned}$$

atunci

$$\{ v_i \otimes w_j \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

este bază în $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, și prin urmare,

$$\dim \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} \cdot \dim \mathcal{W}.$$

Demonstrație. Dacă $\Phi: \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \rightarrow \mathbb{K}$ este o formă biliniară, atunci

$$\Phi(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi(v_i)v^i, \psi(w_j)w^j) = \Phi(v^i, w^j) \varphi(v_i) \psi(w_j) = \Phi(v^i, w^j) v_i \otimes w_j (\varphi, \psi)$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{V}^*$ și $\psi \in \mathcal{W}^*$, adică avem

$$\Phi = \Phi^{ij} v_i \otimes w_j \quad \text{unde} \quad \Phi^{ij} = \Phi(v^i, w^j)$$

Dacă numerele $\alpha^{ij} \in \mathbb{K}$ sunt astfel încât

$$\alpha^{ij} v_i \otimes w_j = 0, \quad \text{adică} \quad \alpha^{ij} v_i \otimes w_j (\varphi, \psi) = 0$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{V}^*$ și $\psi \in \mathcal{W}^*$, atunci alegând $\varphi = v^k$ și $\psi = w^\ell$ obținem relația

$$\alpha^{ij} v_i \otimes w_j (v^k, w^\ell) = 0, \quad \text{adică} \quad \alpha^{ij} v^k(v_i) w^\ell(w_j) = 0.$$

Deoarece $v^k(v_i) = \delta_i^k$ și $w^\ell(w_j) = \delta_j^\ell$, obținem $\alpha^{ij} = 0$, oricare ar fi i, j .

2.5.7 O formă biliniară

$$\Phi: \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

este complet determinată de numerele $\Phi^{ij} = \Phi(v^i, w^j)$, adică de funcția

$$\Phi: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi(i, j) = \Phi^{ij}.$$

Deoarece $v^i(x) = x^i$ și $w^j(y) = y^j$, forme biliniare

$$x \otimes y: \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(\varphi, \psi) = \varphi(x) \psi(y)$$

îi corespunde funcția

$$x \otimes y: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(i, j) = x^i y^j,$$

adică funcția

$$x \otimes y: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x \otimes y)(i, j) = x(i) y(j),$$

și are loc relația

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i y^j.$$

2.5.8 Utilizând identificările

$$\mathcal{V} \equiv \{f: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este funcție}\},$$

$$\mathcal{W} \equiv \{g: \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid g \text{ este funcție}\},$$

produsul tensorial al spațiilor $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ se definește ca fiind spațiul vectorial

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \{\Phi: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \Phi \text{ este funcție}\}$$

al tuturor funcțiilor de forma $\Phi: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \longrightarrow \mathbb{K}$.

2.5.9 În unele aplicații în mecanica cuantică se preferă pentru baze indexările

$\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, $\{w_0, w_1, \dots, w_{m-1}\}$ care conduc la identificările

$$\mathcal{V} \equiv \{f: \{0, 1, \dots, n-1\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ este funcție}\},$$

$$\mathcal{W} \equiv \{g: \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid g \text{ este funcție}\},$$

și prin urmare la

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \{\Phi: \{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \Phi \text{ este funcție}\}.$$

2.5.10 Dacă reprezentăm spațiile $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$ ca spații de polinoame

$$\mathcal{V} \equiv \{\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \mid \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}\},$$

$$\mathcal{W} \equiv \{\beta_0 + \beta_1 Y + \cdots + \beta_{m-1} Y^{m-1} \mid \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1} \in \mathbb{K}\},$$

atunci produsul lor tensorial este spațiul vectorial

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{ij} X^i Y^j \mid \gamma_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

al polinoamelor de grad cel mult $n-1$ în raport cu X și $m-1$ în raport cu Y .

În acest caz, produsul tensorial a doi vectori

$$(\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}) \otimes (\beta_0 + \beta_1 Y + \cdots + \beta_{m-1} Y^{m-1})$$

este produsul uzual

$$(\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1})(\beta_0 + \beta_1 Y + \cdots + \beta_{m-1} Y^{m-1})$$

al celor două polinoame.

Sistemele $\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$ și $\{1, Y, \dots, Y^{m-1}\}$ sunt baze în $\mathcal{V}$ și $\mathcal{W}$, iar

$$\{X^i Y^j \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}$$

este bază în $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

2.5.11 În $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ există elemente care nu sunt de forma $x \otimes y$.

De exemplu, în cazul $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{C}^2$, elementul

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} v_1 &= (1, 0), \\ v_2 &= (0, 1), \end{aligned}$$

apartine spațiului $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, dar nu există

$$\begin{aligned} x &= \alpha v_1 + \beta v_2 \\ y &= \gamma v_1 + \delta v_2 \end{aligned} \quad \text{cu} \quad v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = x \otimes y,$$

deoarece $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ar trebui să satisfacă relațiile contradictorii

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= 0 = \beta\delta, \\ \alpha\delta &= 1 = \beta\gamma. \end{aligned}$$

2.5.12* **Definiție.** Spunem că $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ este *separabil* (*unentangled*, în engleză)

dacă există $x \in \mathcal{V}$ și $y \in \mathcal{W}$ astfel încât $\Phi = x \otimes y$.

În cazul opus, spunem că Φ este *neseparabil* (*entangled*, în engleză).

2.5.13 Alegând o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ în $\mathcal{V}$ și o bază $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ în $\mathcal{W}$, produsul tensorial $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ se poate descrie ca fiind format din toate combinațiile liniare

$$\Phi = \sum_{i,j} \Phi^{ij} v_i \otimes w_j \quad \text{cu} \quad \Phi^{ij} \in \mathbb{K}.$$

Deoarece Φ se mai poate scrie

$$\Phi = \sum_j \left(\sum_i \Phi^{ij} v_i \right) \otimes w_j = \sum_i v_i \otimes \left(\sum_j \Phi^{ij} w_j \right)$$

rezultă că orice element din $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ este o sumă de elemente separabile

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \left\{ \sum_i x_i \otimes y_i \mid x_i \in \mathcal{V}, y_i \in \mathcal{W} \right\}.$$

Fiecărui element $\Phi = \Phi^{ij} v_i \otimes w_j$ i se poate asocia în mod natural matricea

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

2.5.14 Deoarece

$$\left. \begin{array}{l} x = x^i v_i \\ y = y^j w_j \end{array} \right\} \implies x \otimes y = x^i y^j v_i \otimes w_j,$$

matricea asociată produsului $x \otimes y$ este matricea de rangul 1

$$\begin{pmatrix} x^1 y^1 & x^1 y^2 & \dots & x^1 y^m \\ x^2 y^1 & x^2 y^2 & \dots & x^2 y^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n y^1 & x^n y^2 & \dots & x^n y^m \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, orice matrice de rangul 1 are această formă (v. pag. 50-47).

Un element Φ este separabil dacă și numai dacă matricea Φ are rangul 1.

2.5.15 Matricea Φ asociată unui element $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ depinde de bazele alese, dar rang Φ este independent de această alegere.

În cazul în care este mai mare decât 1, numărul întreg

$$\text{rang } \Phi = \text{rang} \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix},$$

numit *rangul Schmidt*, este o măsură a gradului de inseparabilitate al lui $\Phi = \Phi^{ij} v_i \otimes w_j$. El are o utilizare limitată deoarece $\text{rang}: \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{N}$ nu este funcție continuă.

2.5.16 Fiecare bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a unui spațiu vectorial $\mathcal{V}$ (cu vectorii într-o ordine fixată) definește o reprezentare matriceală pentru elementele lui $\mathcal{V}$

$$x = x^1 v_1 + x^2 v_2 + \dots + x^n v_n \quad \mapsto \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = {}^t(x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad x^n).$$

În cazul produsului tensorial $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, alegând ordinea lexicografică

$$v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_m, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, \dots, v_2 \otimes w_m, \dots, v_n \otimes w_m$$

pentru elementele bazei, putem asocia lui

$$\Phi = \Phi^{11} v_1 \otimes w_1 + \dots + \Phi^{1m} v_1 \otimes w_m + \Phi^{21} v_2 \otimes w_1 + \dots + \Phi^{nm} v_n \otimes w_m$$

matricea coloană

$$\Phi = ({}^t(\Phi^{11} \quad \Phi^{12} \quad \dots \quad \Phi^{1m} \quad \Phi^{21} \quad \Phi^{22} \quad \dots \quad \Phi^{2m} \quad \dots \quad \Phi^{n1} \quad \Phi^{n2} \quad \dots \quad \Phi^{nm})).$$

Matricea lui $x \otimes y$ este produsul tensorial al matricelor corespunzătoare lui x și y . De exemplu, în reprezentare matriceală, relația

$$\begin{aligned} (x^1 v_1 + x^2 v_2) \otimes (y^1 w_1 + y^2 w_2) &= x^1 y^1 v_1 \otimes w_1 + x^1 y^2 v_1 \otimes w_2 \\ &\quad + x^2 y^1 v_2 \otimes w_1 + x^2 y^2 v_2 \otimes w_2 \end{aligned}$$

devine

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ x^2 y^1 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

2.5.17 Am prezentat două reprezentări matriceale pentru elementele lui $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

De exemplu, $\Phi = \Phi^{11} v_1 \otimes w_1 + \Phi^{12} v_1 \otimes w_2 + \Phi^{21} v_2 \otimes w_1 + \Phi^{22} v_2 \otimes w_2$ admite reprezentările matriceale

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \Phi^{12} \\ \Phi^{21} & \Phi^{22} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} \\ \Phi^{12} \\ \Phi^{21} \\ \Phi^{22} \end{pmatrix}.$$

2.5.18 Definiție. Fie $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ și $B: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ doi operatori liniari. Deoarece orice element $\Phi \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ este sumă de elemente de forma $x \otimes y$, relația

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By)$$

definește operatorul liniar $A \otimes B: \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$,

$$(A \otimes B) \sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i (Ax_i) \otimes (By_i),$$

numit *produsul tensorial* al operatorilor A și B .

2.5.19 Din relația

$$\begin{aligned} ((A \otimes B)(x \otimes y))(\varphi, \psi) &= ((Ax) \otimes (By))(\varphi, \psi) \\ &= \varphi(Ax) \psi(By) = (x \otimes y)(\varphi \circ A, \psi \circ B) \end{aligned}$$

rezultă că

$$((A \otimes B)\Phi)(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi \circ A, \psi \circ B),$$

oricare ar fi $\Phi = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

2.5.20 Propoziție. Dacă $A, C \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ și $B, D \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$, atunci

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

Demonstrație. Egalitatea are loc pentru orice vector de forma $x \otimes y$ din $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D)(x \otimes y) &= (A \otimes B)(Cx) \otimes (Dy) \\ &= (ACx) \otimes (BDy) = (AC) \otimes (BD)(x \otimes y). \end{aligned}$$

2.5.21 Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bază în $\mathcal{V}$ și $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bază în $\mathcal{W}$.

Matricea operatorului liniar $T: \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ este

$$T = \left(T_{k\ell}^{ij} \right)_{1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j, \ell \leq m},$$

cu elementele

$$T_{k\ell}^{ij} = (v^i \otimes w^j)(T(v_k \otimes w_\ell))$$

satisfăcând relația

$$T(v_k \otimes w_\ell) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_{k\ell}^{ij} v_i \otimes w_j.$$

2.5.22 Propoziție. Dacă $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ și $B \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$, atunci matricea lui $A \otimes B$ este produsul tensorial al matricelor corespunzătoare lui A și B .

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bază în $\mathcal{V}$ și $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bază în $\mathcal{W}$.

Matricele lui A și B sunt

$$A = (A_k^i)_{1 \leq i, k \leq n} \quad \text{cu} \quad Av_k = A_k^i v_i, \quad \text{adică} \quad A_k^i = v^i(Av_k),$$

$$B = (B_\ell^j)_{1 \leq j, \ell \leq m} \quad \text{cu} \quad Bw_\ell = B_\ell^j w_j, \quad \text{adică} \quad B_\ell^j = w^j(Bw_\ell).$$

Avem

$$(A \otimes B)(v_k \otimes w_\ell) = (Av_k) \otimes (Bw_\ell) = A_k^i B_\ell^j v_i \otimes w_j = (A \otimes B)_{k\ell}^{ij} v_i \otimes w_j,$$

unde

$$(A \otimes B)_{k\ell}^{ij} = A_k^i B_\ell^j.$$

2.5.23 Dacă $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ și $B \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$, din relația

$$\begin{aligned} (A \otimes B)\Phi &= (A \otimes B)(\Phi^{k\ell} v_k \otimes w_\ell) = \Phi^{k\ell} (Av_k) \otimes (Bw_\ell) \\ &= \Phi^{k\ell} A_k^i B_\ell^j v_i \otimes w_j = (A \otimes B)_{k\ell}^{ij} \Phi^{k\ell} v_i \otimes w_j \end{aligned}$$

rezultă că

$$((A \otimes B)\Phi)^{ij} = (A \otimes B)_{k\ell}^{ij} \Phi^{k\ell}.$$

2.5.24 În cazul

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix},$$

obținem

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(x \otimes y) &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 & A_1^1 B_2^1 & A_2^1 B_1^1 & A_2^1 B_2^1 \\ A_1^1 B_1^2 & A_1^1 B_2^2 & A_2^1 B_1^2 & A_2^1 B_2^2 \\ A_1^2 B_1^1 & A_1^2 B_2^1 & A_2^2 B_1^1 & A_2^2 B_2^1 \\ A_1^2 B_1^2 & A_1^2 B_2^2 & A_2^2 B_1^2 & A_2^2 B_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ x^2 y^1 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 \\ A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_1^1 y^1 + B_2^1 y^2 \\ B_1^2 y^1 + B_2^2 y^2 \end{pmatrix} = (Ax) \otimes (By). \end{aligned}$$

2.6 Tensori pe un spațiu vectorial

2.6.1 Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, două baze

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad (\text{baza } \textit{veche}),$$

$$\mathfrak{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\} \quad (\text{baza } \textit{nouă}),$$

dualele lor

$$\mathfrak{B}^* = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}, \quad \mathfrak{B}'^* = \{e'^1, e'^2, \dots, e'^n\},$$

și matricele de trecere

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \cdots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_n^n \end{pmatrix},$$

unde

$$e'_i = \alpha_i^j e_j \quad \text{și} \quad e_j = \beta_j^i e'_i. \quad (2.16)$$

Fiecare vector $x \in \mathcal{V}$ poate fi reprezentat în $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B}'$

$$x = x^i e_i = x'^j e'_j \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} x^i &= e^i(x), \\ x'^j &= e'^j(x), \end{aligned}$$

și avem

$$x'^i = \beta_j^i x^j.$$

Similar, fiecare formă liniară $\varphi \in \mathcal{V}^*$ poate fi reprezentată în $\mathfrak{B}^*$ și $\mathfrak{B}'^*$

$$\varphi = \varphi_i e^i = \varphi'_j e'^j \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} \varphi_i &= \varphi(e_i), \\ \varphi'_j &= \varphi(e'_j), \end{aligned}$$

și avem

$$\varphi'_i = \alpha_i^j \varphi_j.$$

2.6.2 Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, atunci asociind fiecărui $x \in \mathcal{V}$ forma liniară (v. pag. 82-11)

$$x : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x(\varphi) = \varphi(x),$$

obținem un izomorfism $\mathcal{V} \longrightarrow (\mathcal{V}^*)^*$ care permite identificarea lui $\mathcal{V}$ cu $(\mathcal{V}^*)^*$.

De aceea, plecând de la definiția

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} = \{ T: \mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathbb{K} \mid T \text{ este formă biliniară } \},$$

obținem

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* = \{ T: \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid T \text{ este formă biliniară } \},$$

$$\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* = \{ T: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid T \text{ este formă biliniară } \}.$$

2.6.3 Fiecare element $T \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ admite reprezentările

$$T = T^{ij} e_i \otimes e_j = T'^{k\ell} e'_k \otimes e'_\ell \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} T^{ij} &= T(e^i, e^j), \\ T'^{k\ell} &= T(e'^k, e'^\ell), \end{aligned}$$

și avem

$$T'^{k\ell} = \beta_i^k \beta_j^\ell T^{ij}.$$

Fiecare element $T \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$ admite reprezentările

$$T = T_j^i e_i \otimes e^j = T_\ell'^k e'_k \otimes e'^\ell \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} T_j^i &= T(e^i, e_j), \\ T_\ell'^k &= T(e'^k, e'_\ell), \end{aligned}$$

și avem

$$T_\ell'^k = \beta_i^k \alpha_\ell^j T_j^i.$$

Fiecare element $T \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ admite reprezentările

$$T = T_{ij} e^i \otimes e^j = T'_{k\ell} e'^k \otimes e'^\ell \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} T_{ij} &= T(e_i, e_j), \\ T'_{k\ell} &= T(e'_k, e'_\ell), \end{aligned}$$

și avem

$$T'_{k\ell} = \alpha_k^i \alpha_\ell^j T_{ij}.$$

2.6.4 Definiție. Un *tensor* de tip (p, q) , adică de p ori contravariant și q ori covariant, pe un spațiu vectorial $\mathcal{V}$ este un obiect matematic T descris în fiecare bază a lui $\mathcal{V}$ de $(\dim \mathcal{V})^{p+q}$ coordonate

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

care la o schimbare de bază (2.16) se transformă conform relației

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \beta_{k_1}^{i_1} \beta_{k_2}^{i_2} \dots \beta_{k_p}^{i_p} \alpha_{j_1}^{m_1} \alpha_{j_2}^{m_2} \dots \alpha_{j_q}^{m_q} T_{m_1 m_2 \dots m_q}^{k_1 k_2 \dots k_p}.$$

2.6.5 Un tensor este complet determinat de coordonatele lui într-o bază fixată.

Dacă se cunosc coordonatele unui tensor într-o bază, atunci pot fi calculate coordonatele lui în oricare altă bază.

2.6.6 Exemple.

Elementele lui $\mathcal{V}$ sunt tensori de tipul $(1, 0)$.

Elementele lui $\mathcal{V}^*$ sunt tensori de tipul $(0, 1)$.

Elementele lui $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ sunt tensori de tipul $(2, 0)$.

Elementele lui $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^*$ sunt tensori de tipul $(1, 1)$.

Elementele lui $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ sunt tensori de tipul $(0, 2)$.

Numerele din $\mathbb{K}$ pot fi privite ca tensori de tip $(0, 0)$.

2.6.7 Exercițiu. Obiectul matematic ale cărui coordonate în orice bază sunt

$$T_j^i = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j, \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

este un tensor de tipul $(1, 1)$.

Rezolvare. Avem $T_j^i = \delta_j^i = \beta_k^i \alpha_j^k = \beta_k^i \alpha_j^m \delta_m^k = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k$.

2.6.8 Propoziție Orice operator liniar $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ este un tensor de tipul $(1, 1)$.

Coordonatele lui A într-o bază $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sunt coeficienții din dezvoltarea

$$Ae_i = A_i^j e_j.$$

Demonstrație. Din $Ae_i' = A_i'^j e_j'$ obținem relația $A(\alpha_i^k e_k) = A_i'^j \alpha_j^m e_m$, care poate fi scrisă sub forma

$$\alpha_i^k Ae_k = \alpha_j^m A_i'^j e_m$$

și conduce la $\alpha_i^k A_k^m e_m = \alpha_j^m A_i'^j e_m$, adică $\alpha_i^k A_k^m = \alpha_j^m A_i'^j$. Din această formulă obținem relația $\beta_m^s \alpha_i^k A_k^m = \beta_m^s \alpha_j^m A_i'^j$, echivalentă cu

$$A_i'^s = \beta_m^s \alpha_i^k A_k^m,$$

deoarece $\beta_m^s \alpha_j^m A_i'^j = \delta_j^s A_i'^j = A_i'^s$.

2.6.9 Teoremă. Orice aplicație $(p+q)$ -liniară

$$T : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{p \text{ ori}} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{q \text{ ori}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este un tensor de tipul (p, q) ale cărui coordonate în baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sunt

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = T(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q}).$$

Mai mult, orice tensor de tipul (p, q) corespunde unei aplicații $(p+q)$ -liniare și numai uneia.

Demonstrație. (în cazul particular $p=q=1$). Avem

$$T'^k_\ell = T(e'^k, e'_\ell) = T(\beta_i^k e^i, \alpha_\ell^j e_j) = \beta_i^k \alpha_\ell^j T(e^i, e_j) = \beta_i^k \alpha_\ell^j T_j^i.$$

Invers, utilizând coordonatele T_j^i într-o bază fixată, putem defini aplicația biliniară

$$T : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad T(\varphi, x) = T(\varphi_i e^i, x^j e_j) = T_j^i \varphi_i x^j,$$

independent de baza aleasă

$$\begin{aligned} T(\varphi'_k e'^k, x'^\ell e'_\ell) &= T'^k_\ell \varphi'_k x'^\ell = \beta_a^k \alpha_\ell^b T_b^a \alpha_k^i \varphi_i \beta_j^\ell x^j \\ &= \delta_a^i \delta_j^\ell T_b^a \varphi_i x^j = T_j^i \varphi_i x^j. \end{aligned}$$

2.6.10 Propoziție (Suma a doi tensori).

Dacă $A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ și $B_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ sunt coordonatele a doi tensori A și B de tip (p, q) , atunci

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} + B_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p, q) , notat cu $A + B$, adică

$$(A + B)_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} + B_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Demonstrație. (cazul $p = q = 1$). Avem

$$T'^i_j = A'^i_j + B'^i_j = \beta_k^i \alpha_j^m A_m^k + \beta_k^i \alpha_j^m B_m^k = \beta_k^i \alpha_j^m (A_m^k + B_m^k) = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k.$$

2.6.11 Propoziție (Înmulțirea unui tensor cu un scalar).

Dacă $\lambda \in \mathbb{K}$ și $A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ sunt coordonatele unui tensor A de tip (p, q) , atunci

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \lambda A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip (p, q) , notat cu λA , adică

$$(\lambda A)_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \lambda A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Demonstrație. (cazul $p = q = 1$). Avem $T'^i_j = \lambda A'^i_j = \lambda \beta_k^i \alpha_j^m A_m^k = \beta_k^i \alpha_j^m T_m^k$.

2.6.12 Propoziție (Produsul tensorial a doi tensori, într-un caz particular).

Dacă $A_{j_k}^i$ sunt coordonatele unui tensor A de tip $(1, 2)$ și B_m^l sunt coordonatele unui tensor B de tip $(1, 1)$, atunci

$$T_{jkm}^{il} = A_{jk}^i \cdot B_m^l$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(2, 3)$, notat cu $A \otimes B$, adică

$$(A \otimes B)_{jkm}^{il} = A_{jk}^i \cdot B_m^l.$$

Demonstrație. Avem

$$T_{jkm}^{il} = A_{jk}^i \cdot B_m^l = \beta_a^i \alpha_j^b \alpha_k^c A_{bc}^a \beta_r^l \alpha_m^s B_s^r = \beta_a^i \beta_r^l \alpha_j^b \alpha_k^c \alpha_m^s T_{bcs}^{ar}.$$

Generalizarea definiției produsului tensorial este imediată.

2.6.13 Produsul $x \otimes \varphi$ dintre un vector $x \in V$ și o 1-formă $\varphi \in V^*$ are coordonatele

$$(x \otimes \varphi)_j^i = x^i \varphi_j,$$

iar produsul tensorial $x \otimes y$ a doi vectori coordonatele

$$(x \otimes y)^{ij} = x^i y^j.$$

2.6.14 Propoziție (Contrația unui tensor, într-un caz particular).

Fie A_{klm}^{ij} coordonatele unui tensor A de tip $(2, 3)$. Numerele

$$T_{km}^j = \sum_{i=1}^n A_{kim}^{ij}$$

sunt coordonatele unui tensor de tip $(1, 2)$, obținut prin contrația lui A în raport cu primul indice de contravarianță și al doilea indice de covarianță.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} T_{km}^j &= \sum_{i=1}^n A_{kim}^{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_a^i \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_i^d \alpha_m^r A_{cdr}^{ab} = \left(\sum_{i=1}^n \beta_a^i \alpha_i^d \right) \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r A_{cdr}^{ab} = \delta_a^d \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r A_{cdr}^{ab} \\ &= \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r (\delta_a^d A_{cdr}^{ab}) = \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r \left(\sum_{a=1}^n A_{car}^{ab} \right) = \beta_b^j \alpha_k^c \alpha_m^r T_{cr}^b. \end{aligned}$$

2.6.15 Operația de contrație se poate face în raport cu orice pereche de indici formată dintr-un indice superior și un indice inferior.

2.6.16 Exercițiu. Să se arate că dacă $x \in \mathcal{V}$ și $\varphi \in \mathcal{V}^*$, atunci numărul

$$\gamma = x^i \varphi_i$$

este un tensor de tip $(0, 0)$, numit *scalar*.

Rezolvare. Numărul γ se obține prin contracție din $x \otimes \varphi$ și nu depinde de baza aleasă

$$\gamma' = \sum_{i=1}^n x'^i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n \beta_j^i \alpha_i^k x^j \varphi_k = \delta_j^k x^j \varphi_k = x^j \varphi_j = \gamma.$$

Capitolul 3

Spații Hilbert finit-dimensionale

3.1 Spații cu produs scalar

3.1.1 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu vectorial real (un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$).

Un *produs scalar* pe $\mathcal{H}$ este o aplicație

$$\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

care satisface următoarele trei condiții:

- a) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H} \text{ și } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H};$
- c) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H} \text{ și } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

3.1.2 Exemplu. Relația

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

definește un produs scalar pe spațiul $\mathbb{R}^n$, oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

3.1.3 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu vectorial complex (un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$).

Un *produs scalar* pe $\mathcal{H}$ este o aplicație

$$\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

care satisface următoarele trei condiții:

- a) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H} \quad \text{și} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C};$
 b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in \mathcal{H};$
 c) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \text{și}$
 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

3.1.4 Exemplu. Relația

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$$

definește un produs scalar pe spațiul $\mathbb{C}^n$, oricare ar fi $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

3.1.5 În cazul unui spațiu vectorial complex cu produs scalar

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\langle z, \alpha x + \beta y \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle z, x \rangle} + \bar{\beta} \overline{\langle z, y \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle.$$

3.1.6 Definiție. Spunem despre doi vectori că sunt *coliniari* dacă unul dintre ei se poate obține înmulțindu-l pe celălalt cu un scalar.

3.1.7 Teoremă (Cauchy-Schwarz).

a) Dacă $\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ este produs scalar, atunci

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{H}$.

b) Egalitatea

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

are loc dacă și numai dacă x și y sunt coliniari.

Demonstrație. a) Relația are, evident, loc în cazul $y=0$. Dacă $y \neq 0$, atunci

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

adică

$$\langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alegând

$$\lambda = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

relația devine

$$\langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0,$$

adică $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \geq |\langle x, y \rangle|^2$.

b) Dacă $x = \alpha y$, atunci

$$|\langle \alpha y, y \rangle|^2 = \langle \alpha y, \alpha y \rangle \langle y, y \rangle, \quad \text{adică} \quad |\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Pentru $y \neq 0$, avem

$$x = \alpha y \Rightarrow \langle y, x \rangle = \langle y, \alpha y \rangle = \alpha \langle y, y \rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}.$$

Dacă $y \neq 0$ și $|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, atunci

$$\left\| x - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\|^2 = \left\langle x - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle = 0$$

și prin urmare avem

$$x - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} y = 0,$$

adică

$$x = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} y.$$

3.1.8 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$.

Prin *normă* pe $\mathcal{H}$ se înțelege o aplicație

$$\| \cdot \| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

- a) $\|x\| \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ și $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in \mathcal{H}$;
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, oricare ar fi $x, y \in \mathcal{H}$.

3.1.9 Propoziție. Dacă $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ este produs scalar, atunci

$$\| \cdot \| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

este normă (numită *norma asociată* produsului scalar).

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \quad \text{și} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0; \\ \|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|; \\ \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\Re \langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

deoarece

$$|\Re(a + ib)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|.$$

3.1.10 Produsul scalar este complet determinat de norma asociată.

În cazul unui spațiu vectorial real

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

iar în cazul unui spațiu vectorial complex

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.1.11 Inegalitatea Cauchy-Schwarz se poate scrie sub forma

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

3.1.12 Exemplu. Pe spațiul vectorial real

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

unde

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2), \end{aligned}$$

relația

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

definește un produs scalar. Numărul

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

adică

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

reprezintă *lungimea* vectorului $x = (x_1, x_2)$.

3.1.13 În $\mathbb{R}^2$, utilizând formula

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

obținem relația (a se vedea figura 3.2)

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|x\| \|y\| (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \\ &= \|x\| \|y\| \cos(a - b) \end{aligned}$$

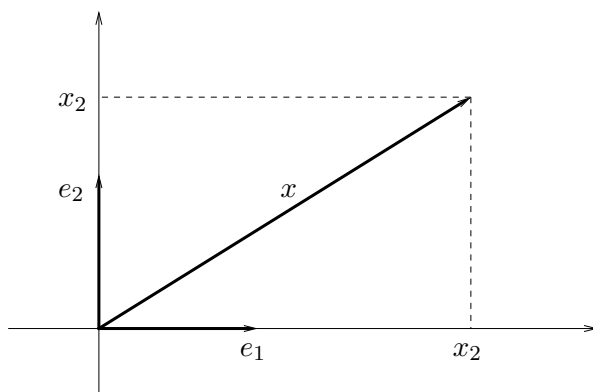


Figura 3.1: Lungimea vectorului $x = (x_1, x_2)$ din $\mathbb{R}^2$.

din care rezultă că produsul scalar $\langle x, y \rangle$ a doi vectori x și y este egal cu produsul lungimilor vectorilor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ei. În particular, vectorii sunt *ortogonali* (perpendiculari) dacă și numai dacă

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

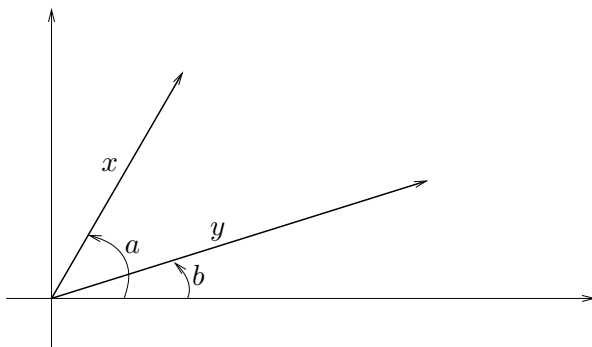


Figura 3.2: Produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^2$.

3.1.14 Plecând de la produsul scalar a doi vectori nenuli calculat în două feluri

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cos \alpha,$$

putem deduce sinusul unghiului format de ei

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

și apoi aria paralelogramului determinat de cei doi vectori

$$aria = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \sin \alpha = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right|.$$

3.1.15 Exemplu. Pe spațiul vectorial complex

$$\mathbb{C}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

unde

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

relația

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$$

definește un produs scalar. Numărul

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

adică

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$$

reprezintă lungimea vectorului $x = (x_1, x_2)$.

3.1.16 Definiție Prin *distanță* pe o mulțime $M \neq \emptyset$ se înțelege o aplicație

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu proprietățile:

- a) $d(x, y) \geq 0$ oricare ar fi $x, y \in M$ și
 $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- b) $d(x, y) = d(y, x)$, oricare ar fi $x, y \in M$;
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, oricare ar fi $x, y, z \in M$.

3.1.17 Propoziție. Dacă $\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ este produs scalar, atunci

$$d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

este distanță.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned}
d(x, y) = \|x - y\| &\geq 0 \quad \text{și} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y; \\
d(x, y) = \|x - y\| &= \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x); \\
d(x, y) = \|x - y\| &= \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).
\end{aligned}$$

3.1.18 Definiție.

Un spațiu vectorial echipat cu o normă este numit *spațiu vectorial normat*.

O mulțime nevidă echipată cu o distanță este numită *spațiu metric*.

3.1.19 Orice spațiu cu produs scalar are și o structură de spațiu vectorial normat.

Orice spațiu normat are și o structură naturală de spațiu metric.

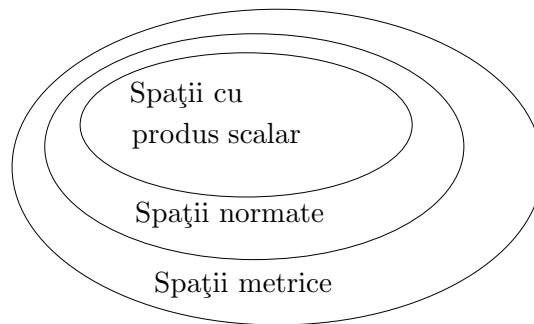


Figura 3.3: Spații metrice.

3.1.20 MATHEMATICA: EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}]

```

In[1]:=EuclideanDistance[{a, b, c}, {x, y, z}]
      ↳ Out[1]=√Abs[a-x]²+Abs[b-y]²+Abs[c-z]²
In[2]:=EuclideanDistance[{1,2,3}, {4,5,6}]      ↳ Out[2]=3√3

```

3.2 Baze ortonormate

3.2.1 Definiție. Un *vector unitar* sau *versor* este un vector x cu $\|x\| = 1$.

3.2.2 Utilizând norma corespunzătoare, inegalitatea Cauchy-Schwarz se poate scrie

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

În cazul unui spațiu vectorial real cu produs scalar, dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$, atunci

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1.$$

Numărul $\varphi \in [0, \pi]$ cu proprietatea

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

reprezintă *unghiul* dintre x și y . Relația precedentă se mai poate scrie

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi.$$

3.2.3 MATHEMATICA: VectorAngle[u,v]

In[1]:=VectorAngle[{1, 2}, {2, -1}] $\mapsto$ Out[1]= $\frac{\pi}{2}$
 In[2]:=VectorAngle[{1, 1, 0}, {1, 1, 1}] $\mapsto$ Out[2]=ArcCos $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

3.2.4 Definiție.

Fie $\mathcal{H}$ un spațiu cu produs scalar și $M \subseteq \mathcal{H}$ o submulțime.

Spunem că vectorii $x, y \in \mathcal{H}$ sunt *ortogonali* și scriem $x \perp y$ dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

Spunem că $x \in \mathcal{H}$ este *ortogonal* pe M și scriem $x \perp M$ dacă $x \perp y, \forall y \in M$.

3.2.5

Dacă vectorii $x, y \in \mathcal{H}$ sunt ortogonali, atunci

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

adică

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

3.2.6 Definiție.

Fie $\mathcal{H}$ un spațiu cu produs scalar și $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathcal{H}$.

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este un *sistem ortogonal* dacă

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{în cazul } i \neq j.$$

Spunem că $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este un *sistem ortonormat* dacă

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{în cazul } i = j, \\ 0 & \text{în cazul } i \neq j. \end{cases}$$

3.2.7

Versorul corespunzător vectorului $x = (1, 2, 3)$ este

$$\frac{1}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} x = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

3.2.8 MATHEMATICA: Normalize[x]

In[1]:=Normalize[{1, 2, 3}] $\mapsto$ Out[1]= $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

3.2.9 Propoziție. *Orice sistem ortogonal de vectori nenuli este liniar independent.*

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un sistem ortogonal de vectori nenuli. Dacă

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0,$$

atunci

$$0 = \langle v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_1, v_k \rangle = \alpha_1 \|v_1\|^2.$$

Deoarece $v_1 \neq 0$, obținem $\alpha_1 = 0$. Similar, se poate deduce că $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$.

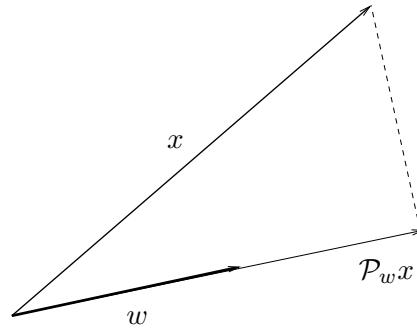


Figura 3.4: Proiecția ortogonală lui x pe w .

3.2.10 Propoziție. *Proiecția ortogonală a lui x pe $w \neq 0$ este*

$$\mathcal{P}_w x = \frac{\langle w, x \rangle}{\langle w, w \rangle} w.$$

Demonstrație. Proiecția ortogonală a lui x pe w este un vector de forma λw .

Impunând condiția $(x - \lambda w) \perp w$, obținem relația $\langle w, x - \lambda w \rangle = 0$ care conduce la $\lambda = \langle w, x \rangle / \langle w, w \rangle$ (v. Fig. 3.4).

3.2.11 Dacă $\|w\| = 1$, atunci proiecția lui x pe w este vectorul $\mathcal{P}_w x = \langle w, x \rangle w$.

3.2.12 Proiecția ortogonală a vectorului $x = (1, 2, 3)$ pe $w = (1, 1, 1)$ este

$$\mathcal{P}_{(1,1,1)}(1, 2, 3) = \frac{\langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} (1, 1, 1) = (2, 2, 2).$$

3.2.13 MATHEMATICA: `Projection[x, w]`

`In[1]:=Projection[{1, 2, 3}, {1, 1, 1}]` $\mapsto$ `Out[1]=(2,2,2)`

3.2.14 Teoremă (Metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt).

Dacă sistemul $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este liniar independent, atunci $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, unde

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1, \\ w_2 &= u_2 - \frac{\langle w_1, u_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, \\ &\dots\dots\dots \\ w_n &= u_n - \frac{\langle w_1, u_n \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, u_n \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \dots - \frac{\langle w_{n-1}, u_n \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}, \end{aligned}$$

este un sistem ortonormat astfel încât

$$\text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\} = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație. Avem

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle u_2 - \frac{\langle w_1, u_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, w_1 \right\rangle = \langle u_2, w_1 \rangle - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle = 0.$$

Similar, se poate arăta că orice vector w_k este ortogonal pe $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$.

3.2.15 Teoremă (Metoda de ortonormalizare Gram-Schmidt).

Dacă sistemul $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ este liniar independent, atunci $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, unde

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|}, \\ v_2 &= \frac{u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1\|}, \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= \frac{u_n - \langle v_1, u_n \rangle v_1 - \langle v_2, u_n \rangle v_2 - \dots - \langle v_{n-1}, u_n \rangle v_{n-1}}{\|u_n - \langle v_1, u_n \rangle v_1 - \langle v_2, u_n \rangle v_2 - \dots - \langle v_{n-1}, u_n \rangle v_{n-1}\|}, \end{aligned}$$

este un sistem ortonormat astfel încât

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație. Se poate verifica direct că $v_2 \perp v_1$, apoi $v_3 \perp v_1$ și $v_3 \perp v_2$, etc.

3.2.16 Ortonormalizând sistemul de vectori

$$\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

obținem sistemul ortonormat

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1) \right\}.$$

3.2.17 MATHEMATICA: Orthogonalize[{u1,u2,...,un}]

In[1]:=Orthogonalize[{{1, 1, 0}, {1, 1, 1}}] $\mapsto$ Out[1]= $\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$

3.2.18 Definiție. O bază ortonormată este o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ cu proprietatea

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij},$$

adică o bază formată din versori ortogonali.

3.2.19 Cu ajutorul metodei de ortonormalizare Gram-Schmidt, din orice bază se poate obține una ortonormată.

3.2.20 Teoremă Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată, atunci

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle, \quad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\langle v_i, x \rangle|^2}$$

oricare ar fi vectorii x și y .

Demonstrație. Orice vector $x \in V$ se poate scrie ca o combinație liniară

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

și avem

$$\langle v_k, x \rangle = \left\langle v_k, \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle v_k, v_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle$$

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, x \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

3.2.21 Exemplu. Sistemul $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ și

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ &= \langle (1, 0), (x_1, x_2) \rangle e_1 + \langle (0, 1), (x_1, x_2) \rangle e_2 \\ &= \langle e_1, x \rangle e_1 + \langle e_2, x \rangle e_2. \end{aligned}$$

3.2.22 Exercițiu. Să se arate că $\left\{e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ și să se scrie vectorul $x = (2, 3)$ ca o combinație liniară de e'_1 și e'_2 .

Rezolvare. Avem

$$\langle e'_1, e'_1 \rangle = \langle e'_2, e'_2 \rangle = 1, \quad \langle e'_1, e'_2 \rangle = \langle e'_2, e'_1 \rangle = 0$$

și

$$x = \langle e'_1, x \rangle e'_1 + \langle e'_2, x \rangle e'_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} e'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e'_2.$$

3.2.23^{*1} Definiție. În spațiul $\mathbb{C}^d$, considerat cu produsul scalar standard, despre două baze

$$\{v_1, v_2, \dots, v_d\} \quad \text{și} \quad \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$$

spunem că sunt *complementare* (*unbiased*, în engleză) dacă

$$|\langle v_j, w_k \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}, \quad \text{oricare ar fi } j, k \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

3.2.24* În $\mathbb{C}^2$, oricare două dintre bazele ortonormate

$$\mathfrak{B}_0 = \{(1, 0), (0, 1)\},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\},$$

$$\mathfrak{B}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \right\}$$

sunt baze complementare.

3.2.25* În $\mathbb{C}^3$, oricare două dintre bazele ortonormate

$$\mathfrak{B}_0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \varepsilon, \varepsilon^2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \varepsilon^2, \varepsilon) \right\},$$

$$\mathfrak{B}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \varepsilon, \varepsilon), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \varepsilon^2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \varepsilon^2) \right\},$$

$$\mathfrak{B}_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \varepsilon^2, \varepsilon^2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \varepsilon, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \varepsilon) \right\},$$

unde $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, sunt baze complementare.

3.2.26* În $\mathbb{C}^4$, oricare două dintre bazele ortonormate

¹Paragrafele marcate cu * pot fi omise la o primă lectură.

$\mathfrak{B}_0 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$,
 $\mathfrak{B}_1 = \{\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1), \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)\}$,
 $\mathfrak{B}_2 = \{\frac{1}{2}(1, -1, -i, -i), \frac{1}{2}(1, -1, i, i), \frac{1}{2}(1, 1, i, -i), \frac{1}{2}(1, 1, -i, i)\}$,
 $\mathfrak{B}_3 = \{\frac{1}{2}(1, -i, i, -1), \frac{1}{2}(1, -i, i, 1), \frac{1}{2}(1, i, i, -1), \frac{1}{2}(1, i, i, 1)\}$,
 $\mathfrak{B}_4 = \{\frac{1}{2}(1, -i, -1, -i), \frac{1}{2}(1, -i, 1, i), \frac{1}{2}(1, i, -1, i), \frac{1}{2}(1, i, 1, -i)\}$
 sunt baze complementare.

3.2.27 Propoziție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu cu produs scalar și $M \subset \mathcal{H}$ o submulțime.

Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe M

$$M^\perp = \{x \in V \mid x \perp u, \quad \forall u \in M\}$$

este un subspațiu vectorial.

Demonstrație. Oricare ar fi $u \in M$, avem

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in M^\perp \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \implies \langle u, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \beta \langle u, y \rangle = 0,$$

și prin urmare $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.

3.2.28 Teoremă. Dacă $\mathcal{H}$ este un spațiu cu produs scalar și $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subspațiu vectorial, atunci

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp.$$

Demonstrație. Dacă $x \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp$, atunci $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$, și prin urmare $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp = \{0\}$. Este suficient să arătăm că $\dim \mathcal{K} + \dim \mathcal{K}^\perp = \dim \mathcal{H}$. Pornim de la o bază ortonormată $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ a lui $\mathcal{K}$ și o extindem până la o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k}\}$ a lui $\mathcal{H}$. Din ea obținem prin ortonormalizare o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ în $\mathcal{H}$. Se poate observa imediat că $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ este bază în $\mathcal{K}^\perp$ și prin urmare $\dim \mathcal{K} + \dim \mathcal{K}^\perp = \dim \mathcal{H}$.

3.3 Dualul unui spațiu cu produs scalar

3.3.1 Propoziție. În cazul unui spațiu cu produs scalar $\mathcal{H}$ avem

$$\langle x, u \rangle = \langle y, u \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{H} \quad \implies \quad x = y.$$

Demonstrație. Alegând $u = x - y$, obținem

$$\langle x, x - y \rangle = \langle y, x - y \rangle \implies \langle x - y, x - y \rangle = 0 \implies \|x - y\| = 0 \implies x = y.$$

3.3.2 Teoremă. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu cu produs scalar. Pentru orice formă liniară

$$\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

există $a \in \mathcal{H}$, unic determinat, astfel încât

$$\varphi(x) = \langle a, x \rangle, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}.$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază ortonormată. Din relația

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(v_i) = \left\langle \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j, \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle$$

rezultă că

$$a = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j$$

satisface condiția impusă, iar din propoziția precedentă, rezultă că a este unic.

3.3.3 Din unicitatea lui a rezultă că vectorul $\sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j$, definit utilizând o bază, nu depinde de baza aleasă.

3.3.4 În cazul unui spațiu cu produs scalar $\mathcal{H}$, avem

$$\mathcal{H}^* = \{ \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle a, x \rangle \mid a \in \mathcal{H} \}.$$

3.3.5 Notăția lui Dirac. În cazul $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, produsul scalar a doi vectori

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{și} \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

poate fi scris utilizând înmulțirea matricelor sub forma

$$\langle a, b \rangle = \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2 + \dots + \bar{a}_n b_n = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Utilizând notațiile

$$\langle a| = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

obținem o notație alternativă pentru produsul scalar

$$\langle a, b \rangle = \langle a|b \rangle.$$

Pentru forma liniară

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle a, x \rangle,$$

adică

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : |x\rangle \mapsto \langle a|x\rangle,$$

se utilizează notația $\langle a|$. Aplicația

$$|b\rangle\langle a| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n : |x\rangle \mapsto |b\rangle\langle a|x\rangle$$

este un operator liniar cu matricea asociată

$$|b\rangle\langle a| = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\bar{a}_1 & b_1\bar{a}_2 & \cdots & b_1\bar{a}_n \\ b_2\bar{a}_1 & b_2\bar{a}_2 & \cdots & b_2\bar{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n\bar{a}_1 & b_n\bar{a}_2 & \cdots & b_n\bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

3.3.6 În cazul unui spațiu Hilbert oarecare $\mathcal{H}$, este uneori convenabil să se utilizeze notația $|a\rangle$ pentru vectorii $a \in \mathcal{H}$ și $\langle a|$ pentru formele liniare asociate

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : |x\rangle \mapsto \langle a|x\rangle.$$

3.3.7 Dacă $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată, atunci (v. pag. 113-20)

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}.$$

Utilizând notația lui Dirac, această relație se poate scrie

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_i|x\rangle |v_i\rangle, \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in \mathcal{H},$$

sau

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle \langle v_i|x\rangle, \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in \mathcal{H}. \quad (3.1)$$

Utilizând operatorul identitate

$$I : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad I|x\rangle = |x\rangle,$$

relația (3.1) se poate scrie sub forma

$$I = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i|. \quad (3.2)$$

Relația (3.2) reprezintă *rezoluția identității* asociată bazei $\mathfrak{B}$.

3.3.8 Relația (3.2) corespunde, în cazul bazei canonice

$$\mathfrak{B} = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$$

a lui $\mathbb{R}^3$, egalității

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1).$$

3.3.9 Definiția proiecției ortogonale pe un vector unitar w

$$\mathcal{P}_w x = \langle w, x \rangle w$$

se poate scrie sub forma

$$\mathcal{P}_w |x\rangle = |w\rangle\langle w|x\rangle$$

și prin urmare,

$$\mathcal{P}_w = |w\rangle\langle w|.$$

3.3.10 Exercițiu. Dacă w este un vector unitar, atunci

$$\text{tr } |w\rangle\langle w| = 1.$$

Soluție. Dacă $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonormată, atunci

$$\text{tr } |w\rangle\langle w| = \sum_{i=1}^n \langle v_i | w \rangle \langle w | v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle w | v_i \rangle \langle v_i | w \rangle = \langle w | I | w \rangle = \langle w | w \rangle = 1.$$

3.3.11 Dacă $\mathfrak{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ este o bază ortonormată,

atunci $\{\langle v_1|, \langle v_2|, \dots, \langle v_n|\}$ este duala ei deoarece

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

În particular, din (3.2) rezultă relația

$$\langle a | = \sum_{i=1}^n \langle a | v_i \rangle \langle v_i |.$$

3.3.12 Un sistem de vectori $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonormată dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

$$\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}; \quad \sum_{i=1}^n |v_i\rangle \langle v_i| = I.$$

3.3.13 În spațiul bidimensional

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

echipat cu produsul scalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \bar{\alpha}_1 \alpha_2 + \bar{\beta}_1 \beta_2,$$

fiecare dintre sistemele de vectori (am indicat diverse notații utilizate)

$$\left\{ |0\rangle \equiv |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle \equiv |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ |+\rangle \equiv |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |-\rangle \equiv |\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ |\oplus\rangle \equiv |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, |\ominus\rangle \equiv |t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

este bază ortonormată. Ele sunt numite *baza computațională*, *baza diagonală* și *baza circulară*. În aplicații, unele notații pot fi mai sugestive decât altele.

3.3.14* Exercițiu. Arătați că în $\mathbb{C}^2$, oricare două dintre bazele $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $\{|\oplus\rangle, |\ominus\rangle\}$ sunt baze complementare (v. pag. 114-**23**).

3.3.15 Teoremă.

Matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice unitară.

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ și $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ două baze ortonormate și fie

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad S^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \cdots & \bar{\alpha}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\alpha}_{1n} & \cdots & \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea de trecere între ele și adjuncta ei, adică

$$v'_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i.$$

Din relația

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle v'_i, v'_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} v_k, \sum_{m=1}^n \alpha_{mj} v_m \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{mj} \langle v_k, v_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{mj} \delta_{km} = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{kj} \end{aligned}$$

rezultă că $S^* S = I$.

3.3.16 În cazul unui spațiu vectorial real cu produs scalar, matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală.

3.4 Frame-uri exacte

3.4.1 În $\mathbb{R}^2$ vectorii corespunzători varfurilor unui triunghi echilateral

$$w_0 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right), \quad w_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

nu formează o bază ortonormată, dar verifică relația remarcabilă

$$I = \sum_{i=0}^2 |w_i\rangle \langle w_i|,$$

adică, în scriere matriceală,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Versorii corespunzători vectorilor w_i ,

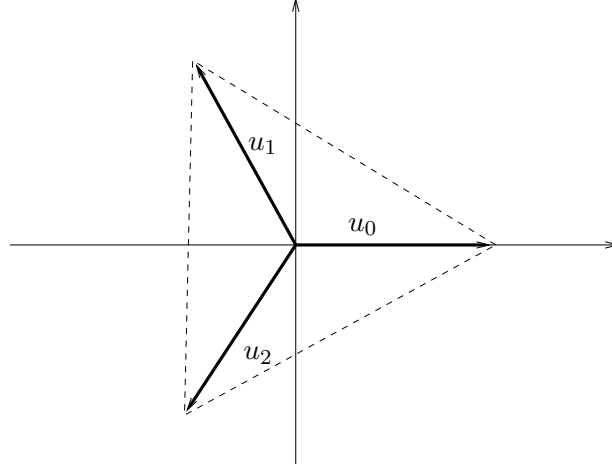
$$u_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i,$$

adică vectorii (v. Fig. 3.5),

$$u_0 = (1, 0), \quad u_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad u_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

verifică relația

$$I = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^2 |u_i\rangle \langle u_i|.$$

Figura 3.5: Frame-ul finit u_0, u_1, u_2 .

3.4.2* Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu d -dimensional cu produs scalar. Un sistem de vectori unitari $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ este numit *frame* dacă există două constante $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ astfel încât

$$\alpha |\langle x|x \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^k |\langle x|u_i \rangle|^2 \leq \beta |\langle x|x \rangle|^2, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}.$$

Sistemul de vectori $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ este numit *frame exact* dacă există $0 < \alpha < \infty$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^k |\langle x|u_i \rangle|^2 = \alpha |\langle x|x \rangle|^2, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}.$$

3.4.3* Teoremă. Într-un spațiu complex d -dimensional cu produs scalar $\mathcal{H}$, orice *frame exact* $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ verifică rezoluția identității

$$I = \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k |u_i\rangle\langle u_i|. \quad (3.3)$$

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ o bază ortonormată în $\mathcal{H}$ și

$$S = \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k |u_i\rangle\langle u_i|.$$

Din relația

$$\alpha d = \alpha \sum_{j=1}^d |\langle v_j | v_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^k |\langle v_j | u_i \rangle|^2 = k$$

rezultă că $\alpha = k/d$. Avem

$$\langle v_j | S | v_j \rangle = \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | v_j \rangle = \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k |\langle v_j | u_i \rangle|^2 = |\langle v_j | v_j \rangle|^2 = 1.$$

Oricare ar fi $j \neq \ell$, au loc relațiile

$$2 = \langle v_j + v_\ell | v_j + v_\ell \rangle = \langle v_j + v_\ell | S | v_j + v_\ell \rangle = 2 + \langle v_j | S | v_\ell \rangle + \langle v_\ell | S | v_j \rangle,$$

$$2 = \langle v_j + i v_\ell | v_j + i v_\ell \rangle = \langle v_j + i v_\ell | S | v_j + i v_\ell \rangle = 2 + i \langle v_j | S | v_\ell \rangle - i \langle v_\ell | S | v_j \rangle,$$

care conduc la $\langle v_j | S | v_\ell \rangle = 0$.

3.4.4* Vom utiliza termenul de *frame exact* pentru a desemna orice sistem de vectori unitari $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ care satisface rezoluția identității (3.3). În particular, orice bază ortonormată este un frame exact.

3.4.5* Teoremă. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu d -dimensional cu produs scalar. Dacă $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ este un frame exact, atunci

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k |u_i\rangle \langle u_i | x \rangle, & \langle x| &= \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k \langle x | u_i \rangle \langle u_i|, \\ \langle x | y \rangle &= \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k \langle x | u_i \rangle \langle u_i | y \rangle, & ||x||^2 &= \frac{d}{k} \sum_{i=1}^k |\langle x | u_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{H}$.

Demonstrație. Toate relațiile rezultă direct din (3.3).

3.4.6* Exercițiu. Vectorii corespunzători vârfurilor unui tetraedru regulat

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), & u_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ u_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), & u_4 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

formează un frame exact în $\mathbb{R}^3$.

3.4.7* Exercițiu. Vectorii corespunzători vârfurilor unui icosaedru regulat

$$\begin{aligned} \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}} (1, \tau, 0), & \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}} (-1, \tau, 0), \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}} (\tau, 0, 1), & \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}} (\tau, 0, -1), \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}} (0, 1, \tau), & \quad \frac{\pm 1}{\sqrt{\tau+2}} (0, -1, \tau) \end{aligned}$$

definit utilizând ‘numărul de aur’ $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$,
formează un frame exact în $\mathbb{R}^3$.

3.4.8* Exercițiu.

Vectorii corespunzători vârfurilor unui poligon regulat cu k laturi

$$u_m = \left(\cos \frac{2m\pi}{k}, \sin \frac{2m\pi}{k} \right), \quad \text{unde } m = 0, 1, \dots, k-1,$$

formează un frame exact în $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$I = \frac{2}{k} \sum_{m=0}^{k-1} |u_m\rangle \langle u_m|.$$

3.4.9* Exercițiu. Sistemul infinit de vectori

$$u(t) = (\cos t, \sin t), \quad \text{unde } t \in [0, 2\pi),$$

formează un frame exact infinit în $\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dt |u(t)\rangle \langle u(t)|.$$

3.4.10* Exercițiu. În spațiul $L^2(\mathbb{R})$, sistemul infinit de vectori

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \text{unde } z \in \mathbb{C},$$

definit utilizând o bază ortonormată $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$, formează un
frame exact infinit astfel încât

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d\Re z d\Im z |z\rangle \langle z|.$$

Scriind $|q, p\rangle$ în loc de $|z\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip) \right\rangle$, relația anterioară devine

$$I = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} dq dp |q, p\rangle \langle q, p|.$$

Frame-ul infinit $|z\rangle_{z \in \mathbb{C}}$, numit *sistemul de stări coerente standard* sau *sistemul de stări coerente Schrödinger-Klauder-Glauber*, joacă un rol fundamental în mecanica cuantică, optică și, în general, în modelele cuantice din fizică [14, 28].

3.5 Spații Hilbert

3.5.1 Orice spațiu cu produs scalar are o structură de spațiu normat cu norma

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

și o structură de spațiu metric, cu distanța definită prin relația

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

3.5.2 O consecință directă a relației $||u||^2 = \langle u, u \rangle$ este *identitatea paralelogramului*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

3.5.3 Definiție. Fie $(x_k)_{k \geq 0}$ un șir de elemente din spațiul cu produs scalar $\mathcal{H}$.

Spunem că $(x_k)_{k \geq 0}$ *converge* la a și scriem $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ dacă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||x_k - a|| = 0,$$

adică dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$||x_k - a|| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } k \geq k_\varepsilon.$$

3.5.4 Definiție. Fie $(x_k)_{k \geq 0}$ un șir de elemente din spațiul cu produs scalar $\mathcal{H}$.

Spunem că $(x_k)_{k \geq 0}$ este *șir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$||x_k - x_\ell|| < \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} k \geq k_\varepsilon, \\ \ell \geq k_\varepsilon. \end{matrix}$$

3.5.5 Propoziție. *Orice șir convergent este un șir Cauchy.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, atunci există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$||x_k - a|| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{oricare ar fi } k \geq k_\varepsilon,$$

și prin urmare

$$||x_k - x_\ell|| = ||x_k - a + a - x_\ell|| \leq ||x_k - a|| + ||x_\ell - a|| < \varepsilon,$$

oricare ar fi $k \geq k_\varepsilon$ și $\ell \geq k_\varepsilon$.

3.5.6 Definiție.

Un spațiu metric este *complet* dacă orice șir Cauchy este convergent.

Un spațiu normat complet este numit *spațiu Banach*.

Un spațiu cu produs scalar complet este numit *spațiu Hilbert*.

3.5.7 Convenție. În funcție de corpul peste care este spațiul vectorial, spațiul Hilbert este un *spațiu Hilbert real* sau un *spațiu Hilbert complex*.
În afară de cazul în care se indică contrariul, prin *spațiu Hilbert* vom înțelege în continuare un spațiu Hilbert complex.

3.5.8 Exemple. Fie $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Spațiul $\mathbb{R}^n$ echipat cu produsul scalar

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

este un spațiu Hilbert real de dimensiune n .

Spațiul $\mathbb{C}^n$ echipat cu produsul scalar

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$$

este un spațiu Hilbert complex de dimensiune n .

3.5.9 Definiție. Spunem despre două spații cu produs scalar $\mathcal{H}$ și $\mathcal{K}$ că sunt *izomorfe* dacă există un izomorfism liniar $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ cu

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathcal{H}.$$

3.5.10 Teoremă.

Orice spațiu cu produs scalar real n -dimensional este izomorf cu $\mathbb{R}^n$

Orice spațiu cu produs scalar complex n -dimensional este izomorf cu $\mathbb{C}^n$.

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază ortonormată în spațiul considerat $\mathcal{H}$. Din

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle v_i, x \rangle} \langle v_i, y \rangle$$

rezultă că izomorfismul liniar

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \langle v_2, x \rangle, \dots, \langle v_n, x \rangle) \quad (3.4)$$

și respectiv,

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^n : x \mapsto (\langle v_1, x \rangle, \langle v_2, x \rangle, \dots, \langle v_n, x \rangle) \quad (3.5)$$

pastrează produsul scalar neschimbat.

3.5.11 Izomorfismele (3.4) și (3.5) permit identificarea lui $\mathcal{H}$ cu $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{C}^n$.

Orice spațiu cu produs scalar finit-dimensional este un spațiu Hilbert.

În cazul spațiilor finit-dimensionale, se poate utiliza termenul de *spațiu Hilbert* în locul celui de *spațiu cu produs scalar*.

3.5.12 Două spații Hilbert izomorfe sunt identice ca structură matematică.

Toate spațiile Hilbert n -dimensionale sunt izomorfe între ele.

Orice spațiu Hilbert n -dimensional se poate identifica cu spațiul Hilbert $\mathbb{C}^n$.

3.5.13 Propoziție. *Suma directă a două spații Hilbert*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \{ (x, y) \mid x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K} \},$$

echipată cu produsul scalar

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle,$$

este spațiu Hilbert.

Demonstrație. Norma asociată

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

are proprietatea

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x\| \\ \|y\| \end{array} \right\} \leq \|(x, y)\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \text{oricare ar fi } (x, y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}.$$

În particular, din relația

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x_k - x_\ell\| \\ \|y_k - y_\ell\| \end{array} \right\} \leq \|(x_k, y_k) - (x_\ell, y_\ell)\| \leq \|x_k - x_\ell\| + \|y_k - y_\ell\|$$

rezultă că

$$(x_k, y_k)_{k \geq 0} \text{ este șir Cauchy} \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_k)_{k \geq 0} \text{ este șir Cauchy} \\ \text{și} \\ (y_k)_{k \geq 0} \text{ este șir Cauchy,} \end{array} \right.$$

iar din relația

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x_k - a\| \\ \|y_k - b\| \end{array} \right\} \leq \|(x_k, y_k) - (a, b)\| \leq \|x_k - a\| + \|y_k - b\|$$

rezultă că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (a, b) \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \\ \text{și} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b. \end{array} \right.$$

3.5.14 Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ sunt baze ortonormate în $\mathcal{H}$ și $\mathcal{K}$, atunci

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), (0, w_2), \dots, (0, w_k)\}$$

este bază ortonormată în $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$.

3.5.15 Exemple. Avem $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, etc.

3.5.16 În funcție de context, prin $\mathbb{C}^n$ se înțelege spațiul Hilbert

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}\},$$

identificat cu spațiul matricelor linie

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}\},$$

sau spațiul matricelor coloană

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = {}^t(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \mid x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{C} \right\}.$$

3.5.17 Izomorfismul $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{nm}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \mapsto {}^t(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{nm})$$

devine un izomorfism de spații Hilbert dacă echipăm spațiul vectorial complex $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ cu produsul scalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{ij} \bar{a}_{ij} b_{ij},$$

adică dacă utilizăm *produsul scalar Hilbert-Schmidt*

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B),$$

unde A^* este adjuncta (complex conjugata transpusei) lui A .

Spațiul $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ devine în acest fel un spațiu Hilbert izomorf cu $\mathbb{C}^{nm}$.

3.5.18 Spațiul $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al tuturor operatorilor liniari $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este un spațiu Hilbert cu produsul scalar Hilbert-Schmidt

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B),$$

definit cu ajutorul unei baze și independent de baza aleasă.

Norma asociată produsului scalar este

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}. \quad (3.6)$$

3.5.19* O altă normă, neutilizată pe parcursul acestei cărți, este

$$\|A\| = \sup\{ \|Ax\| \mid x \in \mathcal{H} \text{ cu } \|x\|=1 \}.$$

3.5.20* Două norme $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$ definite pe un spațiu vectorial $\mathcal{K}$ se numesc *echivalente* dacă există $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{K}.$$

În cazul unui spațiu $\mathcal{K}$ finit-dimensional, se poate arăta că oricare două norme sunt echivalente. În particular, dacă $\mathcal{H}$ este un spațiu Hilbert finit-dimensional, atunci orice normă $\|\cdot\| : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty)$ este echivalentă cu norma Hilbert-Schmidt (3.6).

3.6 Mulțimi convexe

3.6.1 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial și $M \subset \mathcal{V}$ o submulțime.

Spunem că M este *mulțime convexă* dacă

$$\{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subset M,$$

oricare ar fi $x, y \in M$.

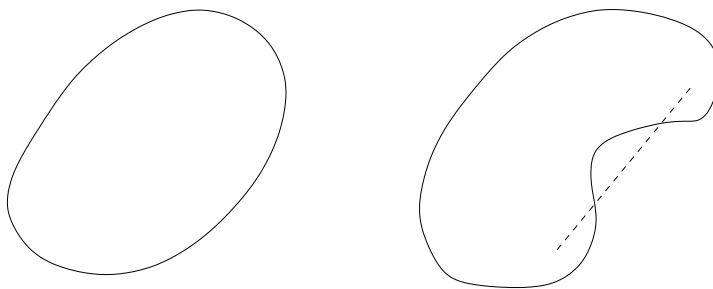


Figura 3.6: Mulțime convexă și mulțime neconvexă.

3.6.2 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert, $x \in V$ și $M \subset \mathcal{H}$ o submulțime.

Prin *distanța de la x la M* se înțelege numărul

$$\delta(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

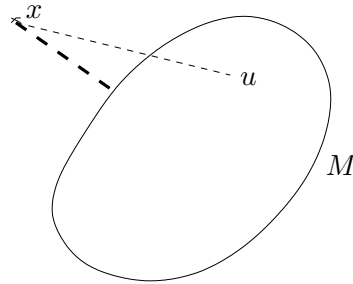


Figura 3.7: Distanța de la x la M .

3.6.3* Teoremă Dacă $\mathcal{H}$ este un spațiu Hilbert, $M \subset \mathcal{H}$ este o mulțime convexă închisă și $x \in \mathcal{H} - M$, atunci există un element unic $y \in M$ astfel încât

$$\delta(x, M) = \|x - y\|.$$

Demonstrație. Fie $\delta = \delta(x, M)$. Arătăm mai întâi că $\delta > 0$. Presupunând că $\delta = 0$ rezultă că pentru orice $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ există $x_n \in M$ astfel încât $\|x - x_n\| < \frac{1}{n}$ și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Deoarece M este închisă ar rezulta că $x \in M$, în contradicție cu ipoteza. Pentru fiecare $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ alegem $y_n \in M$ astfel încât

$$\delta \leq \|x - y_n\| < \delta + \frac{1}{n} \quad (3.7)$$

și arătăm că $(y_n)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy. Scriind identitatea paralelogramului

$$2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 + \|2x - y_n - y_m\|^2$$

sub forma

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m\right)\right\|^2,$$

obținem că

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\delta + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\delta^2,$$

adică

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \frac{4\delta}{n} + \frac{4\delta}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \leq \frac{4\delta + 2}{n} + \frac{4\delta + 2}{m}.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, alegând $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{8\delta}{N} < \varepsilon$, avem

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \varepsilon, \quad \text{oricare ar fi } \begin{matrix} n \geq N \\ m \geq N. \end{matrix}$$

Spațiul Hilbert $\mathcal{H}$ fiind complet, există $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ și y aparține mulțimii închise M . Trecând la limită în relația (3.7) obținem că $\delta = \|x - y\|$. Presupunând că există două elemente $y, y' \in M$ cu $\delta = \|x - y\| = \|x - y'\|$ și folosind identitatea paralelogramului deducem relația

$$\begin{aligned} 4\delta^2 &= 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 = \|y - y'\|^2 + \|2x - y - y'\|^2 \\ &= \|y - y'\|^2 + 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'\right)\right\|^2 \geq \|y - y'\|^2 + 4\delta^2 \end{aligned}$$

din care rezultă $y = y'$.

3.7 Adjunctul unui operator liniar

3.7.1 Teoremă. Fie $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ spații Hilbert și $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ un operator liniar.

Există un operator liniar $A^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ care verifică relația

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H}. \quad (3.8)$$

și el este unic determinat.

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază în $\mathcal{H}$. Pentru $x \in \mathcal{K}$ fixat, aplicația

$$\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(y) = \langle x, Ay \rangle$$

este o formă liniară. Știm (v. pag. 116-2) că există

$$a = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j = \sum_{j=1}^n \overline{\langle x, Av_j \rangle} v_j = \sum_{j=1}^n \langle Av_j, x \rangle v_j$$

astfel încât $\varphi(y) = \langle a, y \rangle$, $\forall y \in \mathcal{H}$. Punând $A^*x = a$, obținem operatorul liniar

$$A^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}, \quad A^*x = \sum_{j=1}^n \langle Av_j, x \rangle v_j,$$

care satisface relația

$$\begin{aligned}\langle A^*x, y \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \langle Av_j, x \rangle v_j, y \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, Av_j \rangle \langle v_j, y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{j=1}^n \langle v_j, y \rangle Av_j \right\rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Presupunând că $B : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ este un alt operator satisfăcând (3.8), obținem relația

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle Bx, y \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H}$$

care conduce la $A^* = B$.

3.7.2 Definiție. Fie $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ spații Hilbert și $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ un operator liniar.

Operatorul liniar $A^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ care verifică relația

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H}$$

este numit *adjunctul* lui A . Alte notații utilizate sunt A^+ , $A^\dagger$.

3.7.3 Propoziție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert. Dacă $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sunt operatori liniari și dacă $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci

$$\begin{aligned}A + B : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, & (A + B)x &= Ax + Bx, \\ \lambda A : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, & (\lambda A)x &= \lambda Ax, \\ AB : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}, & (AB)x &= A(Bx),\end{aligned}$$

sunt operatori liniari și

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= A, & (A + B)^* &= A^* + B^*, \\ (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^*, & (AB)^* &= B^* A^*.\end{aligned}$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned}(A + B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By \\ &= \alpha(A + B)x + \beta(A + B)y;\end{aligned}$$

$$(\lambda A)(\alpha x + \beta y) = \lambda A(\alpha x + \beta y) = \lambda \alpha Ax + \lambda \beta Ay = \alpha(\lambda A)x + \beta(\lambda A)y;$$

$$\begin{aligned}(AB)(\alpha x + \beta y) &= A(B(\alpha x + \beta y)) = A(\alpha Bx + \beta By) = \alpha A(Bx) + \beta A(By) \\ &= \alpha(AB)x + \beta(AB)y.\end{aligned}$$

Relația $(A^*)^* = A$ rezultă din

$$\langle (A^*)^*x, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Avem

$$\begin{aligned}\langle (A + B)^*x, y \rangle &= \langle x, (A + B)y \rangle = \langle x, Ay \rangle + \langle x, By \rangle \\ &= \langle A^*x, y \rangle + \langle B^*x, y \rangle = \langle (A^* + B^*)x, y \rangle,\end{aligned}$$

adică, pentru orice $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle (A + B)^* x, y \rangle = \langle (A^* + B^*) x, y \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

De aceea, $(A + B)^* = A^* + B^*$. Similar, pentru orice $x \in \mathcal{H}$ avem

$$\begin{aligned} \langle (\lambda A)^* x, y \rangle &= \langle x, (\lambda A) y \rangle = \langle x, \lambda A y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, A y \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle A^* x, y \rangle = \langle \bar{\lambda} A^* x, y \rangle = \langle (\bar{\lambda} A^*) x, y \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

și această relație conduce la

$$(\lambda A)^* x = (\bar{\lambda} A^*) x, \quad \forall x \in \mathcal{H},$$

adică $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$. Oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ are loc relația

$$\begin{aligned} \langle (AB)^* x, y \rangle &= \langle x, (AB) y \rangle = \langle x, A(B y) \rangle = \langle A^* x, B y \rangle \\ &= \langle B^* (A^* x), y \rangle = \langle (B^* A^*) x, y \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

care conduce la $(AB)^* = B^* A^*$.

3.7.4 Teoremă. *Matricea adjunctului A^* al unui operator liniar $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ în raport cu o bază ortonormată este adjuncta matricei operatorului A în raport cu baza considerată.*

Demonstrație. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix}$$

matricele lui A și A^* în raport cu baza ortonormată $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, adică

$$A v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i, \quad A^* v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* v_i. \quad (3.9)$$

Relația

$$u = \sum_{i=1}^n \langle v_i, u \rangle v_i$$

are loc pentru orice $u \in \mathcal{H}$. Înlocuind pe u cu $A v_j$ și respectiv $A^* v_j$ obținem

$$A v_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, A v_j \rangle v_i, \quad A^* v_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, A^* v_j \rangle v_i. \quad (3.10)$$

Din (3.9) și (3.10) rezultă relațiile

$$a_{ij} = \langle v_i, A v_j \rangle, \quad a_{ij}^* = \langle v_i, A^* v_j \rangle$$

care conduc la

$$a_{ij}^* = \langle v_i, A^* v_j \rangle = \langle A v_i, v_j \rangle = \overline{\langle v_j, A v_i \rangle} = \bar{a}_{ji}.$$

3.7.5* Teoremă. Dacă $\Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ este o transformare liniară, atunci operatorii

$$\Lambda^* \Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{și} \quad \Lambda \Lambda^* : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

au aceleași valori proprii nenule, cu aceleași multiplicități.

Demonstrație. Dacă μ este o valoare proprie a lui $\Lambda^* \Lambda$ și u un vector propriu corespunzător, atunci

$$\Lambda^* \Lambda u = \mu u.$$

În cazul în care $\mu \neq 0$, din această relație obținem egalitatea

$$\Lambda \Lambda^* \Lambda u = \mu \Lambda u$$

posibilă numai dacă $\Lambda u \neq 0$. De aceea μ este o valoare proprie a operatorului $\Lambda \Lambda^*$ iar Λu un vector propriu corespunzător. Dacă $u_1, u_2, \dots, u_k$ sunt vectori proprii liniar independenți ai operatorului $\Lambda^* \Lambda$ corespunzători valorii μ , atunci din

$$\alpha_1 \Lambda u_1 + \alpha_2 \Lambda u_2 + \dots + \alpha_k \Lambda u_k = 0$$

obținem relația

$$\alpha_1 \Lambda^* \Lambda u_1 + \alpha_2 \Lambda^* \Lambda u_2 + \dots + \alpha_k \Lambda^* \Lambda u_k = 0,$$

echivalentă cu egalitatea

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0$$

care conduce la $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Prin urmare, $\Lambda u_1, \dots, \Lambda u_k$ sunt vectori liniar independenți.

3.7.6 Utilizând notația lui Dirac, fiecărui vector $|v\rangle \in \mathcal{H}$ îi asociem forma liniară

$$\langle v| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : |w\rangle \mapsto \langle v|w\rangle.$$

Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este operator liniar, atunci

$$\langle Av|w\rangle = \langle v|A^*w\rangle = \langle v|A^*|w\rangle.$$

Forma liniară corespunzătoare vectorului $A|v\rangle$ este $\langle v|A^*$.

3.7.7 Sistemul de vectori $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ este bază ortonormată dacă și numai dacă

$$\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i| = I.$$

Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este operator liniar, atunci

$$A = IAI = \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i| A \sum_{j=1}^n |v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i|A|v_j\rangle |v_i\rangle\langle v_j|.$$

3.7.8 Exercițiu. Să se arate că adjunktul operatorului $|u\rangle\langle v|$ este $|v\rangle\langle u|$, adică avem

$$(|u\rangle\langle v|)^* = |v\rangle\langle u|.$$

Soluție. Elementele matriceale corespunzătoare satisfac relația

$$\langle v_i|u\rangle\langle v|v_j\rangle = \overline{\langle u|v_i\rangle} \overline{\langle v_j|v\rangle} = \overline{\langle v_j|v\rangle} \overline{\langle u|v_i\rangle}.$$

3.8 Operatori autoadjuncți (hermitieni)

3.8.1 Definiție. Pe un spațiu finit-dimensional, un *operator autoadjunct*

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

este un operator care coincide cu adjunktul ($A = A^*$), adică

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (3.11)$$

3.8.2 Notăm cu $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ mulțimea operatorilor autoadjuncți definiți pe $\mathcal{H}$, adică

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{H}) &= \{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid A^* = A \} \\ &= \{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \}. \end{aligned}$$

3.8.3 Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert bidimensional (de exemplu, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$) și fie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ o bază ortonormată fixată. Operatorul identitate

$$I : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$$

și operatorii Pauli (mai multe notații sunt prezentate)

$$\begin{aligned} \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, & \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X &= |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \\ \sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, & \sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y &= i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| \\ \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H}, & \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

sunt operatori autoadjuncți.

3.8.4 Propoziție.

$$a) \quad A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \implies A + B \in \mathcal{A}(\mathcal{H}).$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \implies \alpha A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}).$$

$$c) \quad \text{Dacă } A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{H}), \text{ atunci :}$$

$$AB \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \iff AB = BA.$$

$$d) \quad \text{Dacă operatorul } A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \text{ este inversabil, atunci } A^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{H}).$$

Demonstrație. Utilizăm proprietățile adjunctului prezentate la pag. 131-**3**.

$$a) \text{ Avem } (A + B)^* = A^* + B^* = A + B$$

$$b) \text{ Avem } (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^* = \alpha A.$$

$$c) \text{ Dacă } AB \in \mathcal{A}(\mathcal{H}), \text{ atunci } AB = (AB)^* = B^* A^* = BA.$$

Dacă $AB = BA$, atunci $(AB)^* = B^* A^* = BA = AB$ și prin urmare $AB \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$.

$$d) \text{ Avem } \langle A^{-1}x, y \rangle = \langle A^{-1}x, A(A^{-1}y) \rangle = \langle A(A^{-1}x), A^{-1}y \rangle = \langle x, A^{-1}y \rangle.$$

3.8.5 Unele rezultate similare se pot obține în cazul matricelor hermitiene. Spațiul matricelor hermitiene $n \times n$ este un spațiu Hilbert real de dimensiune n^2 cu produsul scalar definit prin relația

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

Matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

formează o bază ortogonală în spațiul matricelor hermitiene 2×2 .

O altă bază ortogonală remarcabilă este $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

formează o bază ortogonală în spațiul matricelor hermitiene 3×3 .

3.8.6 Propoziție. *Un operator liniar $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este autoadjunct dacă și numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată este hermitiană.*

Demonstrație. Consecință directă a rezultatului prezentat la pag. 132-4.

3.8.7 Spațiul operatorilor autoadjuncți $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ este un spațiu vectorial real.

Echipat cu produsul scalar

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

el devine un spațiu Hilbert real de dimensiune d^2 , unde $d = \dim \mathcal{H}$.

3.8.8 În spațiul Hilbert $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ sistemul $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ este o bază ortogonală.

Fiecare operator $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ admite o reprezentare de forma (v. pag. 32-6)

$$A = \frac{1}{2}(a_0 I + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3) = \frac{1}{2}(a_0 I + a \cdot \sigma)$$

cu $a_0 \in \mathbb{R}$ și $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ unic determinați.

Valorile proprii ale lui A sunt $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a_0 \pm \|a\|)$.

3.8.9 Distanța definită de produsul scalar în $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ este

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{\langle A - B, A - B \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A - B)^2}.$$

În cazul $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, o altă distanță foarte utilă este

$$\tilde{d}\left(\frac{1}{2}(a_0 I + a \cdot \sigma), \frac{1}{2}(b_0 I + b \cdot \sigma)\right) = \frac{1}{2}(|a_0 - b_0| + \|a - b\|).$$

3.8.10 Propoziție. Dacă $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este operator autoadjunct, atunci:

- a) valorile proprii ale lui A sunt reale;
- b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

Demonstrație. a) Fie λ o valoare proprie și $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda u$. Din relația $\langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle$ rezultă că $\lambda = \bar{\lambda}$.

b) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii distincte și u_1, u_2 vectori proprii corespunzători, adică $Au_1 = \lambda_1 u_1$ și $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Din $\langle Au_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Au_2 \rangle$ rezultă $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

3.8.11 Propoziție. În cazul unui operator auto-adjunct, toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale.

Demonstrație Fie $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ și fie λ_1 o rădăcină a polinomului caracteristic, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0.$$

În acest caz, sistemul de ecuații

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda_1)x_n = 0 \end{cases}$$

admite în $\mathbb{C}^n$ o soluție $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Adunând ecuațiile sistemului înmulțite respectiv cu $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ obținem relația

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_k \bar{x}_j = \lambda_1 \sum_{j=1}^n x_j \bar{x}_j.$$

Deoarece matricea lui A într-o bază ortonormată este hermitiană, adică $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, avem

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_k \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \frac{\sum_{j,k=1}^n \bar{a}_{kj} x_k \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \bar{\lambda}_1.$$

3.8.12 Teoremă. Dacă $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este operator autoadjunct, atunci există o bază ortonormată $\mathfrak{B}$ în $\mathcal{H}$ astfel încât matricea lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ este o matrice diagonală.

Demonstrație. Utilizăm inducția matematică. Afirmația este evident adevărată dacă

$\dim \mathcal{H} = 1$. Presupunând că afirmația este adevărată în cazul $\dim \mathcal{H} = n-1$, arătăm că ea este adevărată și în cazul $\dim \mathcal{H} = n$. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu vectorial de dimensiune n și fie $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Știm că A are cel puțin o valoare proprie λ_1 . Fie $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda_1 u$. Vectorul unitar $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$ este și el vector propriu corespunzător valorii λ_1 . Subspațiul vectorial format din toți vectorii ortogonali pe v_1 ,

$$\mathcal{K} = \{v_1\}^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle v_1, x \rangle = 0\},$$

este un subspațiu invariant

$$x \in \mathcal{K} \Rightarrow \langle v_1, Ax \rangle = \langle Av_1, x \rangle = \lambda_1 \langle v_1, x \rangle = 0 \Rightarrow Ax \in \mathcal{K}$$

de dimensiune $n-1$ și $\text{span}\{v_1\} \oplus \mathcal{K} = \mathcal{H}$. Relația $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ fiind satisfăcută de orice $x, y \in \mathcal{H}$, rezultă că restricția lui A la $\mathcal{K}$

$$A|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

verifică relația $\langle A|_{\mathcal{K}}x, y \rangle = \langle x, A|_{\mathcal{K}}y \rangle$ oricare ar fi $x, y \in \mathcal{K}$. Aceasta arată că $A|_{\mathcal{K}}$ este operator autoadjunct. În virtutea ipotezei de inducție, există o bază ortonormată $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ în $\mathcal{K}$ în raport cu care matricea lui $A|_{\mathcal{K}}$ este o matrice diagonală,

$$A|_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sistemul de vectori $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată în $\mathcal{H}$ și matricea lui A în raport cu baza $\mathfrak{B}$ este

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3.8.13 Cu notațiile din demonstrația teoremei, operatorul A admite reprezentarea

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i| = \lambda_1 |v_1\rangle\langle v_1| + \lambda_2 |v_2\rangle\langle v_2| + \cdots + \lambda_n |v_n\rangle\langle v_n|.$$

De exemplu, avem

$$\begin{aligned} I &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, & \sigma_x &= |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|, \\ \sigma_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, & \sigma_y &= |\oplus\rangle\langle \oplus| - |\ominus\rangle\langle \ominus|, \end{aligned}$$

unde

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \quad |\oplus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \quad |\ominus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle).$$

3.8.14 Teoremă. *Doi operatori autoadjuncți $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ comută, adică*

$$AB = BA,$$

dacă și numai dacă există o bază ortonormată formată din vectori proprii comuni ai lui A și B .

Demonstrație. “ $\Leftarrow$ ” Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată formată din vectori proprii comuni ai lui A și B ,

$$Av_j = \alpha_j v_j, \quad Bv_j = \beta_j v_j,$$

atunci, oricare ar fi $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, avem

$$(AB)x = \sum_{j=1}^n x_j ABv_j = \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \beta_j v_j = \sum_{j=1}^n x_j BAv_j = (BA)x.$$

“ $\Rightarrow$ ” Presupunem că $AB = BA$ și că B are doar două valori proprii β_1 și β_2 . Subspațiile proprii corespunzătoare $\mathcal{H}_1$ și $\mathcal{H}_2$, care verifică relațiile

$$\begin{aligned} Bx &= \beta_1 x, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}_1, \\ Bx &= \beta_2 x, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}_2, \end{aligned}$$

sunt ortogonale și $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Deoarece

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{H}_1 &\implies B(Ax) = A(Bx) = \beta_1(Ax) \implies Ax \in \mathcal{H}_1, \\ x \in \mathcal{H}_2 &\implies B(Ax) = A(Bx) = \beta_2(Ax) \implies Ax \in \mathcal{H}_2, \end{aligned}$$

putem considera restricțiile $A|_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ și $A|_{\mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$. Operatorii $A|_{\mathcal{H}_1}$ și $A|_{\mathcal{H}_2}$ fiind autoadjuncți, în spațiile Hilbert $\mathcal{H}_1$ și $\mathcal{H}_2$ există baze ortonormate $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ și $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ formate din vectori proprii ai lui A . Sistemul de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată în $\mathcal{H}$ formată din vectori proprii ai lui A și B . Dacă B are mai multe valori proprii, demonstrația este similară.

3.8.15* În spațiul Hilbert $\mathbb{C}^2$, vectorii

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= |0\rangle, & |u_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi i}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{\frac{\pi i}{3}}|1\rangle, \\ |u_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, & |u_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi i}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\frac{\pi i}{3}}|1\rangle \end{aligned}$$

formează un *frame* exact

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 |u_j\rangle\langle u_j| = I.$$

Operatorii autoadjuncți

$$\Pi_j = |u_j\rangle\langle u_j|, \quad \text{unde } j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

formează o bază în spațiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ și

$$\langle \Pi_j, \Pi_k \rangle = |\langle u_j | u_k \rangle|^2 = \frac{1}{3}, \quad \text{pentru } j \neq k.$$

Frame-ul $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle\}$ este simetric și

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) &= \left\{ \sum_{j=1}^4 \alpha_j |u_j\rangle\langle u_j| \mid \alpha_j \in \mathbb{C} \right\}, \\ \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) &= \left\{ \sum_{j=1}^4 \alpha_j |u_j\rangle\langle u_j| \mid \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

3.8.16* Teoremă. *Dacă $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{d^2}$ este un frame exact în spațiul Hilbert d -dimensional $\mathcal{H}$ și dacă există o constantă $a \in (0, \infty)$ astfel încât*

$$|\langle u_j | u_k \rangle|^2 = a, \quad \text{pentru } j \neq k,$$

atunci $a = 1/(d+1)$ și $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{d^2}$ este bază în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Demonstrație. Plecând de la rezoluția identității

$$\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d^2} |u_j\rangle\langle u_j| = I,$$

obținem relația

$$d = \text{tr } I^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{j,k=1}^{d^2} |\langle u_j | u_k \rangle|^2 = \frac{1}{d^2} (d^2 + a d^2 (d^2 - 1)),$$

din care rezultă $a = 1/(d+1)$. Presupunând că $\sum_{j=1}^{d^2} \alpha_j |u_j\rangle\langle u_j| = 0$, obținem relația

$$0 = \sum_{j=1}^{d^2} \alpha_j |\langle u_j | u_k \rangle|^2 = \alpha_k + \frac{1}{d+1} \sum_{j \neq k} \alpha_j = \frac{1}{d+1} \left(d \alpha_k + \sum_{j=1}^{d^2} \alpha_j \right)$$

care arată că $\alpha_1 = \dots = \alpha_{d^2}$ și prin urmare $0 = \sum_{j=1}^{d^2} \alpha_j |u_j\rangle\langle u_j| = \alpha_1 I$. De aceea, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{d^2} = 0$ și operatorii $|u_j\rangle\langle u_j|$, în număr de d^2 , sunt linear independenți.

3.8.17* În spațiul Hilbert $\mathbb{C}^3$, vectorii unitari

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), & |u_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), & |u_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |0\rangle), \\ |u_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon|0\rangle + \bar{\varepsilon}|1\rangle), & |u_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon|1\rangle + \bar{\varepsilon}|2\rangle), & |u_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon|2\rangle + \bar{\varepsilon}|0\rangle), \\ |u_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\varepsilon}|0\rangle + \varepsilon|1\rangle), & |u_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\varepsilon}|1\rangle + \varepsilon|2\rangle), & |u_9\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\varepsilon}|2\rangle + \varepsilon|0\rangle) \end{aligned}$$

unde $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ este o bază ortonormată și $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, formează un frame exact

$$\frac{1}{3} \sum_{j=1}^9 |u_j\rangle\langle u_j| = I$$

simetric

$$|\langle u_j | u_k \rangle|^2 = \frac{1}{4} \quad \text{pentru } j \neq k,$$

și astfel încât $\{|u_j\rangle\langle u_j|\}_{j=1}^9$ este bază în $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$.

3.9 Elemente de calcul funcțional

3.9.1 Plecând de la un operator liniar $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ putem defini operatorii

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \quad \dots$$

și

$$P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I,$$

oricare ar fi polinomul $P(X) = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_{m-1} X + a_m$.

3.9.2 În spațiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, despre o serie de operatori

$$\sum_{k \geq 0} A_k$$

spunem că este convergentă dacă există $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ astfel încât

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m A_k = B,$$

adică astfel încât

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^m A_k - B \right\| = 0.$$

Operatorul B se numește *suma seriei* și scriem

$$B = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots \quad \text{sau} \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

3.9.3 Urmând analogia cu dezvoltările în serie de puteri

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots, \\ \cos z &= 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots, \\ \sin z &= \frac{1}{1!}z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots, \end{aligned}$$

definim operatorii

$$\begin{aligned} e^A &= 1 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots, \\ \cos A &= 1 - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \frac{1}{6!}A^6 + \cdots, \\ \sin A &= \frac{1}{1!}A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \frac{1}{7!}A^7 + \cdots. \end{aligned}$$

Se poate arăta că seriile de operatori implicate sunt convergente.

3.9.4 Teoremă. În cazul a doi operatori liniari $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ avem:

$$AB = BA \quad \implies \quad e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

Demonstrație. Înmulțind termen cu termen seriile absolut convergente obținem

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} A^j B^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!k!} A^j B^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}. \end{aligned}$$

3.9.5 În cazul unui operator diagonalizabil

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|,$$

avem

$$A^2 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j |v_i\rangle \langle v_i| v_j \rangle \langle v_j| = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 |v_i\rangle \langle v_i|,$$

$$\alpha A^2 + \beta A + \gamma I = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i^2 + \beta \lambda_i + \gamma) |v_i\rangle\langle v_i|$$

și

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) |v_i\rangle\langle v_i|, \quad \text{oricare ar fi polinomul } P.$$

Putem defini operatorul

$$f(A) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) |v_i\rangle\langle v_i|,$$

pentru orice funcție $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ al cărei domeniu de definiție conține $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Deoarece $f(A)$ depinde doar de valorile luate de funcția f în punctele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, același operator corespunde la o infinitate de funcții.

În particular, avem

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} |v_i\rangle\langle v_i|, \\ \cos A &= \sum_{i=1}^n \cos \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|, \\ \sin A &= \sum_{i=1}^n \sin \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|. \end{aligned}$$

Dacă $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, \infty)$, atunci putem defini operatorul

$$\sqrt{A} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} |v_i\rangle\langle v_i|$$

cu proprietatea $(\sqrt{A})^2 = A$. Ținând seama că $\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda \ln \lambda = 0$, putem admite că $0 \ln 0 = 0$ și defini operatorul

$$A \ln A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|,$$

3.9.6 Plecând de la reprezentările (v. pag. 119-13 și pag. 138-13)

$$\sigma_x = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|, \quad \sigma_y = |\oplus\rangle\langle \oplus| - |\ominus\rangle\langle \ominus|, \quad \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|,$$

unde

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |\oplus\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, & |\ominus\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se obține

$$\begin{aligned}
 e^{-i\frac{t}{2}\sigma_x} &= e^{-i\frac{t}{2}}|+\rangle\langle+| + e^{i\frac{t}{2}}|-\rangle\langle-| \\
 &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{i\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & -i \sin \frac{t}{2} \\ -i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\
 e^{-i\frac{t}{2}\sigma_y} &= e^{-i\frac{t}{2}}|\oplus\rangle\langle\oplus| + e^{i\frac{t}{2}}|\ominus\rangle\langle\ominus| \\
 &= \frac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{i\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & -\sin \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\
 e^{-i\frac{t}{2}\sigma_z} &= e^{-i\frac{t}{2}}|0\rangle\langle 0| + e^{i\frac{t}{2}}|1\rangle\langle 1| \\
 &= e^{-i\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{i\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{t}{2}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3.10 Operatori pozitivi

3.10.1 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert și $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operator autoadjunct.

Spunem că A este *operator pozitiv* și scriem $A \geq 0$ dacă

$$\langle x|A|x \rangle \geq 0, \quad \text{oricare ar fi } |x \rangle \in \mathcal{H}.$$

Spunem că A este *operator pozitiv definit* și scriem $A > 0$ dacă

$$\langle x|A|x \rangle > 0, \quad \text{oricare ar fi } |x \rangle \neq 0.$$

3.10.2 Orice operator autoadjunct A este diagonalizabil și se poate scrie sub forma

$$A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

Oricare ar fi $|x \rangle \in \mathcal{H}$ avem

$$\langle x|A|x \rangle = \sum_i \lambda_i |\langle v_i|x \rangle|^2.$$

Operatorul A este pozitiv dacă și numai dacă $\lambda_i \geq 0$, oricare ar fi i .

Operatorul A este pozitiv definit dacă și numai dacă $\lambda_i > 0$, oricare ar fi i .

3.10.3 Teoremă. Operatorul liniar $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este pozitiv dacă și numai dacă există un operator liniar $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ astfel încât

$$A = B^*B.$$

Demonstrație. Dacă $A = B^*B$, atunci A este pozitiv deoarece

$$\langle x, Ax \rangle = \langle x, B^*Bx \rangle = \langle Bx, Bx \rangle \geq 0, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathcal{H}.$$

Dacă $A = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i| \geq 0$, atunci putem alege $B = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |v_i\rangle\langle v_i|$.

3.10.4 Definiție. În spațiul $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, definim relația de inegalitate

$$A \leq B \quad \text{dacă} \quad B - A \geq 0.$$

3.10.5 Exercițiu. Oricare ar fi operatorul liniar C , avem

$$A \leq B \implies CAC^* \leq CBC^*.$$

3.10.6 Definiție. Fie $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ două spații Hilbert. Spunem despre o aplicație liniară

$$f: \mathcal{A}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{K})$$

că este o *aplicație pozitivă* dacă

$$A \geq 0 \implies f(A) \geq 0.$$

3.10.7 Mulțimea operatorilor pozitivi definiți pe un spațiu Hilbert $\mathcal{H}$ este o mulțime convexă: oricare ar fi $x \in \mathcal{H}$ și oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$ avem

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &\geq 0, \\ \langle x, Bx \rangle &\geq 0 \end{aligned} \implies \langle x, ((1-\lambda)A + \lambda B)x \rangle \geq 0.$$

3.10.8 Operatorul autoadjunct

$$A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad A = \frac{1}{2}(a_0 I + a \cdot \sigma),$$

verifică relația $0 \leq A \leq I$ dacă și numai dacă

$$\|a\| \leq a_0 \leq 2 - \|a\|.$$

În particular, în acest caz $\|a\| \leq 1$.

3.10.9 Dacă $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sunt operatori liniari, atunci

$$\begin{aligned} 0 \leq A \leq I, \\ 0 \leq B \leq I \end{aligned} \implies 0 \leq (1-t)A + tB \leq I, \quad \text{oricare ar fi } t \in [0, 1].$$

3.11 Proiectori

3.11.1 Dacă $\mathcal{H}$ este spațiu Hilbert și $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subspațiu, atunci (v. pag. 115-28)

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp.$$

Fiecare vector $|x\rangle \in \mathcal{H}$ poate fi scris în mod unic sub forma

$$|x\rangle = |x'\rangle + |x''\rangle \quad \text{cu} \quad \begin{array}{l} |x'\rangle \in \mathcal{K}, \\ |x''\rangle \in \mathcal{K}^\perp \end{array}$$

și aplicația

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad P|x\rangle = |x'\rangle,$$

este un operator liniar,

$$P(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle) = \alpha|x'\rangle + \beta|y'\rangle = \alpha P|x\rangle + \beta P|y\rangle,$$

cu proprietatea $P(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$, numit *proiectorul* (ortogonal) pe subspațiul $\mathcal{K}$.

3.11.2 Din relația

$$||x||^2 = \langle x|x\rangle = \langle x' + x''|x' + x''\rangle = \langle x'|x'\rangle + \langle x''|x''\rangle = ||x'\rangle|^2 + ||x''\rangle|^2$$

rezultă că

$$||Px|| \leq ||x||, \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in \mathcal{H},$$

și

$$||Px|| = ||x|| \iff |x\rangle \in \mathcal{K}.$$

3.11.3 Din relațiile

$$\langle x|Px\rangle = \langle x|x'\rangle = \langle x'|x'\rangle = ||Px||^2 \geq 0,$$

$$\langle x|x\rangle = \langle x' + x''|x' + x''\rangle = \langle x'|x'\rangle + \langle x''|x''\rangle \geq \langle x'|x'\rangle = \langle x|Px\rangle,$$

adevărate oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$, rezultă că

$$0 \leq \langle x|Px\rangle \leq \langle x|Ix\rangle,$$

adică

$$0 \leq P \leq I.$$

3.11.4 Fiecare bază ortonormată $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_k\rangle\}$ a lui $\mathcal{K}$ poate fi extinsă până la o bază $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_k\rangle, |v_{k+1}\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ a lui $\mathcal{H}$ și, pentru orice $|x\rangle$, avem

$$|x'\rangle = \sum_{i=1}^k |v_i\rangle \langle v_i|x\rangle, \quad \text{și} \quad |x''\rangle = \sum_{i=k+1}^n |v_i\rangle \langle v_i|x\rangle.$$

Relația

$$P|x\rangle = \sum_{i=1}^k |v_i\rangle \langle v_i|x\rangle$$

verificată oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$, arată că P poate fi definit în felul următor

$$P = \sum_{i=1}^k |v_i\rangle \langle v_i|. \quad (3.12)$$

Matricea lui P în baza considerată are forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Complementul ortogonal al proiectorului P

$$P^\perp = I - P = \sum_{i=k+1}^n |v_i\rangle \langle v_i|$$

este proiectorul corespunzător subspațiului $\mathcal{K}^\perp$.

3.11.5 Teoremă. *Un operator liniar $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este proiector dacă și numai dacă*

$$P^2 = P = P^*. \quad (3.13)$$

Demonstrație. Dacă P este proiector, atunci relația (3.13) rezultă din (3.12). Admițând că P verifică relația (3.13), dovedim că P este proiectorul corespunzător subspațiului

$$\mathcal{K} = \{|u\rangle \mid P|u\rangle = |u\rangle\}$$

Orice vector $|x\rangle \in \mathcal{H}$ poate fi scris sub forma

$$|x\rangle = P|x\rangle + (|x\rangle - P|x\rangle).$$

Din relația $P(P|x) = P^2|x> = P|x>$ rezultă că $P|x> \in \mathcal{K}$. Oricare ar fi $|u> \in \mathcal{K}$, avem $P|u> = |u>$, și prin urmare $\langle u| = \langle u|P^*$. Din relația

$$\langle u|(|x> - P|x>) = \langle u|P^*|x> - \langle u|P^*P|x> = 0$$

rezultă că $|x> - P|x> \in \mathcal{K}^\perp$.

3.11.6 Operatorul autoadjunct (v. pag. 136-8)

$$A: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad A = \frac{1}{2}(a_0 I + a \cdot \sigma),$$

este proiector dacă și numai dacă

$$a_0 = \|a\| = 1.$$

3.11.7 Exercițiu. Singurele valori proprii posibile ale unui proiector P sunt 0 și 1.

Soluție. Dacă λ este valoare proprie a lui P , atunci există $|x> \neq 0$ astfel încât $P|x> = \lambda|x>$. Din relația

$$(\lambda^2 - \lambda)|x> = (P^2 - P)|x> = 0$$

obținem egalitatea $\lambda^2 - \lambda = 0$, verificată numai de $\lambda = 0$ și $\lambda = 1$.

3.11.8 Dacă P este proiectorul corespunzător subspațiului $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, atunci spațiul propriu corespunzător lui 1 este $\mathcal{K}$, iar cel corespunzător lui 0 este $\mathcal{K}^\perp$, adică

$$\mathcal{K} = \{|u> \mid P|u> = |u>\} \quad \text{și} \quad \mathcal{K}^\perp = \{|u> \mid P|u> = 0\}.$$

3.11.9 Dacă proiectorii $P_1, P_2: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt astfel încât $P_1 P_2 = 0$, atunci

$$P_2 P_1 = P_2^* P_1^* = (P_1 P_2)^* = 0.$$

3.11.10 Definiție. Doi proiectori $P_1, P_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se numesc *ortogonali* dacă $P_1 P_2 = 0$.

3.11.11 Propoziție. Proiectorii $P_1, P_2: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă subspațiile corespunzătoare $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ sunt ortogonale.

Demonstrație. Dacă $\mathcal{K}_1 \perp \mathcal{K}_2$, atunci $P_2|x> \in \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1^\perp$, și prin urmare $P_1 P_2|x> = 0$, oricare ar fi $|x> \in \mathcal{H}$. Invers, dacă $P_1 P_2 = 0$, $|y> \in \mathcal{K}_1$ și $|z> \in \mathcal{K}_2$, atunci $|y> = P_1|y>$, $|z> = P_2|z>$ și avem

$$\langle y|z\rangle = \langle y|P_1^* P_2|z\rangle = \langle y|P_1 P_2|z\rangle = 0.$$

3.11.12 Propoziție. *Suma $P = P_1 + \dots + P_m$ a proiectoarelor $P_1, P_2, \dots, P_m$ este un projector dacă și numai dacă ei sunt ortogonali doi câte doi.*

Demonstrație. Dacă $P_1, P_2, \dots, P_m : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sunt proiectori ortogonali, atunci

$$P^2 = (P_1 + \dots + P_m)^2 = P_1 + \dots + P_m = P,$$

adică P este projector. Invers, dacă P este projector și $i \neq j$, atunci (v pag. 146-3)

$$\|P_i x\|^2 + \|P_j x\|^2 \leq \sum_{k=1}^m \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^m \langle x | P_k | x \rangle = \langle x | P | x \rangle \leq \langle x | x \rangle = \|x\|^2,$$

adică avem

$$\|P_i x\|^2 + \|P_j x\|^2 \leq \|x\|^2, \quad \text{oricare ar fi } |x\rangle \in \mathcal{H}.$$

Punând $P_i y$ în loc de x , obținem relația

$$\|P_i y\|^2 + \|P_j P_i y\|^2 \leq \|P_i y\|^2, \quad \text{oricare ar fi } |y\rangle \in \mathcal{H},$$

din care rezultă că

$$P_j P_i y = 0, \quad \text{oricare ar fi } |y\rangle \in \mathcal{H}.$$

3.11.13 Propoziție. *Produsul $P = P_1 P_2$ a doi proiectori $P_1, P_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este un projector dacă și numai dacă $P_1 P_2 = P_2 P_1$.*

Demonstrație. Dacă $P = P_1 P_2$ este projector, atunci $P_1 P_2 = P = P^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$. Dacă $P_1 P_2 = P_2 P_1$, atunci $P^2 = PP = P_1 P_2 P_1 P_2 = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2 = P$.

3.11.14 Dacă $P_1, P_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sunt proiectorii pe subspațiile $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ și dacă $P_1 P_2 = P_2 P_1$, atunci $P = P_1 P_2$ este projectorul pe subspațiul $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$.

3.11.15 Propoziție. *Fie P_1, P_2 proiectorii corespunzători subspațiilor $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$.*

Următoarele patru relații sunt echivalente:

- a) $P_1 \geq P_2$; c) $P_1 P_2 = P_2$;
- b) $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2$; d) $P_2 P_1 = P_2$.

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b). Dacă $|x\rangle \in \mathcal{K}_2$, atunci $x = P_2 |x\rangle$. Din relația (v. pag. 146-3)

$$\|x\|^2 \geq \|P_1 x\|^2 = \langle x | P_1 | x \rangle \geq \langle x | P_2 | x \rangle = \langle x | x \rangle = \|x\|^2$$

rezultă că $\|P_1 x\| = \|x\|$, ceea ce este posibil numai dacă $P_1 x = x$, adică $|x\rangle \in \mathcal{K}_1$.

b) $\Rightarrow$ c). Fie $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Deoarece $P_2 |x\rangle \in \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$, avem $P_1 P_2 |x\rangle = P_2 |x\rangle$.

c) $\Rightarrow$ d). Dacă $P_1 P_2 = P_2$, atunci $P_2 P_1 = P_2^* P_1^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* = P_2$.

d) $\Rightarrow$ a). Fie $|x\rangle \in \mathcal{H}$. Utilizând relațiile $P_2^* = (P_2 P_1)^* = P_1^* P_2^*$ și $P_2 \leq I$, obținem

$$\langle x | P_2 | x \rangle = \langle x | P_2^* P_2 | x \rangle = \langle x | P_1^* P_2^* P_2 P_1 | x \rangle = \langle x | P_1^* P_2 P_1 | x \rangle \leq \langle x | P_1^* P_1 | x \rangle = \langle x | P_1 | x \rangle.$$

3.11.16 Propoziție. Diferența $P = P_1 - P_2$ a doi proiectori $P_1, P_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este un proiector dacă și numai dacă $P_1 \geq P_2$.

Demonstrație. Dacă $P = P_1 - P_2$ este proiector, atunci, pe baza propoziției precedente, din $P_1 = P + P_2$ rezultă că $(P_1 - P_2)P_2 = PP_2 = 0$, adică are loc relația $P_1 P_2 = P_2$, echivalentă cu $P_1 \geq P_2$. Invers, dacă $P_1 \geq P_2$, adică $P_1 P_2 = P_2 = P_2 P_1$, atunci

$$P^2 = (P_1 - P_2)^2 = P_1^2 - P_1 P_2 - P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 = P.$$

3.11.17 Teoremă. Orice operator autoadjunct A admite descompunerea spectrală

$$A = \sum_i \mu_i P_i,$$

unde μ_i sunt valorile proprii ale lui A și P_i sunt proiectorii ortogonali corespunzători care satisfac relațiile

$$P_i^2 = P_i = P_i^* \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \sum_i P_i = I.$$

Demonstrație. Știm (v. pag. 138-13) că A se poate scrie sub forma

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|, \quad \text{cu} \quad \sum_{i=1}^n |v_i\rangle\langle v_i| = I \quad \text{și} \quad \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$$

(unele valori λ_i pot să coincidă). Dacă A are doar două valori proprii distincte,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu_1, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = \mu_2,$$

atunci A admite descompunerea

$$A = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$

unde P_1, P_2 sunt proiectorii ortogonali

$$P_1 = |v_1\rangle\langle v_1| + \dots + |v_k\rangle\langle v_k|, \quad P_2 = |v_{k+1}\rangle\langle v_{k+1}| + \dots + |v_n\rangle\langle v_n|$$

care satisfac relațiile $P_1 + P_2 = I$ și $P_1 P_2 = 0$. În cazul mai multor valori proprii demonstrația este similară.

3.11.18 Exemplu. Valorile proprii ale operatorului autoadjunct

$$A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$$

sunt $\lambda_1 = 2$ și $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Subspațiile proprii corespunzătoare

$$\mathcal{V}_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3 \} = \{ (\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$$

$$\mathcal{V}_{-1} = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \} = \{ (\alpha, \beta, -\alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \}$$

sunt ortogonale. Notând cu P_2 și P_{-1} proiectorii ortogonali corespunzători, avem

$$A = 2P_2 + (-1)P_{-1}.$$

În subspațiul $\mathcal{V}_2$ o bază ortonormată este formată din vectorul $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Alegând în $\mathcal{V}_{-1}$ baza ortonormată

$$\left\{ v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

rezultă

$$P_2 = |v_1\rangle\langle v_1|, \quad P_{-1} = |v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3|,$$

adică

$$A = 2P_2 + (-1)P_{-1} = 2|v_1\rangle\langle v_1| - (|v_2\rangle\langle v_2| + |v_3\rangle\langle v_3|).$$

3.12 Transformări unitare și ortogonale

3.12.1 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert. O *transformare unitară* în $\mathcal{H}$ este o aplicație liniară $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ cu proprietatea

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.2 Transformările unitare păstrează nemodificată norma vectorilor:

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

3.12.3 Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert bidimensional și $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ o bază ortonormată fixată.

Operatorul identitate I și *operatorii Pauli*

$$\sigma_x = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \quad \sigma_y = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| \quad \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

sunt transformări unitare. *Transformarea Hadamard*

$$H: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|$$

este o transformare unitară cu proprietățile

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad H^2 = I.$$

3.12.4 Propoziție. Fie $A, B: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ aplicații liniare.

Dacă A este transformare unitară, atunci și A^{-1} este transformare unitară.

Dacă A și B sunt transformări unitare, atunci AB este transformare unitară.

Demonstrație. Dacă A este transformare unitară, atunci $\ker A = \{0\}$

$$Ax = 0 \implies \|x\| = \|Ax\| = 0 \implies x = 0$$

și conform teoremei dimensiunii

$$\dim \operatorname{Im} A = \dim \mathcal{H} - \dim \operatorname{Ker} A = \dim \mathcal{H}.$$

De aceea, A este o transformare bijectivă. Transformarea A^{-1} este unitară

$$\langle x, y \rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y) \rangle = \langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle.$$

Dacă A și B sunt transformări unitare, atunci

$$\langle (AB)x, (AB)y \rangle = \langle A(Bx), A(By) \rangle = \langle Bx, By \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.5 Transformarea identitate

$$I: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}: x \mapsto x$$

este o transformare unitară și compunerea aplicațiilor este asociativă

$$(A(BC))x = A((BC)x) = A(B(Cx)) = (AB)(Cx) = ((AB)C)x, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

De aceea, mulțimea transformărilor unitare

$$\{A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}\}$$

are o structură naturală de grup (*grupul transformărilor unitare* ale lui $\mathcal{H}$).

3.12.6 Propoziție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert și $A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ o aplicație liniară.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) A este transformare unitară;

b) $A^*A = I$;

c) A este bijectivă și $A^{-1} = A^*$.

Demonstrație. Dacă A este transformare unitară, adică

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

atunci are loc relația

$$\langle A^*Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

care conduce la $A^*A = I$. Dacă $A^*A = I$, atunci $A^*AA^{-1} = A^{-1}$, adică $A^* = A^{-1}$.

Dacă A este bijectivă și $A^{-1} = A^*$, atunci

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*Ax, y \rangle = \langle A^{-1}Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.7 Propoziție. O aplicație liniară $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este transformare unitară dacă și numai dacă matricea ei în raport cu o bază ortonormată este o matrice unitară.

Demonstrație. Dacă $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază ortonormată și $Av_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j$, atunci

$$\begin{aligned} \langle Av_i, Av_j \rangle &= \langle \sum_{k=1}^n a_{ki}v_k, \sum_{m=1}^n a_{mj}v_m \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{ki}\bar{a}_{mj}\langle v_k, v_m \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki}\bar{a}_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{jk}^*a_{ki}. \end{aligned}$$

Dacă A este transformare unitară, atunci are loc relația

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}^*a_{ki} = \langle Av_i, Av_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

echivalentă cu $A^*A = I$. Invers, dacă $A^*A = I$, atunci

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay \rangle &= \left\langle A\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right), A\left(\sum_{j=1}^n y_j v_j\right) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j \langle Av_i, Av_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

3.12.8 Teoremă. Dacă $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este transformare unitară, atunci:

- orice valoare proprie λ verifică relația $|\lambda| = 1$;
- Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

Demonstrație a) Fie λ o valoare proprie a lui A și $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda u$. Din relația $\langle Au, Au \rangle = \langle u, u \rangle$ rezultă că $|\lambda| = 1$.

b) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii distincte, u_1, u_2 vectori proprii corespunzători, adică $Au_1 = \lambda_1 u_1$ și $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Din relația $\langle Au_1, Au_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ rezultă că $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

3.12.9 Teoremă. *Dacă $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este transformare unitară, atunci există o bază ortonormată $\mathfrak{B}$ în $\mathcal{H}$ astfel încât matricea lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ este o matrice diagonală.*

Demonstrație. Utilizăm metoda inducției matematice. Afirmația este evident adevărată dacă $\dim \mathcal{H} = 1$. Presupunând că afirmația este adevărată în cazul $\dim \mathcal{H} = n-1$, arătăm că ea este adevărată și dacă $\dim \mathcal{H} = n$. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu vectorial de dimensiune n și $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ o transformare unitară. Fie $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ o valoare proprie și $u \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $Au = \lambda_1 u$. Vectorul unitar $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$ este de asemenea vector propriu corespunzător lui λ_1 . Subspațiul format din toți vectorii ortogonali pe v_1

$$\mathcal{K} = \{v_1\}^\perp = \{x \in V \mid \langle v_1, x \rangle = 0\}$$

este un subspațiu invariant

$$x \in \mathcal{K} \Rightarrow \langle v_1, Ax \rangle = \lambda_1 \langle \lambda_1 v_1, Ax \rangle = \lambda_1 \langle Av_1, Ax \rangle = \lambda_1 \langle v_1, x \rangle = 0 \Rightarrow Ax \in \mathcal{K}$$

de dimensiune $n-1$ și $\text{span}\{v_1\} \oplus \mathcal{K} = \mathcal{H}$. Relația $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ având loc pentru orice $x, y \in \mathcal{H}$, rezultă că restricția lui A la $\mathcal{K}$

$$A|_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

verifică relația $\langle A|_{\mathcal{K}}x, A|_{\mathcal{K}}y \rangle = \langle x, y \rangle$, oricare ar fi $x, y \in \mathcal{K}$, adică este transformare unitară. Conform ipotezei de inducție, există o bază ortonormată $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ în $\mathcal{K}$ astfel încât matricea lui $A|_{\mathcal{K}}$ este o matrice diagonală

$$A|_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sistemul de vectori $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ este bază ortonormată în $\mathcal{H}$ și matricea lui A în această bază este o matrice diagonală

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

3.12.10 Teoremă. *Orice operator unitar A admite descompunerea spectrală*

$$A = \sum_i \mu_i P_i,$$

unde μ_i sunt valorile proprii și P_i sunt proiectorii ortogonali corespunzători cu proprietățile

$$P_i^2 = P_i = P_i^* \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \sum_i P_i = I.$$

Demonstrație. Este similară demonstrației prezentate la pag. 150-17.

3.12.11 Teoremă. Fie $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subspațiu vectorial al spațiului Hilbert $\mathcal{H}$.

Orice operator unitar $U: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ se poate prelungi până la un operator unitar $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Demonstrație. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ o bază ortonormată în $\mathcal{K}$ pe care o extindem până la o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ în $\mathcal{H}$. Sistemul ortonormat

$$w_1 = Uv_1, \quad w_2 = Uv_2, \quad \dots, \quad w_k = Uv_k$$

il extindem până la o bază $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ în $\mathcal{H}$. Operatorul $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$,

$$Uv_j = w_j, \quad \text{oricare ar fi } j \in \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n\},$$

este o extensie unitară a operatorului unitar $U: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$.

3.12.12 Există un analog real al noțiunii de transformare unitară, dar nu toate proprietățile prezentate în cazul complex se păstrează în cazul real.

3.12.13 Definiție. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert real. O transformare ortogonală în $\mathcal{H}$ este o aplicație liniară $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ cu proprietatea

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

3.12.14 Transformările ortogonale păstrează nemodificată norma vectorilor.

Mulțimea transformărilor ortogonale

$$\{ A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \}$$

are o structură naturală de grup (grupul transformărilor ortogonale).

3.12.15 Propoziție. O aplicație liniară $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ este transformare ortogonală dacă și numai dacă matricea ei în raport cu o bază ortonormată este o matrice ortogonală.

3.12.16 Teoremă. Dacă $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ este o transformare ortogonală, atunci:

- a) singurele valori proprii posibile ale lui A sunt 1 și -1 ;
- b) vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali.

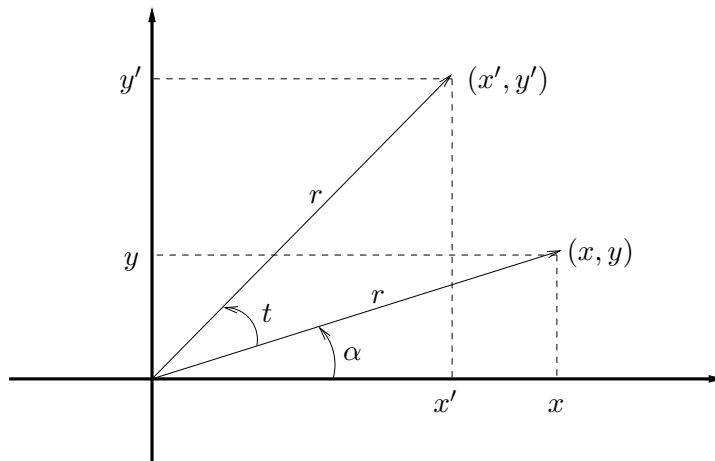


Figura 3.8: Rotația de unghi t în jurul originii.

3.12.17 Exercițiu. Dacă identificăm planul cu spațiul Hilbert real $\mathbb{R}^2$, atunci rotația R_t de unghi t în jurul originii este transformare ortogonală. Arătați că, în general, R_t nu admite nicio valoare sau vector propriu.

Soluție. Notând $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și punând (v. Fig. 3.8)

$$\mathcal{R}_t(x, y) = (x', y'),$$

obținem

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha + t) = r \cos \alpha \cos t - r \sin \alpha \sin t = x \cos t - y \sin t, \\ y' &= r \sin(\alpha + t) = r \cos \alpha \sin t + r \sin \alpha \cos t = x \sin t + y \cos t, \end{aligned}$$

adică

$$\mathcal{R}_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Matricea rotației $\mathcal{R}_t$ în raport cu baza canonică este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice

$$\begin{vmatrix} \cos t - \lambda & -\sin t \\ \sin t & \cos t - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sunt

$$\lambda_{1,2} = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1}$$

și ele sunt reale dacă și numai dacă $\cos t \in \{-1, 1\}$, adică dacă și numai dacă $t \in \mathbb{Z}\pi$.

3.12.18 Rotația $\mathcal{R}(t)$ de unghi t în jurul unui vector unitar $v \in \mathbb{R}^3$.

Fie (v_1, v_2, v_3) coordonatele lui v în raport cu baza canonică

$$\mathfrak{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

În cazurile $v = e_3$ și $v = -e_3$, matricea lui $\mathcal{R}_t$ în raport cu baza $\mathfrak{B}$ este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și respectiv} \quad \mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul $v \neq \pm e_3$, deoarece

$$v \times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (v_2, -v_1, 0)$$

și

$$v \times (v \times e_3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (v_1 v_3, v_2 v_3, -v_1^2 - v_2^2)$$

sistemul de vectori

$$\mathfrak{B}' = \left\{ e'_1 = \frac{(v_2, -v_1, 0)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, e'_2 = \frac{(v_1 v_3, v_2 v_3, -v_1^2 - v_2^2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, e'_3 = (v_1, v_2, v_3) \right\}$$

este o bază ortonormată. Matricea de trecere de la $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{B}'$ este

$$S = \begin{pmatrix} \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & \frac{v_1 v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & v_1 \\ \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & \frac{v_2 v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & v_2 \\ 0 & \frac{-v_1^2 - v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} & v_3 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de la $\mathfrak{B}'$ la $\mathfrak{B}$ este tS . Matricea rotației de unghi t în jurul lui v în raport cu baza $\mathfrak{B}'$ este

$$\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea aceleiași rotații în raport cu baza canonică $\mathfrak{B}$ este

$$S \mathcal{R}_t {}^tS = S \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tS.$$

Se observă că

$$S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

și prin urmare

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^tS \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

În particular, avem

$$S \mathcal{R}_t {}^tS \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

adică

$$S \mathcal{R}_t {}^tS v = v.$$

3.12.19 În cazul unei transformări ortogonale $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, în general, nu există o bază $\mathfrak{B}$ astfel încât matricea lui A în raport cu $\mathfrak{B}$ să fie una diagonală.

3.13 Transformarea Fourier finită

3.13.1 Definiție. Spunem despre o funcție de variabilă discretă

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

că este *periodică* cu perioada N dacă

$$\varphi(n+N) = \varphi(n), \quad \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{Z}.$$

3.13.2 Oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$, funcția exponențială

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : n \mapsto e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \quad (3.14)$$

este o funcție periodică cu perioada N deoarece

$$e^{\frac{2\pi i}{N} k(n+N)} = e^{\frac{2\pi i}{N} kn} e^{2k\pi i} = e^{\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

Am utilizat relația

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

Deoarece $e^{\frac{2\pi i}{N}(k+N)n} = e^{\frac{2\pi i}{N} kn}$, există numai N funcții de forma (3.14).

3.13.3 Orice funcție

$$\varphi : \{0, 1, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate prelungi prin periodicitate până la o funcție periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N , și orice funcție periodică $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N este complet determinată de restricția ei la mulțimea $\{0, 1, \dots, N-1\}$, adică de numerele $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(N-1)$. Deoarece

$$\dots = \varphi(n-2N) = \varphi(n-N) = \varphi(n) = \varphi(n+N) = \varphi(n+2N) = \dots$$

funcția φ poate fi considerată ca fiind definită pe mulțimea $\mathbb{Z}_N$ a claselor de resturi modulo N , adică

$$\varphi : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.13.4 Teoremă. Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ este funcție periodică cu perioada N , atunci

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m) \quad (3.15)$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m). \quad (3.16)$$

Demonstrație. Din formula (suma seriei geometrice)

$$\sum_{m=0}^{N-1} q^m = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \begin{cases} N & \text{dacă } q = 1, \\ \frac{1-q^N}{1-q} & \text{dacă } q \neq 1, \end{cases} \quad (3.17)$$

rezultă relația

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} m(n-k)} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{N} (n-k)} \right)^m = \begin{cases} N & \text{dacă } k \equiv n \pmod{N}, \\ 0 & \text{dacă } k \not\equiv n \pmod{N}, \end{cases}$$

care conduce la

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} nm} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} mk} \varphi(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} m(n-k)} \right) \varphi(k) = \varphi(n).$$

3.13.5 Știm că orice funcție periodică continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu perioada T

$$f(t+T) = f(t), \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R},$$

cu derivata continuă pe porțiuni, este dezvoltabilă în serie Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i}{T} kt} \quad \text{cu} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2\pi i}{T} kt} f(t) dt. \quad (3.18)$$

Din (3.15) rezultă că $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, periodică cu perioada N , admite reprezentarea

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \quad \text{cu} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m). \quad (3.19)$$

3.13.6 Definiție. Transformata Fourier a funcției periodice

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

cu perioada N este funcția

$$F[\varphi] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n). \quad (3.20)$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcția

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n). \quad (3.21)$$

3.13.7 Transformatele Fourier $F[\varphi]$ și $F^{-1}[\varphi]$ sunt funcții periodice cu perioada N

$$F[\varphi](k+N) = F[\varphi](k), \quad F^{-1}[\varphi](k+N) = F^{-1}[\varphi](k)$$

și

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \quad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

3.13.8 În cazul $N=2$, transformata Fourier a unei funcții

$$\varphi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcția

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^1 e^{-\frac{2\pi i}{2} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^1 (-1)^{kn} \varphi(n),$$

adică funcția

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1), \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) - \varphi(1). \end{aligned}$$

Transformata inversă este

$$F^{-1}[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} F^{-1}[\varphi](0) &= \frac{1}{2}(\varphi(0) + \varphi(1)), \\ F^{-1}[\varphi](1) &= \frac{1}{2}(\varphi(0) - \varphi(1)). \end{aligned}$$

3.13.9 În cazul $N=3$ avem

$$e^{-\frac{2\pi i}{3} kn} = \left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^{kn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } kn \in 3\mathbb{Z}, \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dacă } kn \in 3\mathbb{Z} + 1, \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{dacă } kn \in 3\mathbb{Z} + 2, \end{cases}$$

și prin urmare transformata Fourier a unei funcții

$$\varphi : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcția

$$F[\varphi] : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^2 e^{-\frac{2\pi i}{3} kn} \varphi(n),$$

adică avem

$$\begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2), \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \varphi(1) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \varphi(2), \\ F[\varphi](2) &= \varphi(0) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \varphi(1) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \varphi(2). \end{aligned}$$

Ultimele relații se mai pot scrie

$$\begin{pmatrix} F[\varphi](0) \\ F[\varphi](1) \\ F[\varphi](2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix}.$$

3.13.10 În cazul $N=4$, transformata Fourier a unei funcții

$$\varphi : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcția

$$F[\varphi] : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{2\pi i}{4} kn} \varphi(n) = \sum_{n=0}^3 (-i)^{kn} \varphi(n),$$

adică avem

$$\begin{aligned} F[\varphi](0) &= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3), \\ F[\varphi](1) &= \varphi(0) - i\varphi(1) - \varphi(2) + i\varphi(3), \\ F[\varphi](2) &= \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(3), \\ F[\varphi](3) &= \varphi(0) + i\varphi(1) - \varphi(2) - i\varphi(3). \end{aligned}$$

3.13.11 Exercițiu. Să se calculeze transformata Fourier a funcției

$$\varphi : \{0, 1, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(n) = a^n,$$

unde $a \in \mathbb{C}$ este fixat.

Rezolvare. Utilizând formula (3.17) obținem

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} a^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a e^{-\frac{2\pi i}{N} k} \right)^n = \begin{cases} N & \text{dacă } a = e^{\frac{2\pi i}{N} k}, \\ \frac{1-a^N}{1-a e^{-\frac{2\pi i}{N} k}} & \text{dacă } a \neq e^{\frac{2\pi i}{N} k}. \end{cases}$$

3.13.12 Exercițiu. Fie $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ fixat și funcția delta discretă

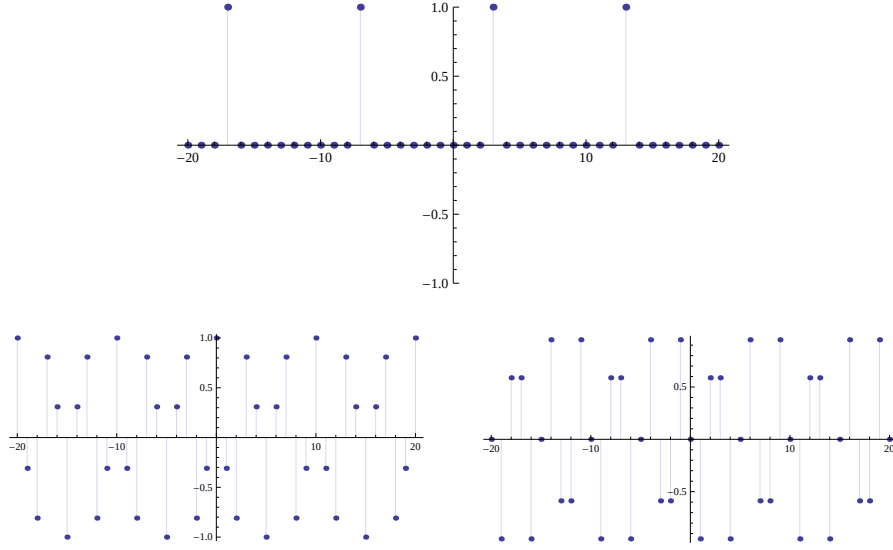


Figura 3.9: Funcția δ_3 , partea reală $\Re F[\delta_3] = \cos \frac{6\pi i}{N} m$ (stânga) și partea imaginară $\Im F[\delta_3] = \sin \frac{6\pi i}{N} m$ a transformatei Fourier $F[\delta_3]$ în cazul $N=10$.

$$\delta_m : \{0, 1, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m \\ 0 & \text{dacă } n \neq m. \end{cases}$$

Să se arate că

$$F[\delta_m](k) = e^{-\frac{2\pi i}{N} km}.$$

Rezolvare. Avem

$$F[\delta_m](k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \delta_m(n) = e^{-\frac{2\pi i}{N} km} = \cos \frac{2\pi i}{N} km - i \sin \frac{2\pi i}{N} km.$$

Scriind δ în loc de δ_0 , avem

$$F[\delta](k) = 1, \quad F[\delta_1](k) = e^{-\frac{2\pi i}{N} k}, \quad F[\delta_2](k) = e^{-\frac{4\pi i}{N} k}, \dots$$

3.13.13 Spațiul funcțiilor $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, periodice cu perioada N , este un spațiu Hilbert cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\varphi(n)} \psi(n),$$

iar $\{\delta, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1}\}$ este bază ortonormată.

3.13.14 Oricare ar fi $j \in \mathbb{Z}$, avem

$$e^{\frac{2\pi i}{N}kn} = e^{\frac{2\pi i}{N}(k+jN)n} = e^{\frac{2\pi i}{N}k(n+jN)}.$$

De aceea, în relațiile (3.20) și (3.21), putem considera că n parcurge mulțimea $\mathbb{Z}_N$. Astfel, transformata Fourier a funcției $\varphi : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ este funcția

$$F[\varphi] : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n),$$

iar transformata Fourier inversă este funcția

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}, \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n).$$

3.13.15 Oricare ar fi $n_0 \in \mathbb{Z}$, au loc relațiile

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n) \quad \text{și} \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n).$$

3.13.16 În cazul în care $N=2M+1$ este impar, mulțimea

$$\{-M, -M+1, \dots, M-1, M\}$$

este sistem de reprezentanți pentru $\mathbb{Z}_N$ și prin urmare

$$F[\varphi](k) = \sum_{n=-M}^M e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n), \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n).$$

Dacă funcția reală

$$\varphi : \{-M, -M+1, \dots, M-1, M\} \rightarrow \mathbb{R}$$

este pară, adică

$$\varphi(-n) = \varphi(n), \quad \text{oricare ar fi } n \in \{-M, -M+1, \dots, M-1, M\},$$

atunci, utilizând schimbarea $n \mapsto -n$, obținem

$$\begin{aligned} F[\varphi](k) &= \sum_{n=-M}^M e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n) = \sum_{n=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(-n) \\ &= \sum_{n=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \varphi(n) = \overline{F[\varphi](k)}, \end{aligned}$$

adică transformata Fourier $F[\varphi]$ este funcție reală.

3.13.17 În cazul în care $N=2M+1$ este impar, relația (3.15) devine

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m=-M}^M e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m). \quad (3.22)$$

Această relație, scrisă sub forma

$$\varphi(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i}{N} nk} F[\varphi](k), \quad (3.23)$$

poate fi privită ca o reconstrucție a lui φ plecând de la valorile lui $F[\varphi]$.

Dacă numărul întreg L este astfel încât $0 < L < M$, atunci funcția

$$\varphi_L(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi i}{N} nk} F[\varphi](k) \quad (3.24)$$

este o aproximație a lui φ , obținută folosind doar $F[\varphi](k)$ cu $-L \leq k \leq L$. Astfel de aproximații sunt utilizate pentru compresia datelor în descrierea digitală a sunetelor sau imaginilor.

Trecerea $\varphi \mapsto \varphi_L$ poate fi utilizată pentru filtrarea semnalelor (eliminarea unor zgomote) și pentru prelucrarea imaginilor (eliminarea unor defecte).

3.13.18 În cazul general $N \in \{2, 3, 4, \dots\}$, funcția φ poate fi aproximată utilizând

$$\varphi_L(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi i}{N} nk} F[\varphi](k) \quad (3.25)$$

cu $L \in \{1, 2, \dots\}$ ales astfel încât $2L+1 \leq N$. Dacă φ este funcție reală atunci utilizând schimbarea $k \mapsto -k$ obținem relația

$$\begin{aligned} \varphi_L(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L e^{\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} e^{-\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-L}^L e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} e^{\frac{2\pi i}{N} km} \varphi(m) = \overline{\varphi_L(n)} \end{aligned}$$

care arată că φ_L este funcție reală.

3.13.19 În figura 3.10 prezentăm funcția periodică

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cu perioada $N=20$ definită prin

$$\varphi(n) = (n/10)^2 \quad \text{pentru} \quad -10 \leq n \leq 9$$

și funcția periodică

$$\varphi_3(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=-3}^3 e^{\frac{2\pi i}{20} nk} F[\varphi](k).$$

Funcția φ_3 este o aproximație a lui φ deoarece

$$\varphi(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=-10}^9 e^{\frac{2\pi i}{20} nk} F[\varphi](k).$$

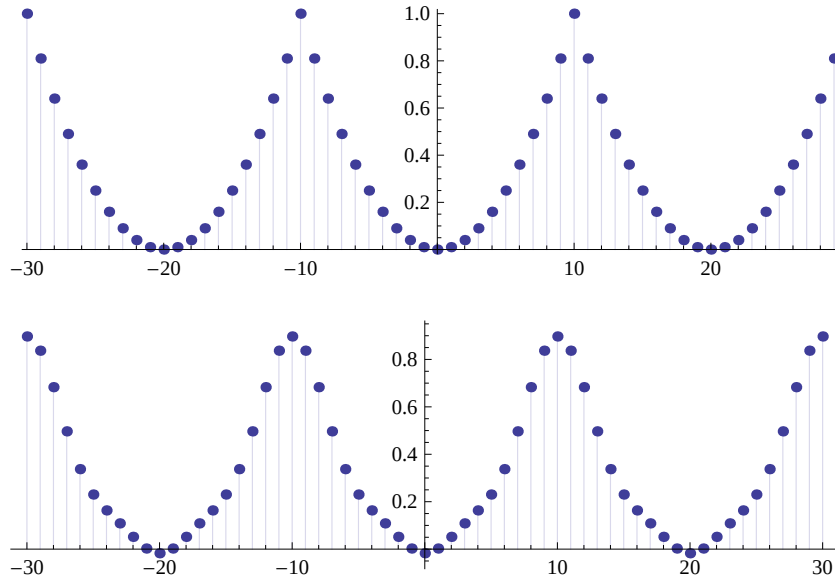


Figura 3.10: Funcțiile φ și φ_3 .

3.13.20 În cazul în care perioada este un număr par $2N$, unei funcții

$$\varphi : \{0, 1, \dots, 2N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

îi putem asocia funcțiile

$$\begin{aligned} \varphi_{par} : \{0, 1, \dots, N-1\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_{par}(n) &= \varphi(2n), \\ \varphi_{impar} : \{0, 1, \dots, N-1\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_{impar}(n) &= \varphi(2n+1), \end{aligned}$$

și avem

$$\begin{aligned}
 F[\varphi](k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} e^{-\frac{2\pi i}{2N} kn} \varphi(n) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{2N} k 2m} \varphi(2m) + \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{2N} k (2m+1)} \varphi(2m+1), \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} k m} \varphi_{par}(m) + e^{-\frac{\pi i}{N} k} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} k m} \varphi_{impar}(m) \\
 &= \begin{cases} F[\varphi_{par}](k) + e^{-\frac{\pi i}{N} k} F[\varphi_{impar}](k) & \text{dacă } k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ F[\varphi_{par}](k-N) + e^{-\frac{\pi i}{N} k} F[\varphi_{impar}](k-N) & \text{dacă } k \in \{N, N+1, \dots, 2N-1\}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Utilizând formula obținută, calculul transformatelor Fourier ale funcțiilor de forma

$$\varphi : \{0, 1, \dots, 2^N - 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate reduce succesiv până la calculul transformatelor unor funcții de forma

$$\psi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Această metodă de calcul foarte eficientă este numită *transformarea Fourier rapidă*.

3.13.21 Știm că în cazul $N=2$, transformata Fourier a unei funcții

$$\varphi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcția

$$\begin{aligned}
 F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad & F[\varphi](0) = \varphi(0) + \varphi(1), \\
 & F[\varphi](1) = \varphi(0) - \varphi(1).
 \end{aligned}$$

3.13.22 Calculul transformatei Fourier a unei funcții

$$\varphi : \{0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

se poate reduce la calculul transformatelor Fourier ale funcțiilor

$$\begin{aligned}
 \varphi_{par} : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad & \varphi_{par}(n) = \varphi(2n), \\
 \varphi_{impar} : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad & \varphi_{impar}(n) = \varphi(2n+1).
 \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned}
F[\varphi](k) &= \begin{cases} F[\varphi_{par}](k) + e^{-\frac{\pi i}{2}k} F[\varphi_{impar}](k) & \text{dacă } k \in \{0, 1\}, \\ F[\varphi_{par}](k-2) + e^{-\frac{\pi i}{2}k} F[\varphi_{impar}](k-2) & \text{dacă } k \in \{2, 3\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) & \text{dacă } k=0, \\ \varphi(0) - i\varphi(1) - \varphi(2) + i\varphi(3) & \text{dacă } k=1, \\ \varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(3) & \text{dacă } k=2, \\ \varphi(0) + i\varphi(1) - \varphi(2) - i\varphi(3) & \text{dacă } k=3. \end{cases}
\end{aligned}$$

3.13.23 În cazul $N=2^3$, unei funcții de forma

$$\varphi : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

funcțiilor

$$\begin{aligned}
\varphi_{par} : \{0, 1, 2, 3\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_{par}(n) &= \varphi(2n), \\
\varphi_{impar} : \{0, 1, 2, 3\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi_{impar}(n) &= \varphi(2n+1)
\end{aligned}$$

li se poate aplica direct formula obținută la punctul anterior.

3.13.24 Spațiul funcțiilor periodice $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ cu perioada N se poate identifica cu $\mathbb{C}^N$ asociind funcției φ elementul $x = (x_0, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ cu $x_n = \varphi(n)$. Obținem în acest fel transformarea Fourier pe $\mathbb{C}^N$, adică

$$F: \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N : x \mapsto F[x], \quad \text{unde } F[x]_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} x_n$$

și inversa ei

$$F^{-1}: \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N : x \mapsto F^{-1}[x], \quad \text{unde } F^{-1}[x]_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}kn} x_n.$$

3.13.25 Definiție. O matrice de forma

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{d-1} \\ c_{d-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{d-2} \\ c_{d-2} & c_{d-1} & c_0 & \cdots & c_{d-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

se numește *matrice circulantă*.

3.13.26 Teoremă. Valorile proprii ale matricei (3.26) sunt coordonatele transformatei Fourier ale primei linii, adică

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{d-1} e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} c_n \quad \text{cu } k \in \{0, 1, \dots, d-1\},$$

iar vectorii proprii corespunzători sunt

$$v_k = {}^t \left(1, e^{-\frac{2\pi i}{d} k}, e^{-\frac{2\pi i}{d} 2k}, \dots, e^{-\frac{2\pi i}{d} (d-1)k} \right).$$

Demonstrație. Coordonata j a lui Cv_k este

$$(Cv_k)_j = \sum_{\ell=0}^{d-1} e^{-\frac{2\pi i}{d} k\ell} c_{d-j+\ell} = \sum_{n=0}^{d-1} e^{-\frac{2\pi i}{d} k(n+j)} c_n = \lambda_k e^{-\frac{2\pi i}{d} kj}.$$

3.14 Transformarea Fourier finită bidimensională

3.14.1 Fie $N_1, N_2 \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Dacă $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, atunci funcția

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(n_1, n_2) = e^{\frac{2\pi i}{N_1} k_1 n_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} k_2 n_2}, \quad (3.27)$$

este o funcție periodică cu perioadele $(N_1, 0)$ și $(0, N_2)$, adică

$$\varphi(n_1, n_2) = \varphi(n_1 + N_1, n_2) = \varphi(n_1, n_2 + N_2), \quad \forall (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \quad (3.28)$$

Dacă în (3.27) înlocuim k_1 cu $k_1 + N_1$ sau $k_2 + N_2$, atunci φ nu se schimbă.

Dintre funcțiile (3.27) doar $N_1 N_2$ sunt distincte și ele pot fi descrise utilizând clase de resturi ca fiind cele corespunzătoare lui $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$.

Un sistem de reprezentanți pentru $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$ este $\{0, \dots, N_1-1\} \times \{0, \dots, N_2-1\}$.

3.14.2 Funcțiile periodice

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele $(N_1, 0)$ și $(0, N_2)$ se pot identifica cu funcțiile

$$\varphi : \{0, 1, \dots, N_1-1\} \times \{0, 1, \dots, N_2-1\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

iar în cazul în care $N_1 = 2M_1 + 1$ și $N_2 = 2M_2 + 1$ sunt impare cu

$$\varphi : \{-M_1, -M_1+1, \dots, M_1\} \times \{-M_2, -M_2+1, \dots, M_2\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Din relația (3.28) rezultă că putem considera φ definită pe $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$, adică

$$\varphi : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.14.3 Teoremă.

Dacă $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ este periodică cu perioadele $(N_1, 0)$ și $(0, N_2)$, atunci

$$\begin{aligned} \varphi(n_1, n_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} k_1 m_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} k_2 m_2} \varphi(m_1, m_2), \\ \varphi(n_1, n_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k_1 m_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} k_2 m_2} \varphi(m_1, m_2). \end{aligned}$$

Demonstrație. Relațiile rezultă direct din teorema prezentată la pag. 160-4.

3.14.4 Definiție.

Transformata Fourier a funcției periodice

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

cu perioadele $(N_1, 0)$ și $(0, N_2)$ este funcția

$$F[\varphi] : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\varphi](k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} k_1 n_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

Transformata Fourier inversă a lui φ este funcția

$$F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F^{-1}[\varphi](k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k_1 n_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

3.14.5 Transformatele Fourier ale funcțiilor periodice cu perioadele $(N_1, 0)$ și $(0, N_2)$ sunt funcții periodice cu aceleași perioade,

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi \quad \text{și} \quad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi.$$

Astfel, transformata Fourier a funcției

$$\varphi : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcția $F[\varphi] : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$ definită prin relația

$$F[\varphi](k_1, k_2) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} k_1 n_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2),$$

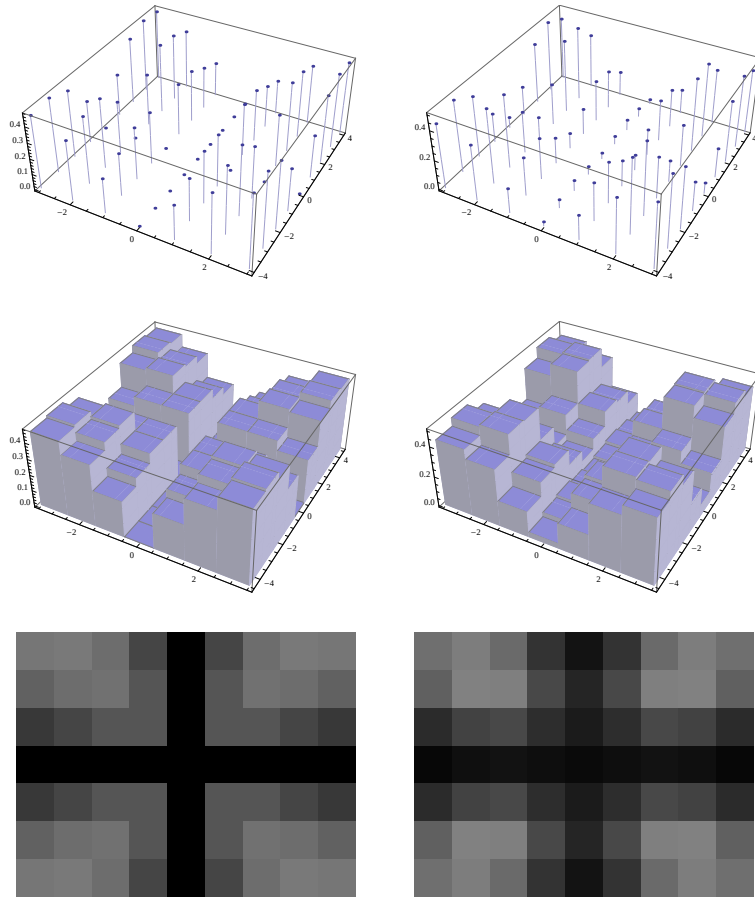


Figura 3.11: Funcțiile φ (stânga) și $\varphi_{2,2}$ (dreapta) în diverse reprezentări grafice.

iar transformata Fourier inversă funcția $F^{-1}[\varphi] : \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$F^{-1}[\varphi](k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} e^{\frac{2\pi i}{N_1} k_1 n_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} k_2 n_2} \varphi(n_1, n_2).$$

3.14.6 În cazul în care $N_1 = 2M_1 + 1$ și $N_2 = 2M_2 + 1$ sunt impare, din teorema prezentată la pag. 170-3 rezultă că

$$\begin{aligned}\varphi(n_1, n_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=-M_1}^{M_1} \sum_{k_2=-M_2}^{M_2} e^{\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} \\ &\quad \times \sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \sum_{m_2=-M_2}^{M_2} e^{-\frac{2\pi i}{N_1} k_1 m_1} e^{-\frac{2\pi i}{N_2} k_2 m_2} \varphi(m_1, m_2).\end{aligned}$$

Această relație, scrisă sub forma

$$\varphi(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-M_1}^{M_1} \sum_{k_2=-M_2}^{M_2} e^{\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} F[\varphi](k_1, k_2).$$

poate fi privită ca o reconstrucție a lui φ plecând de la valorile lui $F[\varphi]$.

Dacă L_1, L_2 sunt astfel încât $0 < L_1 < M_1$ și $0 < L_2 < M_2$, atunci funcția

$$\varphi_{L_1, L_2}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-L_1}^{L_1} \sum_{k_2=-L_2}^{L_2} e^{\frac{2\pi i}{N_1} n_1 k_1} e^{\frac{2\pi i}{N_2} n_2 k_2} F[\varphi](k_1, k_2)$$

este o aproximație a lui φ , obținută folosind doar $F[\varphi](k)$ cu $-L_i \leq k_i \leq L_i$.

Astfel de aproximații sunt utilizate pentru compresia datelor și prelucrarea imaginilor (eliminarea unor defecte).

3.14.7 În figura 3.11 prezentăm în diverse reprezentări grafice funcțiile

$$\varphi, \varphi_{2,2} : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \times \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definite prin

$$\varphi(n_1, n_2) = \frac{|n_1 n_2|}{n_1^2 + n_2^2 + 1}$$

și

$$\varphi_{2,2}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-2}^2 \sum_{k_2=-2}^2 e^{\frac{2\pi i}{7} n_1 k_1} e^{\frac{2\pi i}{9} n_2 k_2} F[\varphi](k_1, k_2),$$

unde

$$F[\varphi](k_1, k_2) = \frac{1}{12} \sum_{m_1=-3}^3 \sum_{m_2=-4}^4 e^{-\frac{2\pi i}{7} k_1 m_1} e^{-\frac{2\pi i}{9} k_2 m_2} \varphi(m_1, m_2).$$

3.14.8 MATHEMATICA: Programul utilizat pentru a obține Fig. 3.11

```

In[1]= M1 = 3; M2 = 4; N1 = 2 M1 + 1; N2 = 2 M2 + 1
f[n_, k_] := N[Abs[n k]/(n^2 + k^2 + 1)]
Ff[n_, k_] := N[(1/(N1 N2)) Sum[Exp[2 Pi I a n/N1]
Exp[2 Pi I b k/N2] f[a, b], {a,-M1, M1}, {b,-M2, M2}]]
g[n_, k_] := N[Re[Sum[Ff[a, b] Exp[-2 Pi I a n/N1]
Exp[-2 Pi I b k/N2], {a,-2,2}, {b,-2, 2}]]]
DiscretePlot3D[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}]
DiscretePlot3D[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}]
DiscretePlot3D[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}, ExtentSize -> Full]
DiscretePlot3D[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}, ExtentSize -> Full]
Image[Table[f[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}] ]
Image[Table[g[n, k], {n, -M1, M1}, {k, -M2, M2}] ]

```

3.15 Transformarea Fourier unitară

3.15.1 Din relațiile (3.15) și (3.15) rezultă că pentru transformarea Fourier, în afară de (3.20), se poate alege și *definiția ușor diferită*

$$F[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n). \quad (3.29)$$

În acest caz, transformarea inversă este

$$F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \varphi(n).$$

3.15.2 Transformarea Fourier (3.29) este o transformare unitară deoarece matricea

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}} & e^{-\frac{2\pi i}{N} 2} & \cdots & e^{-\frac{2\pi i}{N} (N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N} 2} & e^{-\frac{2\pi i}{N} 4} & \cdots & e^{-\frac{2\pi i}{N} 2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N} (N-1)} & e^{-\frac{2\pi i}{N} 2(N-1)} & \cdots & e^{-\frac{2\pi i}{N} (N-1)^2} \end{pmatrix}$$

a lui F în raport cu baza ortonormată $\{\delta, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1}\}$ este unitară

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} e^{-\frac{2\pi i}{N} mn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } k=m \text{ (modulo } N), \\ 0 & \text{dacă } k \neq m \text{ (modulo } N). \end{cases}$$

Prin urmare, în cazul *transformării Fourier unitare* (3.29), avem

$$F^{-1} = F^*.$$

3.15.3 În cazul $N=2$, transformata Fourier unitară a unei funcții

$$\varphi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

este funcția (v. pag. 161-8)

$$F[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} F[\varphi](0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0) + \varphi(1)), \\ F[\varphi](1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0) - \varphi(1)), \end{aligned}$$

și ea coincide cu transformata inversă

$$F^{-1}[\varphi] : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{aligned} F^{-1}[\varphi](0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0) + \varphi(1)), \\ F^{-1}[\varphi](1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(0) - \varphi(1)). \end{aligned}$$

3.15.4 Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert de dimensiune N și $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, \dots, |v_{N-1}\rangle\}$ o bază ortonormată în $\mathcal{H}$. Asociind vectorului

$$|x\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |v_n\rangle \langle v_n|x\rangle$$

funcția

$$\varphi : \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(n) = \langle v_n|x\rangle,$$

obținem o identificare a spațiului Hilbert $\mathcal{H}$ cu spațiul Hilbert al funcțiilor periodice cu perioada N . Prin această identificare, definiția (3.29) corespunde relației

$$\langle v_k|F|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \langle v_n|x\rangle.$$

Utilizând rezoluția identității

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle \langle v_k|,$$

obținem că

$$F|x\rangle = I F|x\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle \langle v_k|F|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} |v_k\rangle \langle v_n|x\rangle,$$

oricare ar fi $|x\rangle \in \mathcal{H}$, adică formula

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} |v_k\rangle \langle v_n|. \quad (3.30)$$

3.15.5 Din relația (3.30) rezultă

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k,n=0}^{N-1} \sum_{j,\ell=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} e^{-\frac{2\pi i}{N} j\ell} |v_k\rangle \langle v_n| v_j\rangle \langle v_\ell| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} n(k+\ell)} |v_k\rangle \langle v_\ell| = \sum_{k=0}^{N-1} |v_k\rangle \langle v_{-k}|. \end{aligned}$$

Deoarece

$$F^4 = \sum_{n,k=0}^{N-1} |v_n\rangle \langle v_{-n}| v_k\rangle \langle v_{-k}| = \sum_{n=0}^{N-1} |v_n\rangle \langle v_n| = I,$$

orice valoare proprie λ a lui F satisface relația

$$\lambda^4 = 1,$$

adică aparține mulțimii $\{1, -1, i, -i\}$. Pentru $N > 4$, toate cele patru numere sunt valori proprii și operatorii

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{4}(I + F + F^2 + F^3), & P_1 &= \frac{1}{4}(I + iF - F^2 - iF^3), \\ P_2 &= \frac{1}{4}(I - F + F^2 - F^3), & P_3 &= \frac{1}{4}(I - iF - F^2 + iF^3), \end{aligned}$$

care satisfac relațiile

$$P_k^* = P_k, \quad P_k P_\ell = \delta_{k\ell} P_k, \quad P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = I,$$

sunt proiectorii ortogonali corespunzători, adică

$$F P_k = (-i)^k P_k, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Transformarea Fourier F admite descompunerea spectrală

$$F = \sum_{k=0}^3 (-i)^k P_k = P_0 - iP_1 - P_2 + iP_3.$$

3.15.6* Polinoamele Hermite

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

verifică relațiile de recurență

$$H_{k+1}(x) - 2x H_k(x) + 2k H_{k-1}(x) = 0, \quad H'_k(x) = 2k H_{k-1}(x).$$

În cazul transformării Fourier continue

$$f \mapsto \mathcal{F}[f], \quad \text{unde} \quad \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx,$$

funcția Hermite-Gauss

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

este funcție proprie

$$\mathcal{F}[f_k] = (-i)^k f_k,$$

adică (v. [12], pag 194)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (-i)^k H_k(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

3.15.7* Plecând de la funcția periodică

$$\Phi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + x)\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + x)\right)^2}$$

cu perioada N , definim funcția

$$\phi_k : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_k(n) = \Phi_k(n).$$

3.15.8* Teoremă [20]. Pentru orice $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, funcția $\phi_k : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi_k(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + n)\right) e^{-\frac{\pi}{N}(\alpha N + n)^2}$$

este funcție proprie a transformării Fourier finite

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N} j n} \phi_k(n) = (-i)^k \phi_k(j),$$

adică

$$F[\phi_k] = (-i)^k \phi_k.$$

Demonstrație. Funcția periodică $\Phi_k(x)$ admite dezvoltarea în serie Fourier

$$\Phi_k(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} e^{\frac{2\pi i}{N} \ell x}$$

cu coeficienții

$$\begin{aligned} a_{\ell} &= \frac{1}{N} \int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N} \ell x} \Phi_k(x) dx \\ &= \frac{1}{N} \int_0^N e^{-\frac{2\pi i}{N} \ell x} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + x)\right)^2} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + x)\right) dx \end{aligned}$$

Notând $t = \sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + x)$ și utilizând formulele $H_k(-x) = (-1)^k H_k(x)$ și

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{2\pi N}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi N}} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

obținem relația

$$\begin{aligned} a_\ell &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{2\pi N}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{2\pi i}{N}\ell \left(t\sqrt{\frac{N}{2\pi}} - \alpha N\right)} e^{-\frac{1}{2}t^2} H_k(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha\sqrt{2\pi N}}^{(\alpha+1)\sqrt{2\pi N}} e^{-i\ell t\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} e^{-\frac{1}{2}t^2} H_k(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\ell t\sqrt{\frac{2\pi}{N}}} e^{-\frac{1}{2}t^2} H_k(t) dt \\ &= \frac{i^k}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}\ell^2} H_k\left(-\ell\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right) \\ &= \frac{(-i)^k}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\pi}{N}\ell^2} H_k\left(\ell\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right) \end{aligned}$$

care conduce la

$$\Phi_k(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell e^{\frac{2\pi i}{N}\ell x} = \frac{(-i)^k}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N}\ell x} e^{-\frac{\pi}{N}\ell^2} H_k\left(\ell\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right)$$

Din relația

$$\begin{aligned} \phi_k(j) &= \frac{(-i)^k}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N}j\ell} e^{-\frac{\pi}{N}\ell^2} H_k\left(\ell\sqrt{\frac{2\pi}{N}}\right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{N}j(\alpha N + n)} e^{-\frac{\pi}{N}(\alpha N + n)^2} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + n)\right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}jn} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{N}(\alpha N + n)^2} H_k\left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}}(\alpha N + n)\right) \\ &= (-i)^k \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}jn} \phi_k(n) \end{aligned}$$

obținută cu ajutorul egalității

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varphi(\ell) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha N + n)$$

rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i}{N}jn} \phi_k(n) = (-i)^k \phi_k(j), \quad \text{oricare ar fi } j \in \mathbb{Z}_N.$$

3.15.9 Deoarece spațiul Hilbert al funcțiilor de forma $\phi : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ este un spațiu de dimensiune N , dintre funcțiile ϕ_k cel mult N sunt liniar independente.

3.16 Elemente ale structurii unui spațiu Hilbert

3.16.1 Vom considera cazul unui spațiu Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensiune impară, $d=2s+1$, deși majoritatea rezultatelor prezentate sunt valabile și în cazul în care $\mathcal{H}$ are dimensiune pară. Spațiul $\mathcal{H}$ se poate identifica (utilizând o bază ortonormată) cu $\mathbb{C}^d$ și îl vom privi ca fiind spațiul tuturor funcțiilor de forma

$$\varphi : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \rightarrow \mathbb{C}$$

considerat cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n=-s}^s \overline{\varphi(n)} \psi(n).$$

3.16.2 Funcțiile $\{\delta_k\}_{k=-s}^s$, unde

$$\delta_k : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_k(n) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } k=n, \\ 0 & \text{dacă } k \neq n, \end{cases}$$

formează o bază ortonormată, numită *baza canonică* sau *baza computațională*. Scriind $|k\rangle$ în loc de δ_k avem

$$\langle k|\ell\rangle = \delta_{k\ell}, \quad \sum_{k=-s}^s |k\rangle\langle k| = I$$

și

$$|\varphi\rangle = I|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^s |k\rangle\langle k|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^s \varphi(k) |k\rangle.$$

3.16.3 În reprezentarea aleasă, transformarea Fourier directă este

$$F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d : \varphi \mapsto F[\varphi], \quad F[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} \varphi(n),$$

iar cea inversă

$$F^{-1} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d : \varphi \mapsto F^{-1}[\varphi], \quad F^{-1}[\varphi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}kn} \varphi(n).$$

Deoarece

$$F = IFI = \sum_{n,k=-s}^s |n\rangle\langle n|F|k\rangle\langle k| = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,k=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} |n\rangle\langle k|,$$

avem

$$F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,k=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} |n\rangle\langle k|,$$

$$F^{-1} = F^* = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,k=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}kn} |n\rangle\langle k|$$

și

$$F^2 = F^{*2} = \sum_{n=-s}^s |-n\rangle\langle n|, \quad F^2[\varphi](k) = \varphi(-k).$$

3.16.4 Funcțiile $\{|\tilde{k}\rangle\}_{k=-s}^s$, unde

$$|\tilde{k}\rangle = F^*|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}kn} |n\rangle,$$

formează o bază ortonormată și

$$\langle\tilde{k}| = \langle k|F = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} \langle n|.$$

În particular, avem

$$\langle\tilde{k}|\tilde{\ell}\rangle = \delta_{k\ell}, \quad \sum_{k=-s}^s |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}| = I$$

și deci

$$|\varphi\rangle = I|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^s |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^s |\tilde{k}\rangle\langle k|F|\varphi\rangle = \sum_{k=-s}^s F[\varphi](k) |\tilde{k}\rangle.$$

3.16.5 Funcțiile $\{|n\rangle\}_{n=-s}^s$ sunt funcții proprii ale operatorului autoadjunct

$$Q : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d : \varphi \mapsto Q\varphi, \quad (Q\varphi)(n) = n\varphi(n),$$

iar funcțiile $\{|\tilde{k}\rangle\}_{k=-s}^s$ sunt funcții proprii ale operatorului autoadjunct

$$P : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \quad P = F^*QF.$$

Avem

$$Q|n\rangle = n|n\rangle, \quad \text{oricare ar fi } n \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\},$$

$$P|\tilde{k}\rangle = k|\tilde{k}\rangle, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$$

și descompunerile spectrale

$$Q = \sum_{n=-s}^s n |n\rangle\langle n|, \quad P = \sum_{k=-s}^s k |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|.$$

3.16.6 Operatorii unitari

$$A = e^{-\frac{2\pi i}{d}P} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \quad A = \sum_{k=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}k} |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}|,$$

și

$$B = e^{\frac{2\pi i}{d}Q} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \quad B = \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}n} |n\rangle \langle n|,$$

verifică relațiile (adunarea se face modulo d)

$$\begin{aligned} A^\alpha |n\rangle &= |n+\alpha\rangle, & B^\beta |n\rangle &= e^{\frac{2\pi i}{d}n\beta} |n\rangle, \\ A^\alpha |\tilde{k}\rangle &= e^{-\frac{2\pi i}{d}k\alpha} |\tilde{k}\rangle, & B^\beta |\tilde{k}\rangle &= |\widetilde{k+\beta}\rangle, \\ (A^\alpha \varphi)(n) &= \varphi(n-\alpha), & (B^\beta \varphi)(n) &= e^{\frac{2\pi i}{d}n\beta} \varphi(n), \\ A^d &= B^d = I, & A^\alpha B^\beta &= e^{-\frac{2\pi i}{d}\alpha\beta} B^\beta A^\alpha, \end{aligned}$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathbb{C}^d$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Operatorii

$$D(\alpha, \beta) = e^{\frac{\pi i}{d}\alpha\beta} A^\alpha B^\beta \quad \text{cu} \quad \alpha, \beta \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\},$$

satisfăcând relația

$$D(\alpha, \beta) |\varphi\rangle = e^{-\frac{\pi i}{d}\alpha\beta} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}\beta n} \varphi(n-\alpha) |n\rangle,$$

definesc o reprezentare a unei versiuni finite a grupului Heisenberg-Weyl.

3.16.7 În cazul în care există, transformata Fourier a unei funcții $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ este

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Transformata Fourier a funcției gaussiene (v. Fig. 3.12)

$$g_\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_\kappa(x) = e^{-\frac{\kappa}{2}x^2},$$

unde $\kappa \in (0, \infty)$ este un parametru, este o funcție de aceeași formă

$$\mathcal{F}[g_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} g_{\frac{1}{\kappa}}.$$

Utilizând metodele de la pag. 176-8 se poate arăta că funcțiile (v. Fig. 3.12)

$$\mathbf{g}_\kappa : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}_\kappa(n) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\kappa\pi}{d}(\alpha d+n)^2},$$

verifică relația similară

$$F[\mathbf{g}_\kappa] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \mathbf{g}_{\frac{1}{\kappa}}.$$

Funcțiile $\mathbf{g}_\kappa$ pot fi privite ca versiuni finite ale funcțiilor gaussiene g_κ .

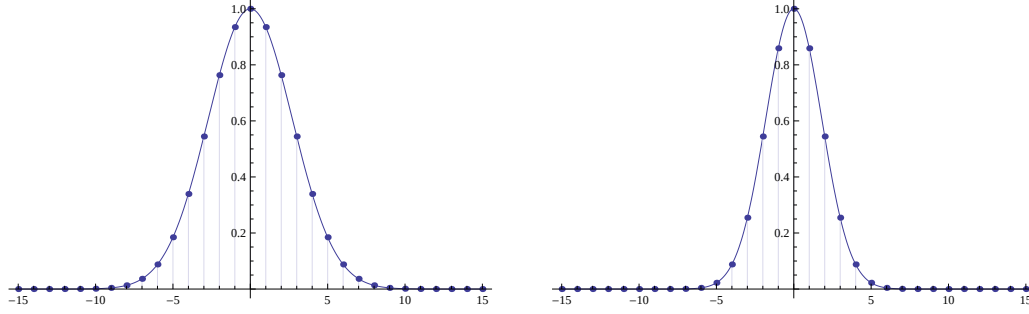


Figura 3.12: Funcțiile $g_{2/3}$, $\mathbf{g}_{2/3}$ (stânga) și $g_{3/2}$, $\mathbf{g}_{3/2}$ (dreapta) în cazul $d=31$.

3.16.8 Funcția $\mathbf{g}_1$, cu proprietatea $F[\mathbf{g}_1] = \mathbf{g}_1$, este un analog finit al gaussienei $g_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, iar funcția normată (v. Fig. 3.13)

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{g}_1}{\|\mathbf{g}_1\|}, \quad \text{unde } \|\mathbf{g}_1\|^2 = \sum_{n=-s}^s (\mathbf{g}_1(n))^2,$$

este un analog finit al gaussienei normate $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Distribuția binomială

$$b: \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b(n) = C_{2s}^{s+n}$$

poate și ea fi privită ca un analog finit al gaussienei $g_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ deși

$$\begin{aligned} F[b](k) &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} C_{2s}^{s+n} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{2s} C_{2s}^j e^{-\frac{2\pi i}{d}k(j-s)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} e^{\frac{2\pi i}{d}ks} \left(1 + e^{-\frac{2\pi i}{d}k}\right)^{2s} = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(e^{\frac{\pi i}{d}k} + e^{-\frac{\pi i}{d}k}\right)^{2s} = \frac{4^s}{\sqrt{d}} \cos^{2s} \frac{k\pi}{d}. \end{aligned}$$

Distribuția binomială normată (v. Fig. 3.13)

$$\mathbf{b} = \frac{b}{\|b\|}, \quad \text{unde } \|\mathbf{b}\|^2 = \sum_{n=-s}^s (C_{2s}^{s+n})^2 = \sum_{j=0}^{2s} (C_{2s}^j)^2 = C_{4s}^{2s},$$

este un alt analog finit al gaussienei normate $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

3.16.9 Sistemele de d^2 vectori $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$ și $\{|\alpha, \beta\rangle\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$, unde

$$\begin{aligned} |\alpha, \beta\rangle &= D(\alpha, \beta)|\mathbf{g}\rangle = e^{-\frac{\pi i}{d}\alpha\beta} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}\beta n} \mathbf{g}(n-\alpha)|n\rangle, \\ |\alpha, \beta\rangle\rangle &= D(\alpha, \beta)|\mathbf{b}\rangle = e^{-\frac{\pi i}{d}\alpha\beta} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d}\beta n} \mathbf{b}(n-\alpha)|n\rangle, \end{aligned}$$

sunt frame-uri exacte în $\mathbb{C}^d$ deoarece

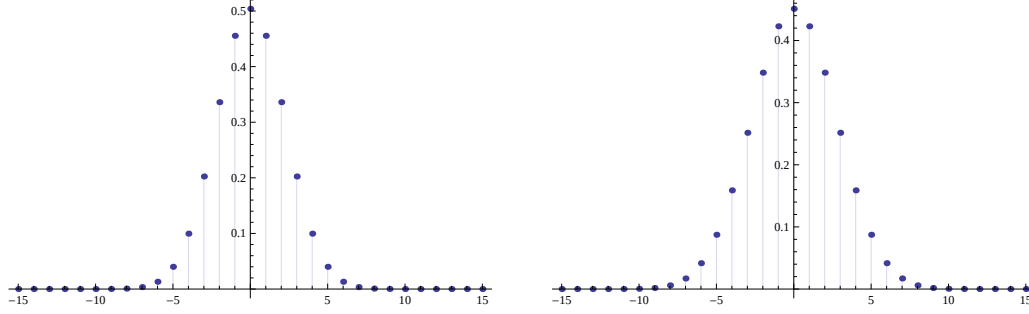


Figura 3.13: Gaussienele finite **g** (stânga) și **b** (dreapta) în cazul $d = 31$.

$$\frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s |\alpha, \beta\rangle \langle \alpha, \beta| = I \quad \text{și} \quad \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s |\alpha, \beta\rangle \langle\langle \alpha, \beta| = I.$$

Ele pot fi privite ca versiuni finite ale sistemului de stări coerente standard $\{|q, p\rangle\}$ din $L^2(\mathbb{R})$ (v. pag. 123-10).

3.16.10 Utilizând frame-ul $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$, putem asocia fiecărei funcții

$$f: \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

operatorul liniar

$$A_f: \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \quad A_f = \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s f(\alpha, \beta) |\alpha, \beta\rangle \langle \alpha, \beta|.$$

Invers, fiecărui operator liniar $A: \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ îi putem asocia funcția

$$f_A: \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definită prin formula

$$f_A(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta | A | \alpha, \beta \rangle.$$

Correspondențe similare între funcții și operatori liniari se pot defini utilizând

frame-ul $\{|\alpha, \beta\rangle\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$.

3.16.11 Unei funcții

$$\varphi: \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

i se poate asocia *funcția Wigner discretă*

$$W_\varphi : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită prin

$$W_\varphi(n, m) = \frac{1}{d} \sum_{k=-s}^s e^{\frac{4\pi i}{d}mk} \varphi(n-k) \overline{\varphi(n+k)}.$$

3.16.12 Se știe că funcția Γ a lui Euler permite o prelungire a funcției factorial

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{oricare ar fi } n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

și că

$$\lim_{x \rightarrow n} |\Gamma(x)| = \infty, \quad \text{oricare ar fi } n \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}.$$

Admițând că

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = 0 \quad \text{pentru } n \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

obținem o definiție extinsă pentru coeficienții binomiali

$$C_n^k = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{dacă } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \\ 0 & \text{dacă } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n\}. \end{cases}$$

3.16.13 Dacă $n, m \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$, atunci coeficientul lui X^{s+m} din polinomul $(1+X)^{s-n}(1-X)^{s+n}$ este

$$K_m(n) = \sum_{k=0}^{s+m} (-1)^k C_{s+n}^k C_{s-n}^{s+m-k},$$

adică avem

$$(1-X)^{s+n}(1+X)^{s-n} = \sum_{m=-s}^s K_m(n) X^{s+m}.$$

Polinoamele $K_m(X)$ se numesc *polinoame Kravchuk*.

3.16.14 Teoremă. *Funcțiile polinomiale* $K_m : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$K_m(n) = \sum_{k=0}^{s+m} (-1)^k C_{s+n}^k C_{s-n}^{s+m-k}$$

verifică relația

$$\sum_{n=-s}^s C_{2s}^{s+n} K_m(n) K_\ell(n) = 4^s C_{2s}^{s+m} \delta_{m\ell}, \quad (3.31)$$

oricare ar fi $m, \ell \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$.

Demonstrație. Polinomul de două variabile

$$P(X, Y) = \sum_{m=-s}^s \sum_{\ell=-s}^s \left(\sum_{n=-s}^s C_{2s}^{s+n} K_m(n) K_\ell(n) \right) X^{s+m} Y^{s+\ell}$$

se mai poate scrie

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= \sum_{n=-s}^s C_{2s}^{s+n} \sum_{m=-s}^s K_m(n) X^{s+m} \sum_{\ell=-s}^s K_\ell(n) X^{s+\ell} \\ &= \sum_{n=-s}^s C_{2s}^{s+n} (1-X)^{s+n} (1+X)^{s-n} (1-Y)^{s+n} (1+Y)^{s-n} \\ &= [(1-X)(1-Y) + (1+X)(1+Y)]^{2s} = 4^s (1+XY)^{2s} \\ &= 4^s \sum_{m=-s}^s C_{2s}^{s+m} X^{s+m} Y^{s+m}. \end{aligned}$$

3.16.15* Se știe că funcția hipergeometrică

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (3.32)$$

unde

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)},$$

verifică relația

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma-\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n) \Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \beta \\ \beta-\gamma-n+1 \end{matrix} \middle| 1-z \right).$$

Utilizând această relație obținem egalitatea

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ 1-n-m \end{matrix} \middle| -1 \right) = \frac{\Gamma(1-n-m) \Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-n+1) \Gamma(s-m+1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right).$$

Deoarece

$$(-\alpha)_k = (-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+k-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

relația anterioară se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{s+m} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(s+m+1)}{\Gamma(s+m-k+1)} \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+n-k+1)} \frac{\Gamma(1-m-n)}{\Gamma(1-m-n+k)} \\ = \frac{\Gamma(1-n-m) \Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-n+1) \Gamma(s-m+1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right) \end{aligned}$$

sau sub forma

$$\sum_{k=0}^{s+m} (-1)^k \frac{\Gamma(s+n+1)}{k! \Gamma(s+n-k+1)} \frac{\Gamma(s-m+1)}{\Gamma(s+m-k+1) \Gamma(1-m-n+k)} = \frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s+m+1) \Gamma(s-m+1)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right),$$

echivalentă cu

$$\sum_{k=0}^{s+m} (-1)^k C_{s+n}^k C_{s-n}^{s+m-k} = C_{2s}^{s+m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right),$$

adică cu

$$K_m(n) = C_{2s}^{s+m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right) \quad (3.33)$$

3.16.16 Din relațiile (3.31), (3.32) și (3.33) rezultă că *funcțiile Kravchuk*

$$\mathcal{K}_m(n) = \frac{1}{2^s} \sqrt{C_{2s}^{s+m} C_{2s}^{s+n}} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -s-m, -s-n \\ -2s \end{matrix} \middle| 2 \right)$$

formează o bază ortonormată în $\mathbb{C}^d$

$$\sum_{n=-s}^s \mathcal{K}_m(n) \mathcal{K}_\ell(n) = \delta_{m\ell}$$

și în plus

$$\mathcal{K}_m(n) = \mathcal{K}_n(m), \quad (3.34)$$

oricare ar fi $n, m \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$. Scriind $|\hat{m}\rangle$ în loc de $\mathcal{K}_m$ avem

$$\langle \hat{m} | \hat{\ell} \rangle = \delta_{m\ell} \quad \text{și} \quad \sum_{m=-s}^s |\hat{m}\rangle \langle \hat{m}| = I.$$

3.16.17 Transformarea unitară

$$K : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d, \quad K|n\rangle = \sum_{m=-s}^s \mathcal{K}_n(m) |m\rangle,$$

este numită *transformare Kravchuk*. Din relația (3.34) rezultă că

$$K^* = K \quad \text{și prin urmare} \quad K^2 = I.$$

3.16.18 În concluzie, printre “uneltele” matematice disponibile în cazul unui spațiu Hilbert de dimensiune impară $d=2s+1$ se află:

- transformările unitare Fourier și Kravchuk;
- bazele ortonormate $\{|n\rangle\}_{n=-s}^s$, $|\tilde{n}\rangle\}_{n=-s}^s$, $|\hat{n}\rangle\}_{n=-s}^s$;

- operatorii autoadjuncți Q și P ;
- transformările unitare $A = e^{-\frac{2\pi i}{d}P}$ și $B = e^{\frac{2\pi i}{d}Q}$;
- utilizarea funcției Wigner $\varphi \mapsto W_\varphi$;
- gaussienele finite $\mathbf{g}$ și $\mathbf{b}$;
- frame-urile exacte $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$ și $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$;
- metoda de cuantificare $f \mapsto A_f$;
- metoda de decuantificare $A \mapsto f_A$.
- reprezentări liniare ale algebrelor Lie $su(2)$, $o(3)$, $sl(2, \mathbb{C})$;
- reprezentări liniare ireductibile ale grupurilor $SO(3)$ și $SU(2)$;
- un frame infinit (spin coherent states, în engleză) definit cu ajutorul reprezentărilor liniare ireductibile ale lui $SO(3)$ sau $SU(2)$ (v. [28]).

3.17 Produs tensorial de spații Hilbert

3.17.1 Fie $\mathcal{H}$ și $\mathcal{K}$ două spații Hilbert. Orice element $\Phi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ este de forma

$$\Phi = \sum_i x_i \otimes y_i \quad \text{cu} \quad x_i \in \mathcal{H}, \quad y_i \in \mathcal{K},$$

iar relația

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes y_i, \sum_j x'_j \otimes y'_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, x'_j \rangle \langle y_i, y'_j \rangle$$

definește un produs scalar în $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Astfel, produsul tensorial a două spații Hilbert este un spațiu Hilbert.

3.17.2 Dacă $\mathfrak{B}_{\mathcal{H}} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ sunt baze ortonormate în $\mathcal{H}$ și respectiv $\mathcal{K}$, atunci

$$\langle v_i \otimes w_j, v_k \otimes w_\ell \rangle = \langle v_i, v_k \rangle \langle w_j, w_\ell \rangle = \delta_{ik} \delta_{j\ell}$$

și prin urmare

$$\mathfrak{B} = \{ v_i \otimes w_j \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

este bază ortonormată în $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

3.17.3 Utilizând notația comprimată

$$|v_i w_j\rangle = |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$$

relațiile de completitudine și ortogonalitate se scriu

$$\sum_{i,j} |v_i w_j\rangle \langle v_i w_j| = I, \quad \langle v_i w_j | v_k w_\ell \rangle = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Oricare ar fi $\Phi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, avem

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j} |v_i w_j\rangle \langle v_i w_j | \Phi \rangle,$$

adică $|\Phi\rangle$ admite reprezentarea

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij} |v_i w_j\rangle \quad \text{cu} \quad \Phi^{ij} = \langle v_i w_j | \Phi \rangle.$$

Produsul scalar a două elemente $\Phi, \Psi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ se poate scrie sub forma

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,j} \langle \Phi | v_i w_j \rangle \langle v_i w_j | \Psi \rangle = \sum_{i,j} \overline{\Phi^{ij}} \Psi^{ij}.$$

3.17.4 Utilizând baza computațională $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ (vectorii sunt enumerați în ordine lexicografică), un element $\Phi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ se poate reprezenta sub forma

$$\Phi = \Phi^{00} |00\rangle + \Phi^{01} |01\rangle + \Phi^{10} |10\rangle + \Phi^{11} |11\rangle$$

și lui i se pot asocia matricele

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{00} & \Phi^{01} \\ \Phi^{10} & \Phi^{11} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{00} \\ \Phi^{01} \\ \Phi^{10} \\ \Phi^{11} \end{pmatrix}.$$

Produsul scalar a două elemente $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, adică

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,j=0}^1 \overline{\Phi^{ij}} \Psi^{ij} = \overline{\Phi^{00}} \Psi^{00} + \overline{\Phi^{01}} \Psi^{01} + \overline{\Phi^{10}} \Psi^{10} + \overline{\Phi^{11}} \Psi^{11}$$

se mai poate scrie sub forma

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \text{tr}(\Phi^* \Psi) = \text{tr} \begin{pmatrix} \overline{\Phi^{00}} & \overline{\Phi^{10}} \\ \overline{\Phi^{01}} & \overline{\Phi^{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{00} & \Psi^{01} \\ \Psi^{10} & \Psi^{11} \end{pmatrix}$$

sau sub forma

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \Phi^* \Psi = \begin{pmatrix} \overline{\Phi^{00}} & \overline{\Phi^{01}} & \overline{\Phi^{10}} & \overline{\Phi^{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{00} \\ \Psi^{01} \\ \Psi^{10} \\ \Psi^{11} \end{pmatrix}.$$

3.17.5 Produsul tensorial a doi operatori $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ și $B: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ este operatorul

$$A \otimes B: \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K},$$

definit prin

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By)$$

pentru elementele de forma $x \otimes y$ și extins prin linearitate la $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

3.17.6 Dacă $A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $B: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ sunt operatori liniari, $|a\rangle \in \mathcal{H}$, $|b\rangle \in \mathcal{K}$ sunt vectori proprii corespunzători valorilor proprii a , b , adică

$$A|a\rangle = a|a\rangle \quad \text{și} \quad B|b\rangle = b|b\rangle,$$

atunci

$$(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = ab(|a\rangle \otimes |b\rangle)$$

și

$$(A \otimes I + I \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (a+b)(|a\rangle \otimes |b\rangle),$$

adică ab este valoare proprie a operatorului $A \otimes B$, iar $a+b$ este valoare proprie a operatorului $A \otimes I + I \otimes B$.

3.17.7 Propoziție. Dacă $A: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ și $B: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ sunt operatori liniari definiți pe spațiile Hilbert $\mathcal{H}$ și $\mathcal{K}$, atunci

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*.$$

Demonstrație. Din relațiile $\langle (A \otimes B)(x \otimes y), z \otimes u \rangle = \langle x \otimes y, (A \otimes B)^*(z \otimes u) \rangle$ și

$$\begin{aligned} \langle (A \otimes B)(x \otimes y), z \otimes u \rangle &= \langle (Ax) \otimes (By), z \otimes u \rangle = \langle Ax, z \rangle \langle By, u \rangle \\ &= \langle x, A^*z \rangle \langle y, B^*u \rangle = \langle x \otimes y, (A^*z) \otimes (B^*u) \rangle \\ &= \langle x \otimes y, (A^* \otimes B^*)(z \otimes u) \rangle \end{aligned}$$

verificate oricare ar fi $x, z \in \mathcal{H}$ și $y, u \in \mathcal{K}$, rezultă

$$(A \otimes B)^*(z \otimes u) = (A^* \otimes B^*)(z \otimes u), \quad \text{oricare ar fi } z \in \mathcal{H} \text{ și } u \in \mathcal{K},$$

și prin urmare $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

3.17.8 Teoremă. *Produsul tensorial a doi operatori autoadjuncți este autoadjunct.
Produsul tensorial a doi operatori unitari este operator unitar.
Produsul tensorial a doi operatori pozitivi este operator pozitiv.
Produsul tensorial a doi proiectori este projector.*

Demonstrație. Afirmațiile din enunț pot fi verificate folosind propoziția anterioară. Alternativ, se pot utiliza rezultatele prezentate la pag. 35-8, pag. 36-10 și pag. 95-22.

3.17.9 Teoremă (Existența și unicitatea urmelor parțiale).

Pentru orice $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ există $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ și $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ astfel încât

$$\operatorname{tr}((A \otimes I)T) = \operatorname{tr}(AX), \quad \text{oricare ar fi } A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

$$\operatorname{tr}((I \otimes B)T) = \operatorname{tr}(BY), \quad \text{oricare ar fi } B \in \mathcal{L}(\mathcal{K}),$$
și ei sunt unic determinați.

Demonstrație. Pentru forma liniară

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C} : A \mapsto \operatorname{tr}((A \otimes I)T)$$

definită pe spațiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ există $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ astfel încât (v. pag. 116-2)

$$\operatorname{tr}((A \otimes I)T) = \langle X^*, A \rangle, \quad \text{oricare ar fi } A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Dar, $\langle X^*, A \rangle = \operatorname{tr}(XA)$. Demonstrația existenței și unicității lui Y este similară.

3.17.10 Definiție. *Urmele parțiale* ale unui operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ sunt operatorul liniar $\operatorname{tr}_1 T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ care verifică relația

$$\operatorname{tr}((I \otimes B)T) = \operatorname{tr}(B \operatorname{tr}_1 T), \quad \text{oricare ar fi } B \in \mathcal{L}(\mathcal{K}),$$

și operatorul liniar $\operatorname{tr}_2 T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ care verifică relația

$$\operatorname{tr}((A \otimes I)T) = \operatorname{tr}(A \operatorname{tr}_2 T), \quad \text{oricare ar fi } A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

3.17.11 Formele liniare

$$\langle v_i w_j | = \langle v_i | \otimes \langle w_j | = v^i \otimes w^j$$

formează baza duală a spațiului $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})^*$ deoarece

$$\langle v_i w_j | v_k w_\ell \rangle = \langle v_i | v_k \rangle \langle w_j w_\ell \rangle = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Elementele matricei unui operator

$$T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

în baza $\{ |v_i w_j\rangle \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m\} \}$ sunt

$$T_{k\ell}^{ij} = \langle v_i w_j | T | v_k w_\ell \rangle.$$

3.17.12 Teoremă. Urmele parțiale ale lui $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ sunt operatorii

$$\text{tr}_1 T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} \quad \text{cu elementele matriceale} \quad \langle w_j | \text{tr}_1 T | w_\ell \rangle = \sum_{i=1}^n T_{i\ell}^{ij},$$

$$\text{tr}_2 T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{cu elementele matriceale} \quad \langle v_i | \text{tr}_2 T | v_k \rangle = \sum_{j=1}^m T_{kj}^{ij}.$$

Demonstrație. A se vedea pag. 38-17.

3.17.13 Definiție. Transpușii parțiali ai lui $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ sunt operatorii

$${}^t_1 T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \quad \text{cu elementele matriceale} \quad {}^t_1 T_{k\ell}^{ij} = T_{i\ell}^{kj},$$

$${}^t_2 T : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \quad \text{cu elementele matriceale} \quad {}^t_2 T_{k\ell}^{ij} = T_{kj}^{i\ell}.$$

3.17.14 Teoremă. Dacă $|\Phi\rangle = \Phi^{ij} |v_i w_j\rangle$ este un element al spațiului $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ și

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix}$$

este matricea corespunzătoare, atunci

$$\text{tr}_1 |\Phi\rangle\langle\Phi| = \overline{\Phi^* \Phi} \quad \text{și} \quad \text{tr}_2 |\Phi\rangle\langle\Phi| = \Phi \Phi^*.$$

Demonstrație. Avem

$$\langle w_j | (\text{tr}_1 |\Phi\rangle\langle\Phi|) | w_\ell \rangle = \sum_{i=1}^n (|\Phi\rangle\langle\Phi|)_{i\ell}^{ij} = \sum_{i=1}^n \Phi^{ij} \bar{\Phi}^{i\ell} = \overline{(\Phi^* \Phi)_\ell^j},$$

$$\langle v_i | (\text{tr}_2 |\Phi\rangle\langle\Phi|) | v_k \rangle = \sum_{j=1}^m (|\Phi\rangle\langle\Phi|)_{kj}^{ij} = \sum_{j=1}^m \Phi^{ij} \bar{\Phi}^{kj} = (\Phi \Phi^*)_k^i.$$

3.17.15 Pentru $|\Phi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, numărul coeficienților nenuli dintr-o reprezentare

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$$

depinde de bazele alese. El nu poate fi mai mic decât rangul Schmidt

$$r = \text{rang} \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \dots & \Phi^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi^{n1} & \dots & \Phi^{nm} \end{pmatrix}.$$

3.17.16 Teoremă (descompunerea Schmidt). *Dacă r este rangul Schmidt al lui*

$|\Phi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, *atunci există numerele $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ și două baze ortonormate $\{|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ în $\mathcal{H}$ și $\{|b_1\rangle, \dots, |b_m\rangle\}$ în $\mathcal{K}$ astfel încât*

$$|\Phi\rangle = \sum_{k=1}^r \sqrt{\mu_k} |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle.$$

Demonstrație. Fie $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ o bază în $\mathcal{H}$, $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$ o bază în $\mathcal{K}$ și fie

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle.$$

Operatorul autoadjunct

$$\text{tr}_2 |\Phi\rangle \langle \Phi| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \text{tr}_2 |\Phi\rangle \langle \Phi| = \sum_j \Phi^{ij} \bar{\Phi}^{\ell j} |v_i\rangle \langle v_\ell|,$$

este diagonalizabil și pozitiv

$$\langle x | (\text{tr}_2 |\Phi\rangle \langle \Phi|) | x \rangle = \sum_j \Phi^{ij} \bar{\Phi}^{\ell j} \langle x | v_i \rangle \langle v_\ell | x \rangle = \sum_j |\Phi^{ij} \langle x | v_i \rangle|^2 \geq 0.$$

Dacă $\{|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ este baza ortonormată în $\mathcal{H}$ formată de vectorii proprii ai operatorului $\text{tr}_2 |\Phi\rangle \langle \Phi|$ și dacă $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ sunt valorile proprii corespunzătoare acestor vectori, atunci

$$\text{tr}_2 |\Phi\rangle \langle \Phi| = \sum_{k=1}^n \mu_k |a_k\rangle \langle a_k|.$$

Fie r' astfel încât $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{r'} > 0 = \mu_{r'+1} = \dots = \mu_n$. Punând $|v_i\rangle = c_i^k |a_k\rangle$, obținem relația

$$\sum_j \Phi^{ij} \bar{\Phi}^{\ell j} c_i^k \bar{c}_\ell^s |a_k\rangle \langle a_s| = \sum_{k=1}^n \mu_k |a_k\rangle \langle a_k|,$$

posibilă numai dacă

$$\sum_j \Phi^{ij} \bar{\Phi}^{\ell j} c_i^k \bar{c}_\ell^s = \mu_k \delta_{ks}.$$

Din această relație rezultă că $\{|b_1\rangle, \dots, |b_{r'}\rangle\}$, unde

$$|b_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \Phi^{ij} c_i^k |w_j\rangle,$$

este un sistem ortonormat și

$$\Phi^{ij} c_i^k |w_j\rangle = 0, \quad \text{pentru } k \in \{r'+1, \dots, n\}.$$

Sistemul $\{|b_1\rangle, \dots, |b_{r'}\rangle\}$ poate fi extins până la o bază ortonormată $\{|b_1\rangle, \dots, |b_m\rangle\}$ și avem

$$|\Phi\rangle = \Phi^{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle = \Phi^{ij} c_i^k |a_k\rangle \otimes |w_j\rangle = \sum_{k=1}^{r'} \sqrt{\mu_k} |a_k\rangle \otimes |b_k\rangle$$

cu $r' = r$ deoarece rangul Schmidt este independent de baza utilizată.

Capitolul 4

Forme pătratice

4.1 Definiție și exemple

4.1.1 Definiție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$, unde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Prin *formă biliniară* se înțelege o aplicație

$$g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

astfel încât

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha g(x, z) + \beta g(y, z) \\ g(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha g(x, y) + \beta g(x, z) \end{aligned} \quad \forall x, y, z \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

4.1.2 Alegând o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și utilizând reprezentările

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

ale vectorilor x și y obținem

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j g(e_i, e_j) \\ &= (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

4.1.3 Definiție Fie $g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă biliniară și $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bază în $\mathcal{V}$.

Matricea

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(e_1, e_1) & g(e_1, e_2) & \cdots & g(e_1, e_n) \\ g(e_2, e_1) & g(e_2, e_2) & \cdots & g(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(e_n, e_1) & g(e_n, e_2) & \cdots & g(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

se numește *matricea lui g* în raport cu baza $\mathcal{B}$.

4.1.4 Propoziție. Fie $g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă biliniară, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ două baze în $\mathcal{V}$ și S matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Dacă $\mathcal{G}$ este matricea lui g în raport cu $\mathcal{B}$ și $\mathcal{G}'$ este matricea lui g în raport cu baza $\mathcal{B}'$, atunci

$$\mathcal{G}' = {}^t S \mathcal{G} S. \quad (4.1)$$

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, $e'_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} e_j$, adică

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

și fie $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $g'_{ij} = g(e'_i, e'_j)$. Avem

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= g(e'_i, e'_j) = g\left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} e_k, \sum_{m=1}^n \alpha_{mj} e_m\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{mj} g(e_k, e_m) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{ki} g_{km} \alpha_{mj}, \end{aligned}$$

relație echivalentă cu (4.1).

4.1.5 Expresia în coordonate

$$g'_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{mj} g_{km}$$

a relației $\mathcal{G}' = {}^t S \mathcal{G} S$, obținută în demonstrația propoziției, ne arată că orice formă biliniară este un tensor de tip $(0, 2)$.

4.1.6 Definiție. Spunem că forma biliniară

$$g: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este o *formă biliniară simetrică* dacă

$$g(x, y) = g(y, x), \quad \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

4.1.7 Definiție. O aplicație

$$Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

este numită *formă pătratică* dacă există o formă biliniară simetrică

$$g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

astfel încât

$$Q(x) = g(x, x), \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

4.1.8 Propoziție. Fiecărei forme pătratrice $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ îi corespunde o singură formă biliniară simetrică $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât

$$Q(x) = g(x, x), \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Demonstrație. Din relația

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= g(x+y, x+y) \\ &= g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y) \\ &= Q(x) + Q(y) + 2g(x, y) \end{aligned}$$

rezultă

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right), \quad \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

4.1.9 Dacă $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ este o formă pătratrică și $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ forma biliniară simetrică asociată, atunci alegând o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ obținem relația

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i x_j = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ și $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt coordonatele lui x în baza aleasă.

4.1.10 Definiție. Matricea unei forme pătratrice în raport cu o bază este matricea formei biliniare simetrice asociate în raport cu acea bază.

4.1.11 Aplicația

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

este o formă pătratrică deoarece există forma biliniară simetrică

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$-x_1 y_2 - x_2 y_1 - 2x_1 y_3 - 2x_3 y_1$$

astfel încât $Q(x_1, x_2, x_3) = g((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3))$.

4.2 Reducerea la forma canonică

4.2.1 Matricea unei forme pătratice depinde de baza aleasă. În aplicații, este avantajosă utilizarea unei baze în raport cu care expresia în coordonate a formei pătratice să fie cât mai simplă.

4.2.2 Definiție. Spunem că forma pătratică $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ are în raport cu baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *forma canonică* dacă matricea lui Q în raport cu această bază este o matrice diagonală

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

adică, expresia în coordonate a formei Q în raport cu această bază este de forma

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

4.2.3 Expresia “forma pătratică $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ are în raport cu baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ forma canonică” trebuie înțeleasă în sensul “funcția $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ are în raport cu baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ expresia cea mai simplă.”

4.2.4 Teoremă (Gauss). *Orice formă pătratică poate fi redusă la forma canonică, adică, pentru orice formă pătratică $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, există o bază în raport cu care expresia lui Q are forma*

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Demonstrație. Baza căutată poate fi obținută în toate cazurile utilizând metoda prezentată în rezolvările următoarelor două exerciții.

4.2.5 Exercițiu. Să se reducă la forma canonică forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

indicând și baza utilizată.

Rezolvare. Deoarece

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1),$$

numerele x_1, x_2, x_3 pot fi privite ca fiind coordonatele vectorului $x \in \mathbb{R}^3$ în raport cu baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Grupând într-un pătrat termenii care conțin pe x_1 , și apoi pe cei care conțin pe x_2 , obținem relația

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 5x_3^2 \\ &= x_1'^2 + 2x_2'^2 - 5x_3'^2 \end{aligned}$$

care ne sugerează necesitatea de a căuta o bază $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ astfel încât coordonatele x'_1, x'_2, x'_3 în raport cu baza căutată $\mathcal{B}'$ să se exprime cu ajutorul coordonatelor x_1, x_2, x_3 în raport cu baza canonică $\mathcal{B}$ prin relațiile

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x'_2 = x_2 - x_3 \\ x'_3 = x_3. \end{cases} \quad (4.2)$$

Determinarea bazei $\mathcal{B}'$ este echivalentă cu găsirea matricei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Relațiile $e'_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij}e_i$ și $x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i = \sum_{j=1}^3 x'_j e'_j$ conduc la relația

$$\sum_{i=1}^3 x_i e_i = \sum_{j=1}^3 x'_j e'_j = \sum_{j=1}^3 x'_j \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x'_j \right) e_i,$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_{13} x'_3 \\ x_2 = \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_{23} x'_3 \\ x_3 = \alpha_{31} x'_1 + \alpha_{32} x'_2 + \alpha_{33} x'_3. \end{cases}$$

Numerele α_{ij} pot fi imediat identificate dacă, folosind relațiile (4.2), exprimăm x_1, x_2, x_3 cu ajutorul coordonatelor x'_1, x'_2, x'_3

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + 3x'_3 \\ x_2 = x'_2 + x'_3 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

Se obține

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce conduce la $\mathcal{B}' = \{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (1, 1, 0), e'_3 = (3, 1, 1)\}$. În raport cu această bază Q are forma canonică

$$Q(x) = x_1'^2 + 2x_2'^2 - 5x_3'^2.$$

4.2.6 Exercițiu. Să se reducă la forma canonică forma pătratică

$$Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

indicând și baza utilizată.

Rezolvare. Efectuăm mai întâi schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

care conduce la

$$Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + 2x'_1x'_3,$$

și apoi utilizăm metoda folosită în exercițiul anterior. Se obține

$$Q(x) = (x'_1 + x'_3)^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2,$$

unde

$$\begin{cases} x_1'' = x'_1 + x'_3 \\ x_2'' = x'_2 \\ x_3'' = x'_3. \end{cases}$$

Exprimând coordonatele inițiale x_1, x_2, x_3 în funcție de cele finale x_1'', x_2'', x_3'' ,

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'' \\ x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'' \\ x_3 = x_3'', \end{cases}$$

rezultă ca matricea de trecere între baza inițială $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ și baza finală $\mathcal{B}'' = \{e_1'', e_2'', e_3''\}$ este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce conduce la $\mathcal{B}'' = \{e_1'' = (1, 1, 0), e_2'' = (1, -1, 0), e_3'' = (-1, -1, 1)\}$. În raport cu această bază, Q are forma canonică

$$Q(x) = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$$

Teoremă.(Jacobi) Fie $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă pătratică și fie

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea ei în raport cu o bază $\mathcal{B}$. Dacă

$$\Delta_1 = g_{11} \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

.....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci există o bază $\mathcal{B}'$ în raport cu care Q are expresia

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și fie $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ forma biliniară simetrică corespunzătoare lui Q . Arătăm că există o bază $\mathcal{B}'$ formată din vectori de forma

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \alpha_{11}e_1 \\
e'_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\
&\dots\dots\dots \\
e'_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n
\end{aligned}$$

satisfăcând pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ relațiile

$$\begin{cases} g(e'_j, e_1) = 0 \\ g(e'_j, e_2) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g(e'_j, e_{j-1}) = 0 \\ g(e'_j, e_j) = 1 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} g_{11}\alpha_{1j} + g_{21}\alpha_{2j} + \dots + g_{j1}\alpha_{jj} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g_{1j-1}\alpha_{1j} + g_{2j-1}\alpha_{2j} + \dots + g_{jj-1}\alpha_{jj} = 0 \\ g_{1j}\alpha_{1j} + g_{2j}\alpha_{2j} + \dots + g_{jj}\alpha_{jj} = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

și că în raport cu o astfel de bază Q are expresia indicată. Deoarece

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1j} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{j1} & g_{j2} & \dots & g_{jj} \end{vmatrix} \neq 0$$

sistemul (4.3) este un sistem Cramer care permite determinarea coeficienților α_{1j} , α_{2j} , ..., α_{jj} ai lui e'_j . În particular, $\alpha_{jj} = \Delta_{j-1}/\Delta_j$ și

$$\begin{aligned}
g'_{jj} &= g(e'_j, e'_j) = g(e'_j, \alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \dots + \alpha_{jj}e_j) \\
&= \alpha_{1j}g(e'_j, e_1) + \alpha_{2j}g(e'_j, e_2) + \dots + \alpha_{j-1j}g(e'_j, e_{j-1}) + \alpha_{jj}g(e'_j, e_j) = \alpha_{jj}.
\end{aligned}$$

Dacă $k < j$, atunci

$$\begin{aligned}
g'_{jk} &= g(e'_j, e'_k) = g(e'_j, \alpha_{1k}e_1 + \alpha_{2k}e_2 + \dots + \alpha_{kk}e_k) \\
&= \alpha_{1k}g(e'_j, e_1) + \alpha_{2k}g(e'_j, e_2) + \dots + \alpha_{kk}g(e'_j, e_k) = 0.
\end{aligned}$$

4.2.7 Teoremă. Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial euclidian real,

$$Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

este o formă pătratică a cărei matrice în raport cu o bază ortonormată $\mathcal{B}$ este

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

atunci există o bază ortonormată $\mathcal{B}'$ în raport cu care Q are forma

$$Q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $\mathcal{G}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Relația

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad Ae_i = \sum_{j=1}^n g_{ji} e_j,$$

definește un operator autoadjunct a cărui matrice în raport cu baza $\mathcal{B}$ coincide cu matricea $\mathcal{G}$ a lui Q în raport cu aceeași bază. Deoarece A este diagonalizabil, există o bază ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ formată din vectori proprii ai lui A în raport cu care matricea lui A este

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Notând cu S matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ avem

$$A' = S^{-1} \mathcal{G} S.$$

Pe de altă parte, știm că matricea $\mathcal{G}'$ a formei pătraticе Q în raport cu baza $\mathcal{B}'$ este

$$\mathcal{G}' = {}^t S \mathcal{G} S.$$

Deoarece matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală, avem $S^{-1} = {}^t S$ și

$$\mathcal{G}' = {}^t S \mathcal{G} S = S^{-1} \mathcal{G} S = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Capitolul 5

Conice și cuadrice

5.1 Conice

5.1.1 Vom prezenta în continuare unele aplicații ale algebrei liniare în geometrie.

5.1.2 Definiție. Prin *conică* se înțelege mulțimea soluțiilor unei ecuații de forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \quad (5.1)$$

având cel puțin unul dintre coeficienții a_{11} , a_{12} , a_{22} nenul.

5.1.3 Ecuația

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (5.2)$$

este ecuația unui cerc,

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0 \quad (5.3)$$

este ecuația unei elipse,

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad (5.4)$$

este ecuația unei hiperbole,

$$y^2 - x - 1 = 0 \quad (5.5)$$

este ecuația unei parabole, iar

$$x^2 - y^2 = 0$$

reprezintă ecuația a două drepte concurente.

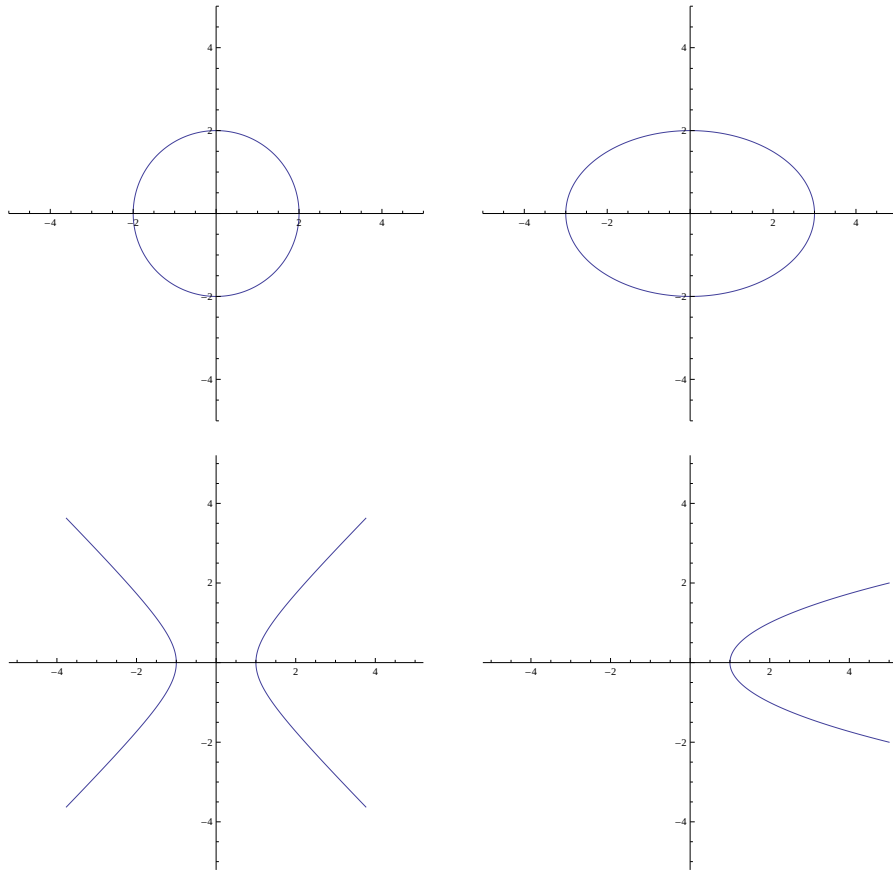


Figura 5.1: Cercul, elipsa, hiperbola și parabola definite de ecuațiile (5.2) - (5.5).

5.1.4 În cazul unei translații de vector (x_0, y_0) a reperului, urmate de o rotație de unghi α , legătura între coordonatele (x, y) ale unui punct în raport cu reperul inițial $\mathcal{R}$ și coordonatele (x', y') ale aceluiași punct în raport cu reperul final $\mathcal{R}'$ este (v. Fig. 5.2)

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (5.6)$$

5.1.5 În urma schimbării de reper (translație cu $(2, 1)$, urmată de rotație de unghi $\frac{\pi}{4}$)

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

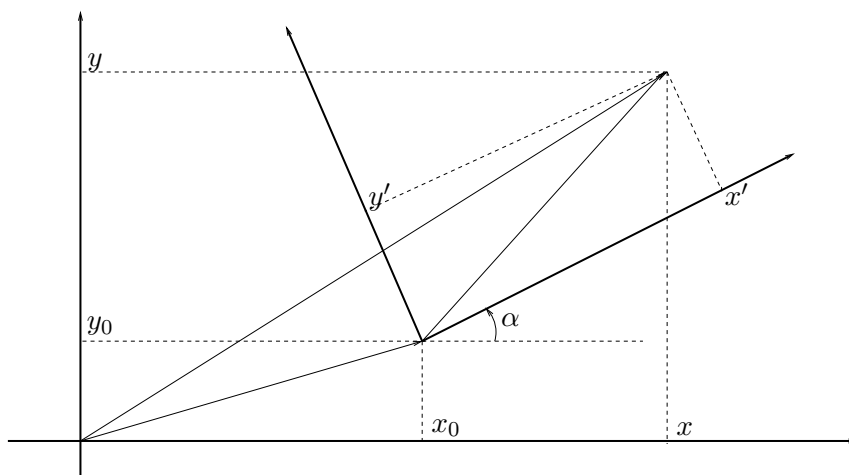


Figura 5.2: Schimbarea de reper (5.6).

ecuațiile conicelor (v. Fig. 5.3)

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (5.7)$$

$$13x^2 + 13y^2 - 10xy - 42x - 6y - 27 = 0 \quad (5.8)$$

$$2xy - 2x - 4y + 3 = 0 \quad (5.9)$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - (2 + \sqrt{2})x + (2 - \sqrt{2})y + 3\sqrt{2} - 1 = 0 \quad (5.10)$$

devin (v. (5.2) - (5.5))

$$x'^2 + y'^2 - 4 = 0$$

$$\frac{1}{9}x'^2 + \frac{1}{4}y'^2 - 1 = 0$$

$$x'^2 - y'^2 - 1 = 0$$

$$y'^2 - x' - 1 = 0.$$

5.1.6 Teoremă. *La o schimbare de reper, ecuația unei conice*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

se transformă într-o ecuație de aceeași formă,

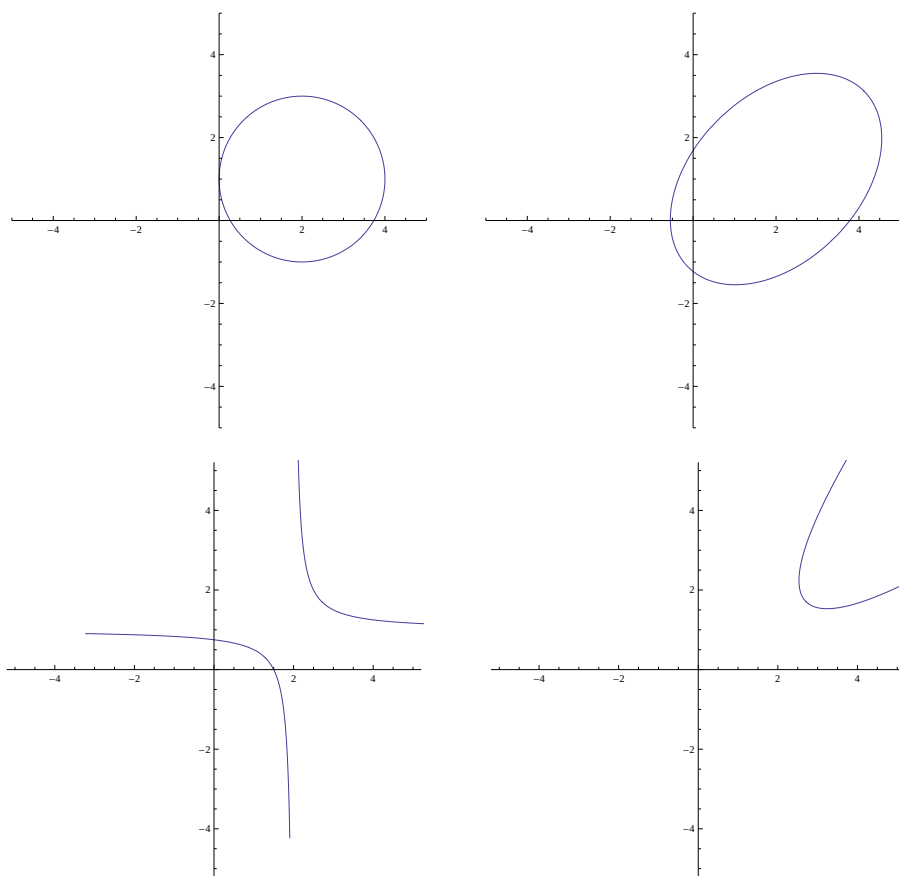


Figura 5.3: Cercul, elipsa, hiperbola și parabola definite de ecuațiile (5.7) - (5.10).

$$a'_{11} x^2 + 2 a'_{12} xy + a'_{22} y^2 + 2a'_{10} x + 2a'_{20} y + a'_{00} = 0,$$

iar parametrii

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

rămân invariante, adică

$$a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{10} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{00} \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Relația

$$f(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{10} x + 2a_{20} y + a_{00}$$

se poate scrie în formă matriceală

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t X & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ {}^t B & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

utilizând notațiile

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Relația

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & x_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix},$$

utilizând notațiile

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Din relația

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= ({}^tX \ 1) \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= ({}^tX' \ 1) \begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= ({}^tX' \ 1) \begin{pmatrix} A' & B' \\ {}^tB' & a'_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

rezultă că, în urma schimbării de reper, $f(x, y)$ se transformă într-un polinom de aceeași formă,

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ {}^tB' & a'_{00} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & a_{00} \end{pmatrix} = \Delta
\end{aligned}$$

și $A' = {}^tRAR$, adică

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

relație care conduce la $\delta' = \delta$ și $I' = I$.

5.2 Reducerea la forma canonică

5.2.1 În cazul unei translații a reperului

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y', \end{cases}$$

polinomul

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}$$

se transformă în

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x', y') &= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\
&\quad + a_{10})x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y' + f(x_0, y_0).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

5.2.2 Definiție. Spunem că punctul (x_0, y_0) este un *centru* al conicei (5.1) dacă, în raport cu reperul translatat cu (x_0, y_0) , avem

$$\tilde{f}(x', y') = 0 \iff \tilde{f}(-x', -y') = 0. \quad (5.12)$$

Propoziție. Punctul (x_0, y_0) este un centru al conicei (5.1) dacă și numai dacă

$$\begin{cases} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Demonstrație. Afirmția rezultă din (5.11) și (5.12).

5.2.3 Teoremă. a) Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica (5.1) are un singur centru și anume

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{12} & -a_{20} \end{vmatrix} \right).$$

b) În reperul rezultat în urma translației cu (x_0, y_0) , ecuația conice este

$$a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

c) Există un reper în raport cu care ecuația conice este

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

unde λ_1 și λ_2 sunt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{adică} \quad \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0.$$

Demonstrație. a) În cazul $\delta \neq 0$, sistemul (5.13) are soluția unică (x_0, y_0) .

b) Din relația (5.11) rezultă că ecuația conice în reperul rezultat în urma translației cu (x_0, y_0) este

$$a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + f(x_0, y_0) = 0.$$

Deoarece valoarea parametrului Δ nu depinde de reperul utilizat,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

relație care conduce la $f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}$.

c) Conform teoremei prezentate la pag. 200-7, în cazul formei pătratice

$$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x', y') = a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2,$$

există o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^2$ formată din vectori proprii ai matricei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

în raport cu care Q are forma canonică

$$Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2.$$

Rotind reperul rezultat în urma translației cu (x_0, y_0) astfel încât axele să fie dirijate de-a lungul vectorilor proprii ai matricei

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

ecuația conicei devine $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$.

5.2.4 Dacă $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, atunci cel puțin unul dintre coeficienții a_{11} , a_{22} este nenul, deoarece în caz contrar am avea $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Vom analiza cazul $a_{11} \neq 0$, deoarece cazul $a_{22} \neq 0$ conduce la rezultate similare.

5.2.5 Teoremă a) În cazul în care $\delta = 0$, $a_{11} \neq 0$ și $\Delta = 0$, există un reper în raport cu care ecuația conicei este

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0.$$

b) În cazul în care $\delta = 0$, $a_{11} \neq 0$ și $\Delta \neq 0$, există un reper în raport cu care ecuația conicei este

$$Y^2 = 2pX, \quad \text{unde } p = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Demonstrație. Efectuând o rotație de unghi α a reperului,

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{cases}$$

ecuația conicei devine

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{10}x + 2a'_{20}y + a'_{00} = 0,$$

cu

$$a'_{11} = \frac{1}{a_{11}}(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha)^2.$$

Alegând α astfel încât $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, rezultă $a'_{11} = 0$. Având în vedere invarianța lui δ , rezultă că $a'_{11}a'_{22} - a'_{12}^2 = 0$, relație care conduce la $a'_{12} = 0$.

a) Din relația

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{10} \\ 0 & a'_{22} & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{00} \end{vmatrix} = a'^2_{10} a'_{22} = 0$$

rezultă $a'_{10} = 0$. În urma rotației considerate, ecuația conicei este

$$a'_{22} y'^2 + 2a'_{20} y' + a'_{00} = 0.$$

b) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci $a'_{10} \neq 0$ și ecuația conicei

$$a'_{22} y'^2 + 2a'_{10} x' + 2a'_{20} y' + a'_{00} = 0$$

se poate scrie succesiv

$$a'_{22} \left(y'^2 + \frac{2a'_{20}}{a'_{22}} y' \right) + 2a'_{10} x' + a'_{00} = 0,$$

$$a'_{22} \left(y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}} \right)^2 + 2a'_{10} \left(x' + \frac{a'_{22}a'_{00} - a'^2_{20}}{2a'_{10}a'_{22}} \right) = 0.$$

Efectuând translația

$$\begin{cases} X = x' + \frac{a'_{22}a'_{00} - a'^2_{20}}{2a'_{10}a'_{22}} \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{a'_{22}}, \end{cases}$$

ecuația conicei devine

$$Y^2 = \frac{-2a'_{10}}{a'_{22}} X.$$

Deoarece $\Delta = a'^2_{10} a'_{22}$ și $I = a'_{22}$, ecuația se mai poate scrie

$$Y^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}} X.$$

5.2.6 Ținând seama că rădăcinile ecuației $\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$ verifică relațiile

$$\lambda_1 + \lambda_2 = I, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \delta,$$

din teoremele anterioare, rezultă că există următoarele cazuri:

Cazul	Ce reprezintă conica
$\delta < 0$ și $\Delta \neq 0$	hiperbolă
$\delta > 0$ și $I\Delta < 0$	elipsă
$\delta > 0$ și $I\Delta > 0$	mulțimea vidă
$\delta > 0$ și $\Delta = 0$	un punct
$\delta < 0$ și $\Delta = 0$	două drepte concurente
$\delta = 0$ și $\Delta = 0$	două drepte paralele, o dreaptă sau mulțimea vidă
$\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$	o parabolă

5.3 Cuadrice

5.3.1 Definiție. Prin *cuadrică* se înțelege mulțimea soluțiilor unei ecuații de forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0,$$

cu cel puțin unul dintre coeficienții $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ nenul.

5.3.2 Ecuațiile reduse ale cuadricelor. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci quadrica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se numește *elipsoid*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se numește *hiperboloid cu pânză*,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

se numește *hiperboloid cu două pânze*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

se numește *paraboloid eliptic*,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

se numește *paraboloid hiperbolic*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numește *cilindru eliptic*,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numește *cilindru hiperbolic*,

$$y^2 - 2ax = 0$$

se numește *cilindru parabolic*. Cuadrice

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

reprezintă două plane concurente,

$$x^2 - a^2 = 0$$

reprezintă două plane paralele,

$$x^2 = 0$$

reprezintă un plan,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

reprezintă o dreaptă,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

reprezintă un punct, iar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \quad x^2 + a^2 = 0$$

reprezintă mulțimi vide.

5.3.3 La o schimbare de reper, ecuația unei quadrice

$$\begin{aligned} a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz \\ + 2a_{10} x + 2a_{20} y + 2a_{30} z + a_{00} = 0, \end{aligned}$$

se transformă într-o ecuație de aceeași formă, iar parametrii

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}$$

nu își schimbă valoarea. Urmând analogia cu conicele, se poate obține o clasificare a cuatricelor și o metodă de reducere la forma canonică (redușă).

Capitolul 6

Ecuatii și sisteme de ecuații diferențiale liniare

6.1 Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

6.1.1 Definiție. O *ecuație diferențială de ordinul întâi* este o ecuație de forma

$$F(x, y, y') = 0, \quad (6.1)$$

unde x este variabila independentă, y funcția necunoscută, y' derivata funcției necunoscute și $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, I fiind un interval. Prin *soluție* a ecuației (6.1) se înțelege o funcție derivabilă

$$\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

cu $(a, b) \subseteq I$ și astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

6.1.2 Definiție. Spunem că ecuația diferențială

$$y' = f(x, y), \quad \text{unde } f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.2)$$

este o ecuație diferențială scrisă sub *formă normală*.

Prin *soluție* a ecuației (6.2) se înțelege o funcție derivabilă

$$\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

- 1) $(x, \varphi(x)) \in D, \quad \forall x \in (a, b);$
- 2) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in (a, b).$

6.1.3 Ecuația (6.2) se mai poate scrie

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.3)$$

sau sub forma

$$dy = f(x, y) dx \quad (6.4)$$

numită *formă simetrică*. Soluția ecuației (6.4) se poate căuta sub forma

$$y = y(x)$$

sau

$$x = x(y)$$

sau, mai general, sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Ecuația (6.4) este caz particular pentru ecuația

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \text{unde } P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (6.5)$$

care este *forma generală a unei ecuații simetrice*.

Prin soluție a ecuației (6.5) se înțelege o pereche de aplicații derivabile

$$\varphi, \psi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

- 1) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D, \quad \forall t \in (a, b)$
- 2) $P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) = 0, \quad \forall t \in (a, b).$

6.1.4 Se știe că dacă

$$f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

este o funcție continuă, atunci funcția

$$F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

este o primitivă a lui f , oricare ar fi $x_0 \in (a, b)$, adică avem

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

6.1.5 Teoremă. Fie ecuația cu variabile separabile

$$y' = f(x)g(y), \quad (6.6)$$

unde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue definite pe intervalele I și J .

a) Dacă $y_0 \in J$ este astfel încât $g(y_0) = 0$, atunci funcția constantă

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = y_0$$

este soluție a ecuației (6.6).

b) Dacă $y_0 \in J$ este astfel încât $g(y_0) \neq 0$, atunci relația

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(u)} du = \int_{x_0}^x f(v) dv + C, \quad (6.7)$$

unde $x_0 \in I$ și C este o constantă, definește implicit o soluție locală $y = y(x)$ a ecuației (6.6).

Demonstrație. a) Deoarece $\varphi'(x) = 0$ și $g(\varphi(x)) = g(y_0) = 0$, rezultă că

$$\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)), \quad \forall x \in I.$$

b) Derivând relația (6.7) în raport cu x , considerând $y = y(x)$, rezultă

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x),$$

adică

$$y'(x) = f(x)g(y(x)).$$

6.1.6 Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$y' = xy.$$

Rezolvare. Funcția constantă $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$ este soluție a ecuației.

Scriind ecuația sub forma

$$\frac{y'}{y} = x, \quad \text{echivalentă cu} \quad (\ln y)' = x,$$

deducem că

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{adică} \quad y(x) = C_1 e^{\frac{x^2}{2}},$$

unde c și $C_1 = e^c$ sunt constante.

6.1.7 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

$$\text{In}[1]:=\text{DSolve}[y'[x] == x y[x], y[x], x] \mapsto \text{Out}[1]=\left\{\left\{y[x] \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} C[1]\right\}\right\}$$

6.1.8 Ecuația (6.6) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

sau forma simetrică

$$f(x)g(y)dx - dy = 0.$$

Forma diferențială $f(x)g(y)dx - dy$ nu este diferențiala totală a unei funcții.

Înmulțind ecuația anterioară cu *factorul integrant* $\frac{1}{g(y)}$, se obține ecuația

$$f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy = 0 \quad (6.8)$$

al cărei membru stâng este o diferențială totală deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{g(y)}\right).$$

Ecuația (6.8) se poate scrie sub forma

$$dF = 0,$$

unde

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)}dt.$$

Rezultă că relația $F(x, y) = C$, adică

$$\int_{x_0}^x f(u)du - \int_{y_0}^y \frac{1}{g(v)}dv = C$$

definește implicit o soluție a ecuației (6.6) dacă alegem y_0 astfel încât $g(y_0) \neq 0$.

6.1.9 Propoziție. Ecuația omogenă

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reduce la o ecuație cu variabile separabile dacă se utilizează schimbarea de variabilă $y(x) = xz(x)$, unde $z(x)$ este noua funcție necunoscută.

Demonstrație. Derivând $y(x) = xz(x)$ obținem relația $y'(x) = z(x) + xz'(x)$ care ne permite să scriem ecuația sub forma

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

6.1.10 Propoziție. Ecuația liniară omogenă

$$y' = f(x) y$$

are soluția generală

$$y(x) = C e^{\int_{x_0}^x f(t) dt},$$

unde C este o constantă arbitrară.

Demonstrație. Rezolvarea ecuației poate fi prezentată după cum urmează

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y,$$

$$\frac{dy}{y} = f(x) dx,$$

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{u} = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

$$\ln |y| - \ln |y_0| = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}.$$

6.1.11 Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$y' = x^2 y.$$

Rezolvare. Soluția generală a ecuației este

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x t^2 dt}, \quad \text{adică} \quad y(x) = C_1 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

6.1.12 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

$$\text{In}[1] := \text{DSolve}[y'[x] == f[x] y[x], y[x], x] \mapsto \text{Out}[1] = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^{\int_1^x f[K[1]] dK[1]} C[1] \right\} \right\}$$

$$\text{In}[2] := \text{DSolve}[y'[x] == x^2 y[x], y[x], x] \mapsto \text{Out}[2] = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^{\frac{x^3}{3}} C[1] \right\} \right\}$$

6.1.13 Propoziție. Soluția generală a ecuației liniare neomogene

$$y' = f(x) y + g(x) \tag{6.9}$$

se obține adunând soluția generală a ecuației liniare omogene asociate

$$y' = f(x) y \tag{6.10}$$

cu o soluție particulară $\tilde{y}$ a ecuației (6.9).

Demonstrație. Dacă y verifică (6.10) și $\tilde{y}$ verifică (6.9), atunci

$$(y + \tilde{y})'(x) = f(x)y(x) + f(x)\tilde{y}(x) + g(x) = f(x)(y + \tilde{y})(x) + g(x).$$

Dacă y și $\tilde{y}$ verifică (6.9), atunci $y - \tilde{y}$ verifică (6.10)

$$(y - \tilde{y})'(x) = f(x)y(x) + g(x) - f(x)\tilde{y}(x) - g(x) = f(x)(y - \tilde{y})(x).$$

6.1.14 Propoziție. O soluție particulară $\tilde{y}$ a ecuației liniare neomogene

$$y' = f(x)y + g(x)$$

poate fi găsită folosind metoda variației constantei, căutând-o de forma

$$\tilde{y}(x) = C(x) e^{\int_{x_0}^x f(t) dt}.$$

Demonstrație. Înlocuind în ecuație, obținem relația

$$C'(x) = g(x) e^{-\int_{x_0}^x f(t) dt}$$

care permite determinarea funcției $C(x)$.

6.1.15 Exercițiu. Să se rezolve ecuația

$$y' = y + x.$$

6.1.16 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

$$\text{In}[1] := \text{DSolve}[y'[x] == y[x] + x, y, x] \mapsto \text{Out}[1] = \{\{y[x] \rightarrow -1 - x - e^x C[1]\}\}$$

6.1.17 Propoziție. Schimbarea de variabilă $z = y^{1-\alpha}$ permite reducerea ecuației

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha,$$

numită ecuația Bernoulli, la o ecuație liniară.

Demonstrație. Dacă $\alpha = 1$, atunci ecuația este deja o ecuație liniară. În cazul $\alpha \neq 1$, împărțind cu y^α obținem ecuația

$$y^{-\alpha} y' = f(x) y^{1-\alpha} + g(x)$$

care se poate scrie

$$\frac{1}{1-\alpha} (y^{1-\alpha})' = f(x) y^{1-\alpha} + g(x).$$

6.1.18 Propoziție. Ecuația Riccati

$$y' = f(x) y^2 + g(x) y + h(x)$$

se poate rezolva utilizând schimbarea de variabilă

$$y = y_p + \frac{1}{z}$$

în cazul în care se cunoaște o soluție particulară y_p .

Demonstrație. În urma schimbării de variabilă indicate ecuația devine

$$z' = -(2f(x) y_p(x) - g(x)) z - f(x)$$

adică o ecuație liniară.

6.2 Ecuații diferențiale liniare de ordin superior**6.2.1 Definiție.** O ecuație diferențială liniară de ordinul n este o ecuație de forma

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (6.11)$$

unde

$$a_0, a_1, \dots, a_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcții continue definite pe un interval I și $a_0(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$.

Prin *soluție* a ecuației (6.11) se înțelege o funcție

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât:

- 1) φ admite derivate continue până la ordinul n ;
- 2) $a_0(x) \varphi^{(n)}(x) + a_1(x) \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) \varphi(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$

6.2.2 Teoremă (de existență și unicitate). *Dacă*

$$a_0, a_1, \dots, a_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt funcții continue și

$$a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in I,$$

atunci ecuația diferențială

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

admite pentru fiecare $(x_0, y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$ o unică soluție

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încât

$$\varphi(x_0) = y_{00}, \quad \varphi'(x_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

6.2.3 Utilizând operatorul diferențial

$$L = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x),$$

unde

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n},$$

ecuația (6.11) se scrie

$$Ly = f.$$

Operatorul liniar

$$L : C^n(I) \longrightarrow C^0(I),$$

unde

$$C^n(I) = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ admite derivate continue până la ordinul } n \},$$

$$C^0(I) = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ este funcție continuă } \},$$

este un operator liniar

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi, \psi \in C^n(I).$$

6.2.4 Teoremă. Spațiul

$$\mathcal{V} = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid L\varphi = 0 \}$$

al tuturor soluțiilor ecuației liniare omogene

$$Ly = 0,$$

este un spațiu vectorial de dimensiune n .

Demonstrație. Dacă $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$, atunci

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha L\varphi + \beta L\psi = 0$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conform teoremei de existență și unicitate, pentru $x_0 \in I$ fixat, aplicația

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar. Rezultă că spațiile vectoriale $\mathcal{V}$ și $\mathbb{R}^n$ sunt izomorfe, și prin urmare $\dim \mathcal{V} = \dim \mathbb{R}^n = n$.

6.2.5 Rezolvarea ecuației

$$Ly = 0$$

înseamnă determinarea spațiului vectorial $\mathcal{V} = \{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid L\varphi = 0 \}$ al tuturor soluțiilor, ceea ce se poate realiza indicând o bază $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, caz în care

$$\mathcal{V} = \{ c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \}.$$

Funcțiile

$$y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}$ dacă sunt liniar independente, adică dacă

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

6.2.6 Propoziție. Funcțiile

$$y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

din $\mathcal{V}$ sunt liniar independente dacă și numai dacă într-un punct fixat $x_0 \in I$ avem

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.12)$$

Demonstrație. Deoarece

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad A\varphi = (\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0))$$

este un izomorfism liniar, funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt liniar independente dacă și numai dacă vectorii corespunzători

$$Ay_1 = (y_1(x_0), y_1'(x_0), \dots, y_1^{(n-1)}(x_0)),$$

$$Ay_2 = (y_2(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_2^{(n-1)}(x_0)),$$

.....

$$Ay_n = (y_n(x_0), y_n'(x_0), \dots, y_n^{(n-1)}(x_0))$$

sunt liniar independenți, ceea ce este echivalent cu (6.12).

6.2.7 Teoremă (Abel-Liouville). *Dacă*

$$y_1, y_2, \dots, y_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

sunt n soluții ale ecuației

$$Ly = 0,$$

atunci funcția (numită wronskian)

$$W : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

verifică relația

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}, \quad (6.13)$$

unde $x_0 \in I$ este un punct fixat.

Demonstrație (cazul $n = 2$.) Arătăm că W verifică ecuația liniară

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x).$$

În cazul $n = 2$, ecuația $Ly = 0$, adică

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

conduce la

$$y'' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y' - \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y,$$

și

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x). \end{aligned}$$

6.2.8 Din relația (6.13) rezultă că dacă W se anulează într-un punct din I , atunci se anulează în toate punctele.

6.2.9 Propoziție. *Soluția generală a ecuației liniare neomogene*

$$Ly = f$$

se obține adunând la soluția generală a ecuației omogene asociate

$$Ly = 0$$

o soluție particulară $\tilde{y}$ a ecuației neomogene.

Demonstrație. Deoarece $L\tilde{y} = f$, obținem

$$Ly = 0 \implies L(y + \tilde{y}) = f \quad \text{și} \quad Ly = f \implies L(y - \tilde{y}) = 0.$$

6.2.10 Teoremă (Metoda variației constantelor). *Dacă*

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$$

este soluția generală a ecuației omogene

$$Ly = 0,$$

atunci o soluție particulară a ecuației neomogene

$$Ly = f$$

poate fi găsită căutând-o de forma

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x)$$

cu $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ soluție a sistemului

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y'_k(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Demonstrație. Ținând seama de (6.14), obținem relațiile

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x),$$

$$\tilde{y}'(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y'_k(x),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\tilde{y}^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^{(n-1)}(x),$$

$$\tilde{y}^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

care conduc la

$$\begin{aligned} L\tilde{y} &= a_0(x)\tilde{y}^{(n)} + a_1(x)\tilde{y}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\tilde{y}' + a_n(x)\tilde{y} \\ &= \sum_{k=1}^n c_k(x) \left(a_0(x)y_k^{(n)} + a_1(x)y_k^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y_k' + a_n(x)y_k \right) + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

6.2.11 Definiție. Prin *ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți constanți* se înțelege o ecuație de forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (6.15)$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sunt numere reale și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă definită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

6.2.12 Ecuația (6.15) este un caz particular pentru ecuația (6.11) și anume cel în care funcțiile $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ sunt funcții constante. Ecuația (6.15) se poate scrie sub forma

$$P(D)y = f,$$

unde P este polinomul

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n,$$

numit *polinomul caracteristic* asociat ecuației considerate.

6.2.13 Folosind notația lui Euler

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

definim pentru fiecare număr complex $r = \alpha + i\beta$ funcția complexă

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto e^{rx} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

cu proprietățile

$$D e^{(\alpha+i\beta)x} = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha+i\beta)x},$$

$$\Re(D e^{rx}) = D(\Re e^{rx}),$$

$$\Im(D e^{rx}) = D(\Im e^{rx}),$$

unde $\Re z$ și $\Im z$ reprezintă partea reală și respectiv imaginară a numărului z .

6.2.14 Propoziție. *Funcția*

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad y(x) = e^{rx},$$

este soluție a ecuației omogene

$$P(D)y = 0$$

dacă și numai dacă r este rădăcină a polinomului caracteristic, adică

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Demonstrație. Deoarece $D^k e^{rx} = r^k e^{rx}$ și

$$P(D) e^{rx} = (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx}$$

avem

$$P(D) e^{rx} = 0 \iff P(r) = 0.$$

6.2.15 Propoziție. Dacă polinomul caracteristic $P(r)$ are rădăcinile $r_1, r_2, \dots, r_k$ cu multiplicitățile $m_1, m_2, \dots, m_k$, adică

$$P(r) = a_0 (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \dots (r - r_k)^{m_k},$$

atunci $P(D)$ admite factorizarea

$$P(D) = a_0 (D - r_1)^{m_1} (D - r_2)^{m_2} \dots (D - r_k)^{m_k}$$

ordinea factorilor putând fi schimbată fără a afecta rezultatul.

Demonstrație. Afirmatia rezultă din liniaritatea lui D și din relația $D^p D^q = D^{p+q}$.

6.2.16 Propoziție. Dacă $Q(r)$ este un polinom și $\varphi(x)$ este o funcție, atunci

$$Q(D) (e^{rx} \varphi) = e^{rx} Q(D + r) \varphi,$$

oricare ar fi $r \in \mathbb{C}$.

Demonstrație. Arătăm mai întâi prin inducție că

$$D^k (e^{rx} \varphi) = e^{rx} (D + r)^k \varphi.$$

Avem

$$D (e^{rx} \varphi) = e^{rx} D \varphi + r e^{rx} \varphi = e^{rx} (D + r) \varphi.$$

Presupunând că $D^k (e^{rx} \varphi) = e^{rx} (D + r)^k \varphi$, obținem

$$D^{k+1} (e^{rx} \varphi) = D (e^{rx} (D + r)^k \varphi) = e^{rx} (D + r) (D + r)^k \varphi = e^{rx} (D + r)^{k+1} \varphi.$$

Dacă $Q(r) = \alpha_0 r^m + \alpha_1 r^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} r + \alpha_m$, atunci

$$\begin{aligned}
Q(D)(e^{rx}\varphi) &= \alpha_0 D^m(e^{rx}\varphi) + \alpha_1 D^{m-1}(e^{rx}\varphi) + \cdots + \alpha_{m-1} D(e^{rx}\varphi) + \alpha_m e^{rx}\varphi \\
&= e^{rx} [\alpha_0 (D+r)^m + \alpha_1 (D+r)^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} (D+r) + \alpha_m] \varphi \\
&= e^{rx} Q(D+r)\varphi.
\end{aligned}$$

6.2.17 Propoziție. *Soluția generală a ecuației*

$$(D-r)^k y = 0$$

este

$$y(x) = c_0 e^{rx} + c_1 x e^{rx} + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} e^{rx}.$$

Demonstrație. Conform propoziției anterioare avem relația

$$D^k(e^{-rx}y) = e^{-rx}(D-r)^k y$$

care arată că ecuația $(D-r)^k y = 0$ este echivalentă cu ecuația

$$D^k(e^{-rx}y) = 0$$

care implică

$$e^{-rx}y(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1} x^{k-1},$$

adică

$$y(x) = c_0 e^{rx} + c_1 x e^{rx} + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} e^{rx}.$$

6.2.18 Propoziție. *Fie ecuația diferențială liniară omogenă cu coeficienți reali*

$$P(D)y = 0,$$

unde $P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n$ este polinomul caracteristic.

a) Dacă r_j este rădăcină reală a lui P cu multiplicitatea m_j , atunci funcțiile

$$e^{r_j x}, \quad x e^{r_j x}, \quad \dots, \quad x^{m_j-1} e^{r_j x}$$

sunt soluții particulare ale ecuației $P(D)y = 0$.

b) Dacă $r_j = \alpha_j + i\beta_j$ este rădăcină complexă a lui P cu multiplicitatea m_j , atunci

$$e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \quad x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \quad \dots, \quad x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),$$

$$e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \quad x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \quad \dots, \quad x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x)$$

sunt soluții particulare ale ecuației $P(D)y = 0$.

Demonstrație. Ecuația $P(D)y = 0$ admite o factorizare de forma

$$Q(D) (D - r_j)^{m_j} y = 0$$

și $(D - r_j)^{m_j} y = 0$ implică $P(D)y = 0$. Deoarece ec. $P(D)y = 0$ are coeficienți reali

$$P(D)y = 0 \implies \begin{cases} P(D)(\Re y) = \Re(P(D)y) = 0 \\ P(D)(\Im y) = \Im(P(D)y) = 0 \end{cases}$$

adică în cazul în care r_j este rădăcină complexă cu multiplicitatea m_j funcțiile

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \Re (c_0 e^{r_j x} + c_1 x e^{r_j x} + \dots + c_{m_j-1} x^{m_j-1} e^{r_j x})$$

și

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \Im (c_0 e^{r_j x} + c_1 x e^{r_j x} + \dots + c_{m_j-1} x^{m_j-1} e^{r_j x})$$

sunt soluții ale ecuației $P(D)y = 0$, oricare ar fi constantele reale $c_0, c_1, \dots, c_{m_j-1}$.

6.2.19 Se poate demonstra că, în toate cazurile, în spațiul soluțiilor există o bază formată din soluții particulare de tipul celor prezentate în propoziția anterioară.

6.2.20 Exercițiu. Să se determine soluția generală a ecuațiilor

$$a) \quad y'' - 5y' + 6y = 0,$$

$$b) \quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$$

$$c) \quad y'' + y' + y = 0,$$

$$d) \quad (D^2 - D + 1)^3 y = 0,$$

$$e) \quad (D - 3)^4 (D^2 + 2)^2 y = 0.$$

Răspuns.

$$a) \quad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

$$b) \quad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}.$$

$$c) \quad y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

$$\begin{aligned} d) \quad y(x) &= c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &+ c_3 x e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 x e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &+ c_5 x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_6 x^2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad y(x) &= c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + c_3 x^2 e^{3x} + c_4 x^3 e^{3x} \\ &+ c_5 \cos(\sqrt{2}x) + c_6 \sin(\sqrt{2}x) + c_7 x \cos(\sqrt{2}x) + c_8 x \sin(\sqrt{2}x). \end{aligned}$$

6.2.21 MATHEMATICA: DSolve[eqns, y[x], x]

In[1]:=DSolve[y''[x] - 5 y'[x] + 6 y[x] == 0, y[x], x]

↳ Out[1]={ {y[x]→e^{2x} C[1]+e^{3x} C[2]} }

In[2]:=DSolve[y'''[x] - 6 y''[x] + 12 y'[x] - 8 y[x] == 0, y[x], x]

↳ Out[2]={ {y[x]→e^{2x} C[1]+e^{2x} x C[2]+e^{2x} x² C[3]} }

In[3]:=DSolve[y''[x] + y'[x] + y[x] == 0, y[x], x]

↳ Out[3]={ {y[x]→e^{-x/2} C[2] Cos[$\frac{\sqrt{3}x}{2}$]+e^{-x/2} C[1] Sin[$\frac{\sqrt{3}x}{2}$]} }

6.2.22 Propoziție. Ecuația Euler

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

se reduce la o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, unde t este noua variabilă independentă.

Demonstrație (cazul $n = 3$). Notând cu $z(t)$ noua funcție necunoscută, avem relația

$$y(x) = z(\ln x)$$

care, prin derivări succesive, conduce la

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) = e^{-t} z'(t),$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x) = e^{-2t} (z''(t) - z'(t)),$$

$$y'''(x) = \frac{1}{x^3} z'''(\ln x) - \frac{3}{x^3} z''(\ln x) + \frac{2}{x^3} z'(\ln x) = e^{-3t} (z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)).$$

În urma schimbării de variabilă, ecuația Euler

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0$$

devine

$$a_0 z''' + (-3a_0 + a_1) z'' + (2a_0 - a_1 + a_2) z' + a_3 z = 0.$$

6.2.23 Relația $x = e^t$, echivalentă cu $t = \ln x$, conduce la

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}.$$

Ecuația Euler se poate scrie

$$\left(a_0 x^n \frac{d^n}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{d}{dx} + a_n \right) y = 0$$

și, formal, schimbarea de variabilă $x = e^t$ în ecuația Euler se poate realiza înlocuind x cu e^t și operatorul de derivare $\frac{d}{dx}$ cu $e^{-t} \frac{d}{dt}$. De remarcat că

$$\left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right)^2 = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right) = e^{-2t} \frac{d^2}{dt^2} - e^{-2t} \frac{d}{dt}.$$

$$Y' = A(x)Y + F(x) \quad \text{si} \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

6.3.4 Teoremă. *Spațiul $\mathcal{V}$ al tuturor soluțiilor sistemului diferențial liniar omogen*

$$Y' = A(x)Y$$

este un spațiu vectorial de dimensiune n .

Demonstrație. Pentru $x_0 \in I$ fixat, din teorema de existență și unicitate, rezultă că aplicația liniară

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n : Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar.

6.3.5 Rezolvarea sistemului omogen $Y' = AY$ este echivalentă cu găsirea unei baze a lui $\mathcal{V}$, adică cu găsirea a n soluții liniar independente.

6.3.6 Definiție. Plecând de la n soluții ale sistemului omogen $Y' = A(x)Y$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

construim *matricea Wronski*

$$W = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

și *wronskianul*

$$w = \det W.$$

6.3.7 Teoremă. *Soluțiile $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ formează o bază a spațiului vectorial $\mathcal{V}$ dacă și numai dacă wronskianul lor este nenul într-un punct fixat $x_0 \in I$, adică*

$$w(x_0) \neq 0.$$

Demonstrație. Deoarece

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n : Y \mapsto Y(x_0)$$

este un izomorfism liniar, soluțiile $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sunt liniar independente dacă și numai dacă vectorii $Y_1(x_0), Y_2(x_0), \dots, Y_n(x_0)$ din $\mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți, ceea ce este echivalent cu $w(x_0) \neq 0$.

6.3.8 Teoremă. Wronskianul soluțiilor $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ verifică relația

$$w(x) = w(x_0) e^{\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(t) dt}, \quad (6.17)$$

unde $\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$ este urma matricei $A(t)$.

Demonstrație (cazul $n = 2$.) Avem

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y'_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y'_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y'_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}(x) y_{11}(x) + a_{12}(x) y_{21}(x) & y_{12}(x) \\ a_{21}(x) y_{11}(x) + a_{22}(x) y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & a_{11}(x) y_{12}(x) + a_{12}(x) y_{22}(x) \\ y_{21}(x) & a_{21}(x) y_{12}(x) + a_{22}(x) y_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}(x) + a_{22}(x)) w(x), \end{aligned}$$

adică w verifică ecuația diferențială liniară

$$w' = \operatorname{tr} A(x) w.$$

6.3.9 Din relația (6.13) rezultă că dacă wronskianul se anulează într-un punct $x_0 \in I$, atunci el se anulează în toate punctele $x \in I$.

6.3.10 Propoziție. Soluția generală a sistemului liniar neomogen

$$Y' = A(x)Y + F(x)$$

se obține adunând la soluția generală a sistemului liniar omogen asociat

$$Y' = A(x)Y$$

o soluție particulară $\tilde{Y}$ a sistemului neomogen.

Demonstrație. Deoarece $\tilde{Y}' = A(x)Y + F(x)$, obținem

$$Y' = A(x)Y \implies (Y + \tilde{Y})' = A(x)(Y + \tilde{Y}) + F(x),$$

$$Y' = A(x)Y + F(x) \implies (Y - \tilde{Y})' = A(x)(Y - \tilde{Y}).$$

6.3.11 Folosind matricea Wronski W asociată unei baze $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ a lui $\mathcal{V}$, soluția generală

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n$$

a ecuației liniare omogene $Y' = A(x)Y$ se poate scrie sub forma

$$Y(x) = W(x) C, \quad \text{unde} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

6.3.12 Teoremă (Metoda variației constantelor).

Dacă soluția generală a sistemului

$$Y' = A(x) Y$$

este $Y(x) = W(x) C$, *atunci o soluție particulară sistemului neomogen*

$$Y' = A(x) Y + F(x)$$

se poate obține căutând-o de forma

$$\tilde{Y}(x) = W(x) C(x),$$

unde $C(x)$ *este o soluție a sistemului*

$$C'(x) = W^{-1}(x) F(x).$$

Demonstrație. Deoarece $W' = A(x)W$ și $\tilde{Y}'(x) = W'(x) C(x) + W(x) C'(x)$, avem

$$\tilde{Y}' = A(x) \tilde{Y} + F(x)$$

dacă și numai dacă $W(x) C'(x) = F(x)$.

6.3.13 Definiție. Prin *sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți* se înțelege un sistem de ecuații de forma

$$Y' = AY, \quad \text{unde} \quad A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

6.3.14 Propoziție. *Funcția vectorială* $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $Y(x) = w e^{\lambda x}$, *unde*

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

verifică relația

$$Y' = AY$$

dacă și numai dacă

$$Aw = \lambda w.$$

Demonstrație. Deoarece $Y'(x) = \lambda w e^{\lambda x}$, înlocuind în $Y' = AY$ obținem $Aw = \lambda w$.

6.3.15 Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci λ este valoare proprie a matricei A și alegând un vector propriu corespunzător $w \in \mathbb{R}^n$ obținem soluția netrivială $Y(x) = w e^{\lambda x}$ a sistemului $Y' = AY$. Dacă $\lambda \notin \mathbb{R}$, atunci există $w \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $Aw = \lambda w$ și

$$Y_1(x) = \Re(w e^{\lambda x}), \quad Y_2(x) = \Im(w e^{\lambda x})$$

sunt soluții ale sistemului $Y' = AY$.

6.3.16 Exercițiu. Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Ecuația

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcinile $\lambda_1 = 1 + i$ și $\lambda_2 = 1 - i$. O soluție particulară a ecuației $Av = (1 + i)v$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

este $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Rezultă că soluția generală a sistemului este

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_1 \Re \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)x} \right\} + c_2 \Im \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)x} \right\} \\ &= c_1 \Re \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos x + i \sin x) \right\} + c_2 \Im \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^x (\cos x + i \sin x) \right\} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^x, \end{aligned}$$

adică

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \\ y_2(x) = -c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x. \end{cases}$$

6.3.17 MATHEMATICA: DSolve[{eqn1, eqn2}, {y1[x], y2[x]}, x]

```
In[1]:=DSolve[{y1'[x]==y1[x]+y2[x],y2'[x]==-y1[x]+y2[x]},{y1[x],y2[x]},x]
      ↳ Out[1]={y1[x]→e^x C[1] Cos[x]+e^x C[2] Sin[x], y2[x]→e^x C[2] Cos[x]-e^x C[1] Sin[x]}
```

6.3.18 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă și $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, unde

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix},$$

este o bază a lui $\mathbb{R}^n$ formată din vectori proprii ai lui A corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (distincte sau nu), atunci soluția generală a sistemului $Y' = AY$ este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + c_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}.$$

6.3.19 Exercițiu. Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

Rezolvare. Rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

obținem $\lambda_1 = 2$, și $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Deoarece subspațiile proprii corespunzătoare sunt

$$V_2 = \{ \alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}, \quad V_{-1} = \{ \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \},$$

rezultă că soluția generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

6.3.20 MATHEMATICA: `DSolve[{eqn1, eqn2, eqn3}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]`

`In[1]:=Eigenvalues[{{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}}]     $\mapsto$     Out[1]={2,-1,-1}`

`In[2]:=Eigenvectors[{{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}}]     $\mapsto$     Out[2]={{1,1,1},{-1,0,1},{-1,1,0}}`

`In[3]:=DSolve[{y1'[x]==y2[x]+y3[x], y2'[x]==y1[x]+y3[x],`

`y3'[x]==y1[x]+y2[x]}, {y1[x], y2[x], y3[x]}, x]`

`$\mapsto$ Out[3]={ {y1[x] $\rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{-x}(2+e^{3x})C[1]+\frac{1}{3}e^{-x}(-1+e^{3x})C[2]+\frac{1}{3}e^{-x}(-1+e^{3x})C[3]$,
y2[x] $\rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{-x}(-1+e^{3x})C[1]+\frac{1}{3}e^{-x}(2+e^{3x})C[2]+\frac{1}{3}e^{-x}(-1+e^{3x})C[3]$,
y3[x] $\rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{-x}(-1+e^{3x})C[1]+\frac{1}{3}e^{-x}(-1+e^{3x})C[2]+\frac{1}{3}e^{-x}(2+e^{3x})C[3]$ }`

6.3.21 Știm că, în general, o matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ nu este diagonalizabilă. Dacă λ este o rădăcină reală (respectiv, complexă) cu multiplicitatea m a polinomului caracteristic, atunci partea din soluția generală corespunzătoare lui λ poate fi găsită căutând-o de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x^{m-1} + \alpha_{12}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{1m-1}x + \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}x^{m-1} + \alpha_{22}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{2m-1}x + \alpha_{2m} \\ \cdots \\ \alpha_{n1}x^{m-1} + \alpha_{n2}x^{m-2} + \cdots + \alpha_{nm-1}x + \alpha_{nm} \end{pmatrix} e^{\lambda x},$$

unde coeficienții α_{jk} sunt reali (respectiv, complecși). În cazul complex, în final se separă părțile reală și imaginară ale a soluției găsite.

6.3.22 Exercițiu. Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y'_1 = -y_1 + y_2 \\ y'_2 = -y_2 + 4y_3 \\ y'_3 = y_1 - 4y_3 \end{cases}$$

Rezolvare. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$, iar subspațiile proprii corespunzătoare

$$V_0 = \{ \alpha(4, 4, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}, \quad V_{-3} = \{ \alpha(1, -2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

Deoarece $\dim V_{-3} = 1$, rezultă că matricea sistemului nu este diagonalizabilă. Căutând partea din soluția generală referitoare la $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 \end{pmatrix} e^{-3x},$$

găsim

$$Y(x) = \alpha_1 \begin{pmatrix} x \\ -2x + 1 \\ x - 1 \end{pmatrix} e^{-3x} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}.$$

Soluția generală a sistemului este

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ -2x + 1 \\ x - 1 \end{pmatrix} e^{-3x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}.$$

6.3.23 O altă metodă de rezolvare a sistemelor liniare omogene cu coeficienți constanți, numită *metoda eliminării*, se bazează pe faptul că fiecare dintre funcțiile necunoscute y_j verifică o ecuație diferențială liniară.

6.3.24 Exercițiu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_1. \end{cases}$$

Rezolvare. Funcția necunoscută y_1 verifică ecuația liniară

$$y_1''' - y_1 = 0.$$

Deoarece $P(r) = r^3 - 1$ are rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Prin derivarea lui y_1 , se obțin y_2 și y_3 .

6.3.25 Deoarece izomorfismul de spații vectoriale

$$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^{n^2} :$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

permite identificarea spațiului vectorial $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ cu $\mathbb{K}^{n^2}$, aplicația

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

este o normă pe $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. În particular, o serie de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

este *convergentă* dacă există limita

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k A^k$$

adică dacă există $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ astfel încât

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^m a_k A^k - B \right\| = 0.$$

6.3.26 Propoziție. *Dacă seria de puteri*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

are raza de convergență $R > 0$ și dacă $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este astfel încât $\|A\| < R$, atunci seria de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

este convergentă.

Demonstrație. Alegând r astfel încât $\|A\| < r < R$ obținem relația

$$\|a_k A^k\| = |a_k| \|A^k\| \leq |a_k| \|A\|^k < |a_k| r^k.$$

Seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ fiind absolut convergentă, din criteriul comparației rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ este convergentă, ceea ce implică convergența seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.

6.3.27 Deoarece seria exponențială

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

are raza de convergență $r = \infty$, rezultă că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ putem defini matricea

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots,$$

numită *exponențiala matricei A* . Se poate arăta că funcția matriceală

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : t \mapsto e^{tA}$$

este derivabilă și că $(e^{tA})' = A e^{tA}$ adică

$$Y(t) = e^{tA} C$$

este soluție a sistemului liniar $Y' = AY$, oricare ar fi $C \in \mathbb{R}^n$.

6.3.28 MATHEMATICA: `Series[Exp[A], {A, 0, n}]`

$$\text{In}[1] := \text{Series}[\text{Exp}[A], \{A, 0, 4\}] \mapsto \text{Out}[1] = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{24} + O[A]^5$$

6.3.29 Exercițiu. Să se determine soluția sistemului

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Rezolvare. Matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este diagonalizabilă

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$A = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1},$$

obținem

$$A^k = S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

și

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} S^{-1},$$

relație care permite scrierea explicită a soluției generale.

6.3.30 MATHEMATICA: Eigenvalues[A], Eigenvectors[A], MatrixForm[MatrixExp[tA]]

$$\text{In}[1] := \text{MatrixForm}[\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}] \mapsto \text{Out}[1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{In}[2] := \text{Eigenvalues}[\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}] \mapsto \text{Out}[2] = \{2, -1, -1\}$$

$$\text{In}[3] := \text{Eigenvectors}[\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}] \mapsto \text{Out}[3] = \{\{1, 1, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, 1, 0\}\}$$

$$\text{In}[4] := \text{MatrixForm}[\text{MatrixExp}[t \{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}]]$$

$$\mapsto \text{Out}[4] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(2 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) \\ \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(2 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) \\ \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3}e^{-t}(2 + e^{3t}) \end{pmatrix}$$

Capitolul 7

Reprezentări liniare

Vom prezenta câteva elemente referitoare la grupuri și reprezentările lor liniare.

7.1 Grupuri

7.1.1 Definiție. Prin *grup* se înțelege o mulțime G pe care este definită o lege de compoziție internă

$$G \times G \longrightarrow G : (x, y) \mapsto x y$$

satisfăcând condițiile:

- 1) $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3), \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G;$
 - 2) există $e \in G$ astfel încât $ge = eg = g, \quad \forall g \in G;$
 - 3) oricare ar fi $g \in G$, există $g^{-1} \in G$ astfel încât $gg^{-1} = g^{-1}g = e.$
- Grupul este numit *grup comutativ* (sau abelian) dacă, în plus,
- 4) $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G.$

7.1.2 Propoziție. a) *Elementul e cu proprietatea*

$$ge = eg = g, \quad \forall g \in G$$

este unic în G și se numește element neutru.

b) *Pentru orice $g \in G$, elementul g^{-1} cu proprietatea*

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

este unic în G și se numește inversul lui g .

Demonstrație. Avem

$$\left. \begin{array}{l} ge = eg = g, \quad \forall g \in G \\ ge' = e'g = g, \quad \forall g \in G \end{array} \right\} \implies e = ee' = e'$$

și

$$\left. \begin{array}{l} gg^{-1} = g^{-1}g = e \\ gh = hg = e \end{array} \right\} \implies h = he = h(gg^{-1}) = (hg)g^{-1} = eg^{-1} = g^{-1}.$$

7.1.3 În cazul în care în locul notației multiplicative g_1g_2 se utilizează notația aditivă $g_1 + g_2$, elementul neutru este notat cu 0. Elementul h cu proprietatea $h + g = g + h = 0$ este notat cu $-g$ și numit *opusul* lui g .

7.2 Reprezentări liniare

7.2.1 Definiție. Fie G și G' două grupuri. O aplicație

$$f : G \longrightarrow G'$$

este numită *morfism de grupuri* dacă

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

7.2.2 Mulțimea tuturor automorfismelor unui spațiu vectorial $\mathcal{V}$

$$GL(\mathcal{V}) = \{ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid A \text{ este liniară și bijectivă } \}$$

împreună cu operația de compunere este grup (*grupul automorfismelor* lui $\mathcal{V}$).

7.2.3 Definiție. Prin *reprezentare liniară* a grupului G în spațiul vectorial $\mathcal{V}$ peste corpul $\mathbb{K}$ (numită și *reprezentare $\mathbb{K}$ -liniară*) se înțelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}) : g \mapsto T(g),$$

adică o aplicație astfel încât

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Dimensiunea reprezentării este prin definiție dimensiunea lui $\mathcal{V}$.

7.2.4 Mulțimea matricelor inversabile de ordinul n cu elemente din $\mathbb{K}$

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0 \}$$

împreună cu înmulțirea matricelor este grup (numit *grupul general linear*).

7.2.5 Definiție. Prin *reprezentare matriceală* n -dimensională a unui grup G se înțelege un morfism de grupuri de forma

$$T : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : g \mapsto T(g).$$

Reprezentarea este numită reală în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ și complexă în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.2.6 Propoziție. Fie $\mathcal{V}$ un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. Dacă $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază a lui $\mathcal{V}$ și

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}) : g \mapsto T(g)$$

o reprezentare liniară a unui grup G în $\mathcal{V}$, atunci aplicația

$$\mathcal{T} : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}),$$

$$\mathcal{T}(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & t_{12}(g) & \cdots & t_{1n}(g) \\ t_{21}(g) & t_{22}(g) & \cdots & t_{2n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & t_{n2}(g) & \cdots & t_{nn}(g) \end{pmatrix},$$

unde elementele $t_{ij}(g)$ sunt astfel încât

$$T(g)e_j = \sum_{i=1}^n t_{ij}(g)e_i, \quad \forall g \in G, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

este o reprezentare matriceală n -dimensională a lui G .

Demonstrație. Deoarece $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$, din relațiile

$$\begin{aligned} T(g_1 g_2) e_j &= \sum_{i=1}^n t_{ij}(g_1 g_2) e_i, \\ T(g_1) T(g_2) e_j &= T(g_1) \sum_{k=1}^n t_{kj}(g_2) e_k = \sum_{k=1}^n t_{kj}(g_2) T(g_1) e_k \\ &= \sum_{k=1}^n t_{kj}(g_2) \sum_{i=1}^n t_{ik}(g_1) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n t_{ik}(g_1) t_{kj}(g_2) \right) e_i \end{aligned}$$

rezultă că

$$t_{ij}(g_1 g_2) = \sum_{k=1}^n t_{ik}(g_1) t_{kj}(g_2), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

adică $\mathcal{T}(g_1 g_2) = \mathcal{T}(g_1) \mathcal{T}(g_2)$.

7.2.7 Matricea $\mathcal{T}(g)$ este matricea transformării liniare $T(g) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ în raport cu baza considerată. Alegând o altă bază $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, se poate defini în mod similar reprezentarea

$$\mathcal{T}' : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : g \mapsto \mathcal{T}'(g).$$

Știm însă că cele două reprezentări matriceale sunt legate prin relația

$$\mathcal{T}'(g) = S^{-1} \mathcal{T}(g) S, \quad \forall g \in G,$$

unde S este matricea de trecere de la baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$.

7.2.8 Definiție. Două reprezentări matriceale n -dimensionale peste $\mathbb{K}$ ale unui grup

$$\mathcal{T}_1 : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) \quad \text{și} \quad \mathcal{T}_2 : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

sunt numite *echivalente* dacă există $S \in GL(n, \mathbb{K})$ astfel încât

$$\mathcal{T}_2(g) = S^{-1} \mathcal{T}_1(g) S, \quad \forall g \in G.$$

7.2.9 Aplicația $R : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2) : t \mapsto R(t)$, unde

$$R(t) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad R(t)(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t),$$

este o reprezentare liniară a grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$ în spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$.

Alegând în $\mathbb{R}^2$ baza $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, obținem reprezentarea matriceală

$$\mathcal{R} : \mathbb{R} \longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) : t \mapsto \mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Avem $\mathcal{R}(t + s) = \mathcal{R}(t) \mathcal{R}(s)$.

7.3 Reprezentări ireductibile

7.3.1 Definiție. Două reprezentări liniare n -dimensionale peste $\mathbb{K}$ ale unui grup G

$$T_1 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_1) \quad \text{și} \quad T_2 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_2)$$

sunt numite *echivalente* dacă există un izomorfism liniar $S : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ astfel încât

$$T_1(g) = S^{-1} T_2(g) S, \quad \forall g \in G,$$

adică astfel încât diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{T_1(g)} & \mathcal{V}_1 \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow{T_2(g)} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

este comutativă.

7.3.2 Definiție. Fie $T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V})$ o reprezentare liniară a grupului G în $\mathcal{V}$.

Spunem că subspațiul $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este *invariant* față de T dacă

$$T(g)(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}, \quad \forall g \in G.$$

7.3.3 Definiție. Spunem că reprezentarea liniară

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V})$$

este o *reprezentare ireductibilă* dacă singurele subspații invariante sunt $\{0\}$ și $\mathcal{V}$. În caz contrar, reprezentarea este numită *reductibilă*.

7.3.4 Reprezentarea liniară $T : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^3) : t \mapsto T(t)$, unde

$$T(t) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(t)(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z)$$

este o reprezentare liniară reductibilă a grupului aditiv $(\mathbb{R}, +)$ în $\mathbb{R}^3$.

Subspațiul $\mathcal{W} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ este subspațiu invariant.

7.3.5 Propoziție. *Dacă*

$$T_1 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_1) \quad \text{și} \quad T_2 : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_2)$$

sunt două reprezentări $\mathbb{K}$ -liniare, atunci aplicația

$$T : G \longrightarrow GL(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2), \quad T(g)(x_1, x_2) = (T_1(g)x_1, T_2(g)x_2)$$

este o reprezentare $\mathbb{K}$ -liniară a grupului G în spațiul produs direct $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, numită suma reprezentărilor T_1 și T_2 , notată cu $T_1 \oplus T_2$.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} T(g_1 g_2)(x_1, x_2) &= (T_1(g_1 g_2)x_1, T_2(g_1 g_2)x_2) \\ &= (T_1(g_1) T_1(g_2)x_1, T_2(g_1) T_2(g_2)x_2) \\ &= T(g_1)(T_1(g_2)x_1, T_2(g_2)x_2) = T(g_1)T(g_2)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

7.3.6 Propoziție. *Dacă*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) : g \mapsto \mathcal{T}(g) &= \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \cdots & t_{1n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \cdots & t_{nn}(g) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R} : G \longrightarrow GL(k, \mathbb{K}) : g \mapsto \mathcal{R}(g) &= \begin{pmatrix} r_{11}(g) & \cdots & r_{1k}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{k1}(g) & \cdots & r_{kk}(g) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sunt două reprezentări matriceale, atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \oplus \mathcal{R} : G \longrightarrow GL(n+k, \mathbb{K}) \\ (\mathcal{T} \oplus \mathcal{R})(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & \cdots & t_{1n}(g) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(g) & \cdots & t_{nn}(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{11}(g) & \cdots & r_{1k}(g) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{k1}(g) & \cdots & r_{kk}(g) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

este o reprezentare a lui G , numită suma reprezentărilor $\mathcal{T}$ și $\mathcal{R}$.

7.4 Reprezentări unitare și ortogonale

7.4.1 Definiție. O submulțime $H \subseteq G$ este numită *subgrup* al grupului G dacă

$$\left. \begin{array}{l} g_1 \in H \\ g_2 \in H \end{array} \right\} \implies g_1 g_2^{-1} \in H.$$

7.4.2 Fie $\mathcal{V}$ un spațiu Hilbert finit-dimensional. Mulțimea transformărilor unitare

$$U(\mathcal{V}) = \{ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{V} \}$$

este un subgrup al grupului $GL(\mathcal{V})$ al tuturor automorfismelor lui $\mathcal{V}$.

7.4.3 Definiție. Prin *reprezentare unitară* a grupului G în spațiul Hilbert $\mathcal{V}$ se înțelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow U(\mathcal{V}).$$

7.4.4 Dacă $T : G \longrightarrow U(\mathcal{V})$ este reprezentare unitară, atunci

$$\langle T(g)x, T(g)y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in G.$$

7.4.5 Teoremă. Mulțimea matricelor unitare de ordinul n

$$U(n) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^* A = I \}$$

are o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor, iar

$$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det A = 1 \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$.

Demonstrație. a) Produsul a două matrice unitare A și B este o matrice unitară

$$(AB)^* (AB) = B^* A^* AB = B^* B = I$$

și inversa unei matrice unitare A este o matrice unitară

$$A^{-1} = A^* \implies (A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}.$$

b) Afirmația rezultă din relațiile

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

7.4.6 Definiție. Prin *reprezentare matriceală unitară* a grupului G se înțelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow U(n).$$

7.4.7 Fie $\mathcal{V}$ un spațiu Hilbert real. Mulțimea transformărilor ortogonale

$$O(\mathcal{V}) = \{ A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{V} \}$$

este un subgrup al grupului $GL(\mathcal{V})$ al tuturor automorfismelor lui $\mathcal{V}$.

7.4.8 Definiție. Prin *reprezentare ortogonală* a grupului G în spațiul Hilbert real $\mathcal{V}$ se înțelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow O(\mathcal{V}).$$

7.4.9 Dacă $T : G \longrightarrow O(\mathcal{V})$ este o reprezentare ortogonală, atunci

$$\langle T(g)x, T(g)y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}, \quad \forall g \in G.$$

7.4.10 Fie $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ o matrice cu n linii și n coloane cu elemente numere reale și fie tA transpusa ei. Relațiile

$$A {}^tA = I, \quad {}^tA A = I, \quad A^{-1} = {}^tA,$$

unde $I \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ este matricea unitate, sunt echivalente (v. pag. 32-1).

7.4.11 Definiție. Matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ este numită *matrice ortogonală* dacă

$${}^tA A = I$$

(condiție echivalentă cu $A^{-1} = {}^tA$ și $A {}^tA = I$).

7.4.12 Dacă A este o matrice ortogonală, atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

7.4.13 Teoremă. Mulțimea matricelor ortogonale de ordinul n

$$O(n) = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid {}^tA A = I \}$$

are o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor, iar

$$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$$

este un subgrup al lui $U(n)$.

7.4.14 Definiție. Prin *reprezentare matriceală ortogonală* a grupului G se înțelege un morfism de grupuri

$$T : G \longrightarrow O(n).$$

7.5 Grupul rotațiilor. Reprezentări liniare

7.5.1 Propoziție.

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \right| = 1$$

și

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SO(2) \implies \begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 1 \\ \beta^2 + \delta^2 = 1 \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{cases}$$

Din relațiile $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ și $\beta^2 + \delta^2 = 1$ rezultă că există $t, s \in [0, 2\pi)$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin s \\ \sin t & \cos s \end{pmatrix},$$

dar

$$\left. \begin{matrix} \alpha\beta + \gamma\delta = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{matrix} \right\} \implies \left. \begin{matrix} \sin(t+s) = 0 \\ \cos(t+s) = 1. \end{matrix} \right\} \implies \begin{cases} s = -t \\ \text{sau} \\ s = 2\pi - t. \end{cases}$$

7.5.2 Exercițiu. Dacă $A \in SO(3)$, atunci există $t \in [0, 2\pi)$ și o matrice $S \in O(3)$ astfel încât

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Matricea A este matricea în raport cu baza canonică a unei transformări ortogonale $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \lambda - \det A = 0$$

Deoarece ${}^tA = A^{-1}$, adică

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

și $\det A = 1$, rezultă că $\lambda = 1$ este valoare proprie a lui A . Fie e_1 un vector propriu corespunzător cu $\|e_1\| = 1$, adică $Ae_1 = e_1$. Subspațiul vectorilor ortogonali pe e_1

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\}$$

este un subspațiu invariant

$$x \in \mathcal{V} \implies \langle Ax, e_1 \rangle = \langle Ax, Ae_1 \rangle = \langle x, e_1 \rangle = 0.$$

Dacă $\{e_2, e_3\}$ este o bază ortonormată în $\mathcal{V}$, atunci $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$, în raport cu care matricea lui A are forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

unde $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ este o matrice ortogonală. Notând cu S matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}$, avem relația

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} S,$$

din care rezultă

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1,$$

ceea ce arată că $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SO(2)$. Conform exercițiului anterior există $t \in [0, 2\pi)$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

7.5.3 Matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

este matricea unei rotații în jurul vectorului e_1 (vectorul propriu corespunzător valorii $\lambda=1$). Grupul $SO(3)$ este grupul rotațiilor spațiului tridimensional.

7.5.4 Aplicația $SO(3) \rightarrow O(\mathbb{R}^3)$ prin care matricei

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3)$$

i se asociază transformarea ortogonală $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

este o reprezentare ortogonală a grupului $SO(3)$ în $\mathbb{R}^3$.

7.5.5 Exercițiu. Aplicația

$$T : SO(3) \rightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})) : g \mapsto T(g),$$

unde

$$T(g) : \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}), \quad (T(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$

este o reprezentare liniară în spațiul vectorial complex $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ al tuturor funcțiilor

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}.$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned}
(T(g_1 g_2)f)(x) &= f((g_1 g_2)^{-1}x) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}x) \\
&= f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (T(g_2)f)(g_1^{-1}x) \\
&= (T(g_1)(T(g_2)f))(x) = (T(g_1)T(g_2)f)(x).
\end{aligned}$$

7.5.6 Mulțimea de matrice

$$O(1, 3) = \{ A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A I_{1,3} {}^t A = I_{1,3} \},$$

unde

$$I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

considerată împreună cu înmulțirea este grup (se numește *grupul Lorentz*).

7.5.7 Exercițiu.

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Rezolvare. Avem

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2) \implies \begin{cases} \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta = 0 \\ -\beta\gamma + \alpha\delta = 1 \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = -\bar{\beta} \\ \delta = \bar{\alpha} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \end{cases}$$

7.5.8 Grupul $SU(2)$ admite parametrizarea

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)/2} \cos \frac{1}{2}\theta & i e^{i(\varphi-\psi)/2} \sin \frac{1}{2}\theta \\ i e^{-i(\varphi-\psi)/2} \sin \frac{1}{2}\theta & e^{-i(\varphi+\psi)/2} \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ -2\pi \leq \psi \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

cu proprietatea

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)/2} \cos \frac{1}{2}\theta & i e^{i(\varphi-\psi)/2} \sin \frac{1}{2}\theta \\ i e^{-i(\varphi-\psi)/2} \sin \frac{1}{2}\theta & e^{-i(\varphi+\psi)/2} \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta & i \sin \frac{1}{2}\theta \\ i \sin \frac{1}{2}\theta & \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

parametrii φ, θ, ψ fiind numiți *unghiurile lui Euler*.

7.5.9 Exercițiu. Dacă $a, b \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, atunci

$$\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba).$$

Rezolvare. Avem

$$\operatorname{tr}(ab) = \sum_{i=1}^n (ab)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n (ba)_{jj} = \operatorname{tr}(ba).$$

7.5.10 Folosind baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, putem identifica grupul $SO(3)$ cu grupul de transformări

$$\{ A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \det A = 1, \|Ax\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \}.$$

7.5.11 Propoziție. a) Spațiul matricelor antihermitiene de ordinul doi cu urmă nulă

$$\mathcal{W} = \{ u \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid u^* = -u, \quad \operatorname{tr} u = 0 \}$$

este un spațiu vectorial real de dimensiune 3 și

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{W}, \quad h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}$$

este un izomorfism cu proprietatea

$$\|x\|^2 = \det h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

b) Aplicația

$$\eta : SU(2) \longrightarrow SO(3) : g \mapsto \eta(g),$$

unde

$$\eta(g) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \eta(g)x = h^{-1}(g h(x) g^*)$$

este un morfism de grupuri cu nucleul

$$\operatorname{Ker} \eta = \left\{ g \in SU(2) \mid \eta(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demonstrație. a) Avem

$$u = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + i\beta_{11} & \alpha_{12} + i\beta_{12} \\ \alpha_{21} + i\beta_{21} & \alpha_{22} + i\beta_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \implies u = \begin{pmatrix} i\beta_{11} & \alpha_{12} + i\beta_{12} \\ -\alpha_{12} + i\beta_{12} & -i\beta_{11} \end{pmatrix}.$$

b) Din definiția lui η rezultă că

$$\begin{aligned}
\eta(g_1 g_2)x &= h^{-1}((g_1 g_2) h(x) (g_1 g_2)^*) = h^{-1}(g_1 g_2 h(x) g_2^* g_1^*) \\
&= h^{-1}(g_1 h(h^{-1}(g_2 h(x) g_2^*))g_1^*) = \eta(g_1)(\eta(g_2)x) = (\eta(g_1) \eta(g_2))x.
\end{aligned}$$

Utilizând baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, obținem relațiile

$$\begin{aligned}
\eta \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\eta \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta & i \sin \frac{1}{2}\theta \\ i \sin \frac{1}{2}\theta & \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

din care deducem că $\det \eta(g) = 1$. Deoarece

$$(g h(x) g^*)^* = g (h(x))^* g^* = -g h(x) g^*$$

$$\operatorname{tr}(g h(x) g^*) = \operatorname{tr}(g g^* h(x)) = \operatorname{tr} h(x) = 0$$

$$||\eta(g)x||^2 = \det(g h(x) g^*) = \det h(x) = ||x||^2$$

rezultă că η este un morfism de grupuri bine definit. Elementul $g \in SU(2)$ aparține nucleului lui η dacă și numai dacă $\eta(g)x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^3$. Din relațiile

$$\eta(g)(1, 0, 0) = (1, 0, 0), \quad \eta(g)(0, 1, 0) = (0, 1, 0), \quad \eta(g)(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

rezultă că $g \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

7.5.12 Prin morfismul $\eta : SU(2) \rightarrow SO(3)$, fiecare element al lui $SO(3)$ corespunde la două elemente din $SU(2)$ care diferă doar prin semn, $\eta(g) = \eta(-g)$. Orice reprezentare liniară

$$T : SU(2) \rightarrow GL(\mathcal{V})$$

cu $T(g) = T(-g)$ definește o reprezentare liniară a grupului $SO(3)$.

7.5.13 Exercițiu. Aplicația $SU(2) \rightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ obținută asociind fiecărui element

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

transformarea

$$g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad g(z_1, z_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2, -\bar{\beta} z_1 + \bar{\alpha} z_2)$$

este o reprezentare unitară bidimensională a lui $SU(2)$.

Rezolvare. Avem $(g_1 g_2)(z_1, z_2) = g_1(g_2(z_1, z_2))$.

7.5.14 Exercițiu. a) Aplicația $T : SU(2) \longrightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}))$ obținută asociind fiecărui element $g \in SU(2)$ transformarea

$$T(g) : \mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}), \quad (T(g)f)(z_1, z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2))$$

este o reprezentare liniară a grupului $SU(2)$ în spațiul vectorial complex al tuturor funcțiilor $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ subspațiul vectorial al polinoamelor omogene de grad n

$$\mathcal{E}_n = \left\{ f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \mid a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

este un subspațiu invariant al reprezentării de la punctul a).

Rezolvare. Inversul elementului

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

este

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix},$$

iar în cazul

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k}$$

obținem

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = f(g^{-1}(z_1, z_2)) = \sum_{k=0}^n a_k (\bar{\alpha} z_1 - \beta z_2)^k (\bar{\beta} z_1 + \alpha z_2)^{n-k}.$$

7.5.15 Se poate arăta că reprezentările lui $SU(2)$ induse în subspațiile $\mathcal{E}_n$ sunt reprezentări ireductibile, și că ele sunt până la o echivalență toate reprezentările ireductibile ale grupului $SU(2)$. Notând $j = (n-1)/2$, adică $n = 2j+1$, obținem

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{m=-j}^j a_{j+m} z_1^{j+m} z_2^{j-m}.$$

și

$$(T(g)f)(z_1, z_2) = \sum_{m=-j}^j a_{j+m} (\bar{\alpha}z_1 - \beta z_2)^{j+m} (\bar{\beta}z_1 + \alpha z_2)^{j-m}.$$

Pentru fiecare element $a \in SO(3)$ există exact două elemente g_a și $-g_a$ în $SU(2)$ astfel încât $a = \eta(g_a) = \eta(-g_a)$. Deoarece

$$(T(-g)f)(z_1, z_2) = (-1)^{2j} (T(g)f)(z_1, z_2),$$

în cazul în care j este întreg, relația

$$SO(3) \longrightarrow GL(\mathcal{E}_{2j+1}) : a \mapsto T(g_a)$$

este o reprezentare ireductibilă $(2j+1)$ -dimensională a grupului $SO(3)$ în spațiul vectorial $\mathcal{E}_{2j+1}$.

Capitolul 8

Algebre Lie

8.1 Algebre Lie

8.1.1 Definiție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$. Prin *algebră asociativă* peste corpul $\mathbb{K}$ se înțelege o mulțime $\mathcal{A}$ considerată împreună cu trei operații

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} : (a, b) \mapsto a + b && \text{(adunarea)} \\ \mathbb{K} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} : (\alpha, a) \mapsto \alpha a && \text{(înmulțirea cu scalari)} \\ \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} : (a, b) \mapsto ab && \text{(înmulțirea internă)}\end{aligned}$$

astfel încât $\mathcal{A}$ împreună cu primele două operații este spațiu vectorial și

- 1) $a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A};$
- 2) $(a + b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A};$
- 3) $a(bc) = (ab)c, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A};$
- 4) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Prin dimensiunea algebrei $\mathcal{A}$ se înțelege dimensiunea spațiului vectorial $\mathcal{A}$.

8.1.2 Exemple. a) Mulțimea $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ a tuturor matricelor pătrate de ordinul n , considerată împreună cu operațiile de adunare a matricelor, înmulțire cu scalari și produsul matricelor, este o algebră asociativă peste $\mathbb{K}$.
b) Dacă $\mathcal{V}$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$, atunci mulțimea $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ a tuturor operatorilor liniari $A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, considerată împreună cu adunarea operatorilor, înmulțirea cu scalari și compunerea operatorilor, este o algebră asociativă peste $\mathbb{K}$.

8.1.3 Definiție. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$. Prin *algebră Lie* peste corpul

$\mathbb{K}$ se înțelege o mulțime L considerată împreună cu trei operații

$$\begin{aligned} L \times L &\longrightarrow L : (a, b) \mapsto a + b && \text{(adunarea),} \\ \mathbb{K} \times L &\longrightarrow L : (\alpha, a) \mapsto \alpha a && \text{(înmulțirea cu scalari),} \\ L \times L &\longrightarrow L : (a, b) \mapsto [a, b] && \text{(croșetul)} \end{aligned}$$

astfel încât L împreună cu primele două operații este spațiu vectorial și

- 1) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c], \quad \forall a, b, c \in L, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K};$
- 2) $[a, b] + [b, a] = 0, \quad \forall a, b \in L;$
- 3) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0, \quad \forall a, b, c \in A$ (identitatea Jacobi).

Prin *dimensiunea* algebrei Lie se înțelege dimensiunea spațiului vectorial L .

8.1.4 O algebră Lie L poate fi privită ca un spațiu vectorial L pe care s-a definit o lege de compoziție internă suplimentară

$$L \times L \longrightarrow L : (a, b) \mapsto [a, b]$$

compatibilă cu structura de spațiu vectorial.

8.1.5 Propoziție. a) *Plecând de la orice algebră asociativă $\mathcal{A}$, se obține o structură de algebră Lie pe $\mathcal{A}$ definind croșetul prin*

$$[a, b] = ab - ba.$$

b) *Algebra Lie peste $\mathbb{K}$ obținută plecând de la $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ se notează cu $gl(n, \mathbb{K})$.*

c) *Algebra Lie peste $\mathbb{K}$ obținută plecând de la $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ se notează cu $gl(\mathcal{V})$.*

Demonstrație. Avem

$$[\alpha a + \beta b, c] = (\alpha a + \beta b)c - c(\alpha a + \beta b) = \alpha(ac - ca) + \beta(bc - cb) = \alpha[a, c] + \beta[b, c],$$

$$[a, b] = ab - ba = -(ba - ab) = -[b, a],$$

$$\begin{aligned} [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] &= [(ab - ba), c] + [(bc - cb), a] + [(ca - ac), b] \\ &= (ab - ba)c - c(ab - ba) + (bc - cb)a - a(bc - cb) + (ca - ac)b - b(ca - ac) = 0. \end{aligned}$$

8.1.6 Definiție. Prin *bază* a algebrei Lie L se înțelege o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a spațiului L , privit ca spațiu vectorial. Coeficienții $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ din relațiile

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k$$

se numesc *constantele de structură* ale algebrei L referitoare la baza aleasă.

8.1.7 Notând

$$e_j^i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(singurul element nenul este la intersecția dintre coloana i și linia j), orice matrice admite reprezentarea

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_i^j e_j^i = a_i^j e_j^i.$$

În cazul $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = a_1^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = a_1^1 e_1^1 + a_2^1 e_1^2 + a_1^2 e_2^1 + a_2^2 e_2^2.$$

8.1.8 Propoziție. Algebra Lie $gl(n, \mathbb{K})$, de dimensiune n^2 , admite baza

$$\{e_j^i \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\} \quad \text{cu} \quad [e_j^i, e_m^k] = \delta_m^i e_j^k - \delta_j^k e_m^i.$$

Demonstrație. Avem $e_j^i e_m^k = \delta_m^i e_j^k$.

8.1.9 Definiție. Prin *subalgebră Lie* a algebrei L se înțelege un subspațiu vectorial

$$L_1 \subseteq L$$

astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} a \in L_1 \\ b \in L_1 \end{array} \right\} \implies [a, b] \in L_1.$$

8.1.10 Fiecare subalgebră Lie a unei algebre L are o structură de algebră Lie.

8.1.11 Exercițiu. a) Mulțimea matricelor cu urmă nulă

$$sl(n, \mathbb{K}) = \{g \in gl(n, \mathbb{K}) \mid \text{tr } g = g_1^1 + g_2^2 + \cdots + g_n^n = 0\}$$

este o subalgebră Lie, de dimensiune $n^2 - 1$, a algebrei $gl(n, \mathbb{K})$.

b) Mulțimea matricelor *antihermitiene*

$$u(n) = \{ g \in gl(n, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} = -g \}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune n^2 .

c) Mulțimea matricelor antihermitiene cu urmă nulă

$$su(n) = u(n) \cap sl(n, \mathbb{C}) = \{ g \in u(n) \mid \text{tr } g = 0 \}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune $n^2 - 1$.

d) Mulțimea matricelor *strâmb simetrice*

$$o(n) = \{ g \in gl(n, \mathbb{R}) \mid {}^t g = -g \}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune $\frac{n(n-1)}{2}$.

e) Mulțimea de matrice

$$o(1, 3) = \left\{ g \in gl(4, \mathbb{R}) \mid g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t g \right\}$$

are o structură naturală de algebră Lie reală de dimensiune 6 (numită algebra Lie a grupului Lorentz).

Rezolvare. a) Avem $\text{tr}(a + b) = \text{tr } a + \text{tr } b$, $\text{tr}(\alpha a) = \alpha \text{tr } a$,

$$\text{tr } ab = \sum_{k=1}^n (ab)_k^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^k b_k^j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_k^j a_j^k = \sum_{j=1}^n (ba)_j^j = \text{tr } ba$$

și prin urmare, $\text{tr } [a, b] = \text{tr}(ab - ba) = 0$, oricare ar fi $a, b \in gl(n, \mathbb{K})$. O bază a algebrei Lie $sl(n, \mathbb{K})$ este

$$\{ e_k^j \mid k \neq j \} \cup \{ e_k^k - e_n^n \mid k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \}.$$

b) Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ și $a, b \in u(n)$, atunci

$${}^t(\overline{\alpha a}) = \bar{\alpha} {}^t \bar{a} = -(\alpha a),$$

$${}^t(\overline{a + b}) = {}^t \bar{a} + {}^t \bar{b} = -a - b = -(a + b),$$

$${}^t[\overline{a, b}] = {}^t(\overline{ab - ba}) = {}^t \bar{b} {}^t \bar{a} - {}^t \bar{a} {}^t \bar{b} = ba - ab = -[a, b].$$

O bază a algebrei Lie $u(n)$ este

$$\{e_k^j - e_j^k \mid k < j\} \cup \{i(e_k^j + e_j^k) \mid k < j\} \cup \{ie_k^k \mid k \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

c) O bază a algebrei Lie $su(n)$ este

$$\{e_k^j - e_j^k \mid k < j\} \cup \{i(e_k^j + e_j^k) \mid k < j\} \cup \{i(e_k^k - e_n^n) \mid k \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}.$$

d) O bază a algebrei Lie $o(n)$ este

$$\{e_k^j - e_j^k \mid k < j\}.$$

e) Se obține

$$o(1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & -\alpha_4 & 0 & \alpha_6 \\ \alpha_3 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R} \right\}.$$

O bază a algebrei Lie $o(1, 3)$ este $\{e_1^2 + e_2^1, e_1^3 + e_3^1, e_1^4 + e_4^1, e_1^3 - e_3^1, e_2^4 - e_4^2, e_3^4 - e_4^3\}$.

8.1.12 Definiție. Fie $G \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ un subgrup. Prin *subgrup cu un parametru* al grupului G se înțelege un morfism de grupuri

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow G,$$

adică o aplicație astfel încât

$$g(t + s) = g(t)g(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

8.1.13 Exercițiu. Oricare ar fi matricea $a \in gl(n, \mathbb{K})$, aplicația

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}), \quad g(t) = e^{ta},$$

este un subgrup cu un parametru al lui $GL(n, \mathbb{K})$ astfel încât

$$\frac{dg}{dt}(0) = a$$

(a poate fi privit ca fiind “generatorul infinitezimal” al subgrupului considerat).

Rezolvare. Ținând seama de definiția exponențialei unei matrice obținem

$$g(t + s) = e^{(t+s)a} = e^{ta} e^{sa} = g(t)g(s), \quad \frac{d}{dt}e^{ta} = ae^{ta}.$$

8.1.14 Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ este diagonalizabilă, atunci există o matrice inversabilă $S \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ astfel încât

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} S,$$

relație din care rezultă $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ și egalitatea

$$e^A = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S,$$

care conduce la

$$\det e^A = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr } A}.$$

Se poate arăta că relația $\det e^A = e^{\text{tr } A}$ are loc pentru orice matrice A .

8.1.15 Exercițiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K})$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{dg}{dt}(0) \in sl(n, \mathbb{K})$.

b) Dacă $a \in sl(n, \mathbb{K})$, atunci $e^{ta} \in SL(n, \mathbb{K})$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ și aplicația

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}), \quad g(t) = e^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $SL(n, \mathbb{K})$ astfel încât $\frac{dg}{dt}(0) = a$.

Rezolvare (cazul $n=2$). Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}), \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix},$$

este un subgrup cu un parametru, atunci

$$\begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivând această relație obținem egalitatea

$$\begin{vmatrix} g'_{11}(t) & g'_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g'_{21}(t) & g'_{22}(t) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

care în cazul $t = 0$ devine

$$\begin{vmatrix} g'_{11}(0) & g'_{12}(0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'_{21}(0) & g'_{22}(0) \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\operatorname{tr} \frac{dg}{dt}(0) = g'_{11}(0) + g'_{22}(0) = 0.$$

Exercițiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{dg}{dt}(0) \in u(n)$.

b) Dacă $a \in u(n)$, atunci $e^{ta} \in U(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ și aplicația

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n), \quad g(t) = e^{ta},$$

este un subgrup cu un parametru al lui $U(n)$ astfel încât $\frac{dg}{dt}(0) = a$.

Rezolvare. Dacă $g : \mathbb{R} \longrightarrow U(n)$ este un subgrup cu un parametru, atunci

$$g(t) {}^t\overline{g}(t) = I \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivând această relație obținem egalitatea

$$\frac{d}{dt}g(t) {}^t\overline{g}(t) + g(t) \frac{d}{dt} {}^t\overline{g}(t) = 0$$

care în cazul $t = 0$ devine

$$\frac{d}{dt}g(0) + \frac{d}{dt} {}^t\overline{g}(0) = 0.$$

8.1.16 Exercițiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SU(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{dg}{dt}(0) \in su(n)$.

b) Dacă $a \in su(n)$, atunci $e^{ta} \in SU(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ și aplicația

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow SU(n), \quad g(t) = e^{ta},$$

este un subgrup cu un parametru al lui $SU(n)$ astfel încât $\frac{dg}{dt}(0) = a$.

8.1.17 Exercițiu. a) Dacă

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow O(n)$$

este un subgrup cu un parametru, atunci $\frac{dg}{dt}(0) \in o(n)$.

b) Dacă $a \in o(n)$, atunci $e^{ta} \in O(n)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$ și aplicația

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow O(n), \quad g(t) = e^{ta}$$

este un subgrup cu un parametru al lui $O(n)$ astfel încât $\frac{dg}{dt}(0) = a$.

8.2 Reprezentări liniare

8.2.1 Definiție. Fie L o algebră Lie peste $\mathbb{K}$ și L' o algebră Lie peste $\mathbb{K}'$, unde corpurile $\mathbb{K}$ și $\mathbb{K}'$ aparținând lui $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, sunt astfel încât $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$. Prin *morfism de algebre Lie* de la L la L' se înțelege o aplicație liniară $A : L \longrightarrow L'$ cu proprietatea

$$A([a, b]) = [Aa, Ab], \quad \forall a, b \in L.$$

8.2.2 Definiție. Spunem ca algebrele Lie L și L' peste același corp $\mathbb{K}$ sunt *izomorfe* dacă există un morfism bijectiv de algebre Lie (numit izomorfism)

$$A : L \longrightarrow L'.$$

8.2.3 Propoziție. Dacă algebrele Lie L și L' peste același corp $\mathbb{K}$ și de aceeași dimensiune au în raport cu două baze $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și respectiv $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ aceleași constante de structură

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad [e'_i, e'_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e'_k,$$

atunci ele sunt izomorfe.

Demonstrație. Aplicația $A : L \longrightarrow L'$, $Ae_j = e'_j$, adică

$$A\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i e'_i$$

este un izomorfism de algebre Lie. Ea este, evident, liniară, bijectivă și

$$\begin{aligned} A[a, b] &= A\left[\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j\right] = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j A[e_i, e_j] \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \sum_{k=1}^n c_{ij}^k A e_k = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e'_k \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j [e'_i, e'_j] = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j [Ae_i, Ae_j] = [Aa, Ab]. \end{aligned}$$

8.2.4 Propoziție. Algebrele Lie reale $o(3)$ și $su(2)$ sunt izomorfe.

Demonstrație. Algebra Lie $o(3)$ admite baza

$$\{o_1 = e_3^2 - e_2^3, \quad o_2 = e_1^3 - e_3^1, \quad o_3 = e_2^1 - e_1^2\}$$

cu

$$[o_1, o_2] = o_3, \quad [o_2, o_3] = o_1, \quad [o_3, o_1] = o_2,$$

iar algebra Lie $su(2)$ baza

$$\left\{ u_1 = -\frac{i}{2}(e_1^1 - e_2^2), \quad u_2 = -\frac{1}{2}(e_2^1 - e_1^2), \quad u_3 = -\frac{i}{2}(e_2^1 + e_1^2) \right\}$$

cu

$$[u_1, u_2] = u_3, \quad [u_2, u_3] = u_1, \quad [u_3, u_1] = u_2.$$

8.2.5 Definiție. Prin *reprezentare liniară* a algebrei Lie L în spațiul vectorial complex $\mathcal{V}$ (numită și *reprezentare $\mathbb{C}$ -liniară*) se înțelege un morfism de algebre

$$\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}),$$

adică o aplicație liniară cu proprietatea

$$\varrho([a, b]) = \varrho(a)\varrho(b) - \varrho(b)\varrho(a), \quad \forall a, b \in L.$$

8.2.6 Exercițiu. Dacă L este o algebră Lie complexă, atunci aplicația

$$\varrho : L \longrightarrow gl(L) : a \mapsto \varrho(a),$$

unde

$$\varrho(a) : L \longrightarrow L, \quad \varrho(a)x = [a, x],$$

este o reprezentare liniară a algebrei L în spațiul L , numită *reprezentarea adjunctă*.

Rezolvare. Aplicația ϱ este bine definită

$$\varrho(a)(\alpha x + \beta y) = [a, \alpha x + \beta y] = \alpha[a, x] + \beta[a, y] = \alpha\varrho(a)x + \beta\varrho(a)y$$

liniară

$$\varrho(\alpha a + \beta b)x = [\alpha a + \beta b, x] = \alpha[a, x] + \beta[b, x] = (\alpha\varrho(a) + \beta\varrho(b))x$$

și din identitatea Jacobi rezultă

$$\begin{aligned}
\varrho([a, b])x &= [[a, b], x] = -[[b, x], a] - [[x, a], b] = [a, [b, x]] - [b, [a, x]] \\
&= \varrho(a)(\varrho(b)x) - \varrho(b)(\varrho(a)x) = (\varrho(a)\varrho(b) - \varrho(b)\varrho(a))x = [\varrho(a), \varrho(b)]x.
\end{aligned}$$

8.3 Reprezentări ireductibile

8.3.1 Definiție. Fie $\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$ o reprezentare liniară a algebrei Lie L în $\mathcal{V}$.

Spunem că subspațiul vectorial $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ este *invariant* față de ϱ dacă

$$\varrho(a)(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}, \quad \forall a \in L,$$

adică dacă

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{W} \\ a \in L \end{array} \right\} \implies \varrho(a)x \in \mathcal{W}.$$

8.3.2 Definiție. Spunem că reprezentarea liniară $\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$ este o *reprezentare ireductibilă* dacă singurele subspații invariante sunt $\{0\}$ și $\mathcal{V}$.

În caz contrar, reprezentarea este numită *reductibilă*.

8.3.3 Propoziție. Fie L_1, L_2 două algebre Lie izomorfe, $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ un izomorfism de algebre Lie. Dacă

$$\varrho_2 : L_2 \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare liniară a algebrei L_2 , atunci

$$\varrho_1 : L_1 \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \quad \varrho_1(a) = \varrho_2(\varphi(a)),$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L_1 în $\mathcal{V}$. Reprezentarea ϱ_1 este ireductibilă dacă și numai dacă ϱ_2 este ireductibilă.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned}
\varrho_1(\alpha a + \beta b) &= \varrho_2(\varphi(\alpha a + \beta b)) = \varrho_2(\alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b)) \\
&= \alpha \varrho_2(\varphi(a)) - \beta \varrho_2(\varphi(b)) = \alpha \varrho_1(a) - \beta \varrho_1(b), \\
\varrho_1([a, b]) &= \varrho_2(\varphi([a, b])) = \varrho_2([\varphi(a), \varphi(b)]) \\
&= [\varrho_2(\varphi(a)), \varrho_2(\varphi(b))] = [\varrho_1(a), \varrho_1(b)].
\end{aligned}$$

Dacă $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ este un subspațiu vectorial, atunci avem

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_2(a)x \in \mathcal{W}, \quad \forall a \in L_2,$$

dacă și numai dacă

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_1(a)x = \varrho_2(\varphi(a)) \in \mathcal{W}, \quad \forall a \in L_1.$$

8.3.4 Cunoașterea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie $\mathfrak{o}(3)$ este echivalentă cu cunoașterea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie $\mathfrak{su}(2)$.

8.3.5 Exercițiu. Dacă $S : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ este un izomorfism de spații vectoriale și

$$\varrho_2 : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{V}_2)$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L în spațiul vectorial $\mathcal{V}_2$, atunci

$$\varrho_1 : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{V}_1), \quad \varrho_1(a) = S^{-1} \varrho_2(a) S,$$

este o reprezentare liniară a algebrei Lie L în spațiul vectorial $\mathcal{V}_1$.

Reprezentarea ϱ_1 este ireductibilă dacă și numai dacă ϱ_2 este ireductibilă.

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} \varrho_1(\alpha a + \beta b) &= S^{-1} \varrho_2(\alpha a + \beta b) S \\ &= \alpha S^{-1} \varrho_2(a) S + \beta S^{-1} \varrho_2(b) S = \alpha \varrho_1(a) + \beta \varrho_1(b), \\ \varrho_1([a, b]) &= S^{-1} \varrho_2([a, b]) S = S^{-1} (\varrho_2(a) \varrho_2(b) - \varrho_2(b) \varrho_2(a)) S^{-1} \\ &= S \varrho_2(a) S S^{-1} \varrho_2(b) S - S^{-1} \varrho_2(b) S S^{-1} \varrho_2(a) S \\ &= \varrho_1(a) \varrho_1(b) - \varrho_1(b) \varrho_1(a) = [\varrho_1(a), \varrho_1(b)]. \end{aligned}$$

Subspațiul $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_1$ este invariant dacă și numai dacă $S(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}_2$ este invariant. Dacă subspațiul $S(\mathcal{W})$ este invariant, adică

$$y \in S(\mathcal{W}) \implies \varrho_2(a)y \in S(\mathcal{W}), \quad \forall a \in L,$$

atunci

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_1(a)x = S^{-1} \varrho_2(a) Sx \in \mathcal{W}, \quad \forall a \in L.$$

Deoarece $\varrho_2(a) = S \varrho_1(a) S^{-1}$, din

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho_1(a)x \in \mathcal{W}, \quad \forall a \in L,$$

rezultă

$$Sx \in S(\mathcal{W}) \implies \varrho_2(a)Sx = S\varrho_1(a)x \in S(\mathcal{W}), \quad \forall a \in L.$$

8.3.6 Definiție. Spunem că reprezentările liniare

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1) \quad \text{și} \quad \varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_2)$$

sunt *echivalente* dacă există un izomorfism liniar $S : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ astfel încât

$$\varrho_1(a) = S^{-1} \varrho_2(a) S, \quad (8.1)$$

adică dacă diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{\varrho_1(a)} & \mathcal{V}_1 \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ \mathcal{V}_2 & \xrightarrow{\varrho_2(a)} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

este comutativă, oricare ar fi $a \in L$.

8.4 Reprezentările algebrelor $sl(2, \mathbb{C})$, $su(2)$ și $o(3)$

8.4.1 Exercițiu. Să se arate că matricele

$$a_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formează o bază a algebrei Lie complexe $sl(2, \mathbb{C})$ și

$$[a_3, a_{\pm}] = \pm a_{\pm}, \quad [a_+, a_-] = 2a_3.$$

Dacă

$$\varrho : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare a algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$ în spațiul $\mathcal{V}$, atunci

$$A_3 = \varrho(a_3), \quad A_+ = \varrho(a_+), \quad A_- = \varrho(a_-)$$

verifică relațiile

$$[A_3, A_{\pm}] = \pm A_{\pm}, \quad [A_+, A_-] = 2 A_3.$$

Rezolvare. Matricea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

apartine algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$ dacă și numai dacă $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$. Dar, în acest caz,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{11} \end{pmatrix} = 2\alpha_{11} a_3 + \alpha_{12} a_+ + \alpha_{21} a_- .$$

Deoarece ϱ este morfism de algebre Lie obținem

$$[A_3, A_{\pm}] = [\varrho(a_3), \varrho(a_{\pm})] = \varrho([a_3, a_{\pm}]) = \varrho(\pm a_{\pm}) = \pm \varrho(a_{\pm}) = \pm A_{\pm},$$

$$[A_+, A_-] = [\varrho(a_+), \varrho(a_-)] = \varrho([a_+, a_-]) = \varrho(2 a_3) = 2 \varrho(a_3) = 2 A_3.$$

8.4.2 Propoziție. Dacă

$$\varrho : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este reprezentare ireductibilă de dimensiune $n=2j+1$,

atunci există $v \neq 0$ astfel încât

$$A_3 v = j v \quad \text{și} \quad A_+ v = 0,$$

$$\text{unde } A_3 = \varrho(a_3), \quad A_+ = \varrho(a_+).$$

Demonstrație. Operatorul liniar $A_3 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ admite cel puțin o valoare proprie $\lambda \in \mathbb{C}$. Fie $x_0 \in \mathcal{V}$ un vector propriu corespunzător, adică $A_3 x_0 = \lambda x_0$. Deoarece

$$A_3(A_+ x_0) = (A_3 A_+) x_0 = (A_+ A_3 + A_+) x_0 = A_+ A_3 x_0 + A_+ x_0 = (\lambda + 1) A_+ x_0,$$

rezultă că vectorul $x_1 = A_+ x_0$ verifică relația

$$A_3 x_1 = (\lambda + 1) x_1.$$

Similar, din

$$A_3(A_+ x_1) = (A_3 A_+) x_1 = (A_+ A_3 + A_+) x_1 = A_+ A_3 x_1 + A_+ x_1 = (\lambda + 2) A_+ x_1$$

rezultă că vectorul $x_2 = A_+ x_1 = (A_+)^2 x_0$ verifică relația

$$A_3 x_2 = (\lambda + 2) x_2.$$

Se poate astfel arăta că toți vectorii din șirul

$$x_0, \quad x_1 = A_+ x_0, \quad x_2 = (A_+)^2 x_0, \quad x_3 = (A_+)^3 x_0, \quad \dots$$

verifică relația

$$A_3 x_k = (\lambda + k) x_k.$$

Vectorii nenuli din acest șir sunt vectori proprii ai lui A_3 , și deoarece corespund la valori proprii distincte, ei sunt liniar independenți. Spațiul $\mathcal{V}$ fiind finit dimensional, rezultă ca șirul $x_0, x_1, x_2, \dots$ poate conține doar un număr finit de vectori nenuli, adică există $x_l \neq 0$ cu $x_{l+1} = A_+ x_l = 0$. Alegând $v = x_l$, avem $A_+ v = 0$. Fie șirul de vectori

$$w_0 = v, \quad w_1 = A_- w_0, \quad w_2 = (A_-)^2 w_0, \quad \dots$$

Avem

$$A_3 w_0 = (\lambda + l) w_0,$$

$$A_3 w_1 = A_3 (A_- w_0) = (A_3 A_-) w_0 = (A_- A_3 - A_-) w_0 = (\lambda + l - 1) w_1,$$

$$A_3 w_2 = A_3 (A_- w_1) = (A_3 A_-) w_1 = (A_- A_3 - A_-) w_1 = (\lambda + l - 2) w_2$$

și, în general,

$$A_3 w_k = (\lambda + l - k) w_k.$$

La fel ca mai sus se arată că șirul $w_0, w_1, w_2, \dots$ conține un număr finit de termeni nenuli, că există $w_m \neq 0$ cu $w_{m+1} = A_- w_m = 0$. Deoarece

$$\begin{aligned} A_+ w_1 &= A_+ (A_- w_0) = (A_+ A_-) w_0 = ([A_+, A_-] + A_- A_+) w_0 \\ &= 2 A_3 w_0 = (2\lambda + 2l) w_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_+ w_2 &= A_+ (A_- w_1) = (A_+ A_-) w_1 = ([A_+, A_-] + A_- A_+) w_1 \\ &= (2 A_3 + A_- A_+) w_1 = 2(\lambda + l - 1) w_1 + (2\lambda + 2l) A_- w_0 \\ &= 2(2\lambda + 2l - 1) w_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_+ w_3 &= A_+ (A_- w_2) = (A_+ A_-) w_2 = ([A_+, A_-] + A_- A_+) w_2 \\ &= (2 A_3 + A_- A_+) w_2 = 2(\lambda + l - 2) w_2 + 2(2\lambda + 2l - 1) A_- w_1 \\ &= 3(2\lambda + 2l - 2) w_2, \end{aligned}$$

și, în general,

$$A_+ w_k = k(2\lambda + 2l - k)w_{k-1},$$

subspațiul

$$\mathcal{W} = \langle w_0, w_1, \dots, w_m \rangle,$$

generat de vectorii linear independenți $w_0, w_1, \dots, w_m$, este invariant față de acțiunea operatorilor A_3, A_+ și A_- . Reprezentarea ϱ fiind ireductibilă, trebuie ca $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ și deci $n = m + 1$. Matricea operatorului A_3 în raport cu baza $\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ este matricea diagonală

$$\begin{pmatrix} \lambda + l & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + l - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda + l - m + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda + l - m \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, din relația $[A_+, A_-] = 2A_3$, rezultă că

$$\operatorname{tr} A_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}([A_+, A_-]) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A_+, A_-) - \operatorname{tr}(A_- A_+)) = 0.$$

Deducem că $(\lambda + l) + (\lambda + l - 1) + \cdots + (\lambda + l - m) = 0$, adică

$$(m + 1)(\lambda + l) - \frac{m(m + 1)}{2} = 0.$$

Deoarece $n = m + 1$, rezultă că

$$\lambda + l = \frac{m}{2} = \frac{n - 1}{2},$$

și notând $j = (n - 1)/2$, obținem $A_3 v = j v$.

8.4.3 Propoziție. Dacă

$$\varrho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{V})$$

este reprezentare ireductibilă de dimensiune $n = 2j + 1$
și $v \neq 0$ este astfel încât

$$A_3 v = j v, \quad A_+ v = 0,$$

atunci sistemul de vectori

$$\{v_{-j}, v_{-j+1}, \dots, v_j\},$$

definit prin relațiile

$$v_j = v, \quad A_- v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k-1)} v_{k-1},$$

este o bază a lui $\mathcal{V}$ astfel încât

$$A_3 v_k = k v_k, \quad A_+ v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)} v_{k+1}.$$

Demonstrație. Deoarece

$$j(j+1) - k(k-1) = 0 \implies k = -j \text{ sau } k = j+1,$$

rezultă că există constantele nenule $c_1, c_2, \dots, c_{2j}$ astfel încât

$$v_j = w_0, \quad v_{j-1} = c_1 w_1, \quad v_{j-2} = c_2 w_2, \quad \dots \quad v_{-j} = c_{2j} w_{2j},$$

unde $\{w_0, w_1, \dots, w_{2j}\}$ este baza lui $\mathcal{V}$ obținută în demonstrația propoziției precedente. Deoarece $A_3 w_k = (j-k)w_k$, rezultă că $A_3 v_k = k v_k$. Din relația

$$A_- v_j = \sqrt{j(j+1) - j(j-1)} v_{j-1} = \sqrt{2j} v_{j-1}$$

rezultă

$$\begin{aligned} A_+ v_{j-1} &= \frac{1}{\sqrt{2j}} A_+ A_- v_j = \frac{1}{\sqrt{2j}} (A_- A_+ + 2A_3) v_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{2j}} 2j v_j = \sqrt{2j} v_j = \sqrt{j(j+1) - (j-1)j} v_j. \end{aligned}$$

Presupunând că $A_+ v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)} v_{k+1}$, obținem

$$\begin{aligned} A_+ v_{k-1} &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}} A_+ A_- v_k = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}} (A_- A_+ + 2A_3) v_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}} \left(\sqrt{j(j+1) - k(k+1)} A_- v_{k+1} + 2A_3 v_k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - k(k-1)}} ((j(j+1) - k(k+1)) + 2k) v_k \\ &= \sqrt{j(j+1) - (k-1)k} v_k. \end{aligned}$$

8.4.4 Teoremă. a) Oricare ar fi $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, oricare ar fi spațiul vectorial complex $\mathcal{V}$ de dimensiune $n=2j+1$ și oricare ar fi baza $\{v_{-j}, v_{-j+1}, \dots, v_j\}$ a lui $\mathcal{V}$ aplicația

$$\varrho : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

definită prin relațiile

$$A_3 v_k = k v_k, \quad A_{\pm} v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k \pm 1)} v_{k \pm 1}, \quad (8.2)$$

unde $A_3 = \varrho(a_3)$ și $A_{\pm} = \varrho(a_{\pm})$, este o reprezentare ireductibilă a algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$.

b) Reprezentările (8.2) cu aceeași dimensiune sunt echivalente.

c) Reprezentările (8.2) sunt, până la o echivalență, toate reprezentările ireductibile finit dimensionale ale algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$.

Demonstrație. a) Avem

$$\begin{aligned} [A_3, A_{\pm}] v_k &= (A_3 A_{\pm} - A_{\pm} A_3) v_k \\ &= (k \pm 1) \sqrt{j(j+1) - k(k \pm 1)} v_{k \pm 1} - k \sqrt{j(j+1) - k(k \pm 1)} v_{k \pm 1} \\ &= \pm \sqrt{j(j+1) - k(k \pm 1)} v_{k \pm 1} = \pm A_{\pm} v_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_+, A_-] v_k &= (A_+ A_- - A_- A_+) v_k \\ &= \sqrt{j(j+1) - k(k-1)} A_+ v_{k-1} - \sqrt{j(j+1) - k(k+1)} A_- v_{k+1} \\ &= (j(j+1) - k(k-1)) v_k - (j(j+1) - k(k+1)) v_k = 2k v_k = 2A_3 v_k, \end{aligned}$$

ceea ce arată că relațiile (8.2) definesc o reprezentare a algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$. Fie $\mathcal{W} \neq \{0\}$ un subspațiu invariant și fie

$$x = x_{-j} v_{-j} + x_{-j+1} v_{-j+1} + \dots + x_j v_j \in \mathcal{W}$$

un vector nenul fixat. Cel puțin unul dintre coeficienții lui x este nenul. Fie

$$k = \min \{ l \mid x_l \neq 0 \}.$$

Din (8.2) rezultă că

$$(A_+)^{j-l} x = c v_j,$$

unde c este o constantă nenulă. Deoarece $\mathcal{W}$ este invariant, din relația precedentă rezultă că $v_j \in \mathcal{W}$ și apoi că vectorii

$$A_- v_j, \quad (A_-)^2 v_j, \quad (A_-)^3 v_j, \quad \dots, \quad (A_-)^{2j} v_j,$$

care coincid până la înmulțirea cu anumite constante nenule cu vectorii

$$v_{j-1}, \quad v_{j-2}, \quad \dots, \quad v_{-j},$$

aparțin lui $\mathcal{W}$. Rezultă astfel că orice subspațiu invariant nenul $\mathcal{W}$ coincide cu $\mathcal{V}$.

b) Dacă

$$\varrho : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \quad \varrho' : sl(2, \mathbb{C}) \longrightarrow gl(\mathcal{V}')$$

sunt două reprezentări liniare de dimensiune $n = 2j + 1$ și

$$\{v_{-j}, v_{-j+1}, \dots, v_j\}, \quad \{v'_{-j}, v'_{-j+1}, \dots, v'_j\}$$

bazele corespunzătoare, atunci

$$S : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}', \quad Sv_k = v'_k$$

este un izomorfism liniar și

$$\varrho(a) = S^{-1} \varrho'(a) S, \quad \forall a \in sl(2, \mathbb{C}).$$

c) Afirmatia rezultă din rezultatele prezentate la pag. 269-2 și pag. 271-3.

8.4.5 Propoziție. Dacă

$$\varrho_1 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1), \quad \varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_2)$$

sunt reprezentări liniare ale algebrei Lie L , atunci aplicația

$$\varrho_1 \oplus \varrho_2 : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2)$$

definită prin relația

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a)(x_1, x_2) = (\varrho_1(a)x_1, \varrho_2(a)x_2)$$

este o reprezentare liniară în spațiul

$$\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathcal{V}_1, x_2 \in \mathcal{V}_2 \}$$

(numită suma directă a reprezentărilor ϱ_1 și ϱ_2).

Demonstrație. Aplicația $\varrho_1 \oplus \varrho_2$ este liniară

$$(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(\alpha a + \beta b) = \alpha(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a) + \beta(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)$$

și

$$\begin{aligned} (\varrho_1 \oplus \varrho_2)([a, b])(x_1, x_2) &= (\varrho_1([a, b])x_1, \varrho_2([a, b])x_2) \\ &= ([\varrho_1(a), \varrho_1(b)]x_1, [\varrho_2(a), \varrho_2(b)]x_2) \\ &= (\varrho_1(a)\varrho_1(b)x_1 - \varrho_1(b)\varrho_1(a)x_1, \varrho_2(a)\varrho_2(b)x_2 - \varrho_2(b)\varrho_2(a)x_2) \\ &= (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a) (\varrho_1(b)x_1, \varrho_2(b)x_2) - (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b) (\varrho_1(a)x_1, \varrho_2(a)x_2) \\ &= [(\varrho_1 \oplus \varrho_2)(a), (\varrho_1 \oplus \varrho_2)(b)](x_1, x_2). \end{aligned}$$

8.4.6 În teorema de la pag. 272-4 am descris reprezentările ireductibile ale algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$. Se poate arăta că orice reprezentare liniară finit dimensională a algebrei Lie $sl(2, \mathbb{C})$ este o sumă directă de astfel de reprezentări.

8.4.7 Propoziție. Fie L o algebră Lie reală. Definind pe complexificatul spațiului vectorial L

$$\mathbb{C}L = \{ a + ia' \mid a, a' \in L \}$$

croșetul

$$[a + ia', b + ib'] = [a, b] - [a', b'] + i([a, b'] + [a', b])$$

obținem o algebră Lie complexă, numită complexificata algebrei Lie reale L .

Demonstrație. Prin calcul direct se arată că

$$\begin{aligned} &[(\alpha + i\alpha')(a + ia') + (\beta + i\beta')(b + ib'), c + ic'] \\ &= (\alpha + i\alpha')[a + ia', c + ic'] + (\beta + i\beta')[b + ib', c + ic'], \end{aligned}$$

$$[a + ia', b + ib'] = -[b + ib', a + ia'],$$

$$\begin{aligned} &[[a + ia', b + ib'], c + ic'] + [[b + ib', c + ic'], a + ia'] \\ &+ [[c + ic', a + ia'], b + ib'] = 0. \end{aligned}$$

8.4.8 Propoziție. a) Dacă L este o algebră Lie reală și dacă

$$\varrho : L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare liniară (în spațiul vectorial complex $\mathcal{V}$), atunci

$$\tilde{\varrho} : \mathbb{C}L \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \quad \tilde{\varrho}(a + ia')x = \varrho(a)x + i\varrho(a')x$$

este o reprezentare liniară.

b) Reprezentarea $\tilde{\varrho}$ este ireductibilă dacă și numai dacă ϱ este ireductibilă.

Demonstrație. a) Se arată prin calcul direct că $\tilde{\varrho}$ este aplicație $\mathbb{C}$ -liniară

$$\tilde{\varrho}((a + ia') + (b + ib')) = \tilde{\varrho}(a + ia') + \tilde{\varrho}(b + ib'),$$

$$\tilde{\varrho}((\alpha + i\beta)(a + ia')) = (\alpha + i\beta)\tilde{\varrho}(a + ia')$$

și că

$$\tilde{\varrho}([a + ia', b + ib']) = [\tilde{\varrho}(a + ia'), \tilde{\varrho}(b + ib')].$$

b) Dacă $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ este astfel încât

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho(a)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$, atunci

$$x \in \mathcal{W} \implies \tilde{\varrho}(a + ia')x = \varrho(a)x + i\varrho(a')x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a + ia' \in {}^{\mathbb{C}}L$. Invers, dacă

$$x \in \mathcal{W} \implies \tilde{\varrho}(a + ia')x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a + ia' \in {}^{\mathbb{C}}L$, atunci

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho(a)x = \tilde{\varrho}(a + i0)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$.

8.4.9 L poate fi identificată cu o submulțime a lui ${}^{\mathbb{C}}L$ folosind aplicația

$$L \longrightarrow {}^{\mathbb{C}}L : a \mapsto a + i0.$$

Mai mult,

$$[a, b] = [a + i0, b + i0], \quad \forall a, b \in L.$$

Dacă $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ este o bază a algebrei Lie reale L ,

$$L = \{ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \mid \alpha_j \in \mathbb{R} \},$$

atunci $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ este în același timp bază a algebrei Lie complexe ${}^{\mathbb{C}}L$,

$${}^{\mathbb{C}}L = \{ \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \mid \alpha_j \in \mathbb{C} \}.$$

8.4.10 Propoziție. a) Dacă

$$\varrho : {}^{\mathbb{C}}L \longrightarrow gl(\mathcal{V})$$

este o reprezentare liniară a complexificatei algebrei Lie reale L , atunci

$$\varrho|_L : L \longrightarrow gl(\mathcal{V}), \quad \varrho|_L(a)x = \varrho(a + i0)x,$$

este o reprezentare liniară a lui L .

b) Reprezentarea $\varrho|_L$ este ireductibilă dacă și numai dacă ϱ este ireductibilă.

Demonstrație. a) Aplicația $\varrho|_L$ este $\mathbb{R}$ -liniară

$$\varrho|_L(a+b) = \varrho(a+b+i0) = \varrho(a+i0) + \varrho(b+i0) = \varrho|_L(a) + \varrho|_L(b),$$

$$\varrho|_L(\alpha a) = \varrho(\alpha a+i0) = \alpha \varrho(a+i0) = \alpha \varrho|_L(a)$$

și

$$\begin{aligned}\varrho|_L([a,b]) &= \varrho([a,b]+i0) = \varrho([a+i0, b+i0]) \\ &= [\varrho(a+i0), \varrho(b+i0)] = [\varrho|_L(a), \varrho|_L(b)].\end{aligned}$$

b) Dacă $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ este astfel încât

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho(a+ia')x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a+ia' \in \mathbb{C}L$, atunci

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho|_L(a)x = \varrho(\alpha a+i0)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$. Invers, dacă

$$x \in \mathcal{W} \implies \varrho|_L(a)x \in \mathcal{W},$$

oricare ar fi $a \in L$, atunci

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{W} \implies \varrho(a+ia')x &= \varrho(a+i0)x = \varrho((a+i0) + (0+i)(a'+i0))x \\ &= \varrho(a+i0)x + i\varrho(a'+i0)x = \varrho|_L(a)x + i\varrho|_L(a')x \in \mathcal{W},\end{aligned}$$

oricare ar fi $a+ia' \in \mathbb{C}L$.

8.4.11 Propoziție. Complexificata ${}^{\mathbb{C}}su(2)$ a algebrei $su(2)$ este izomorfă cu $sl(2, \mathbb{C})$.

Demonstrație. Algebra Lie reală $su(2)$ admite baza

$$\left\{ u_1 = -\frac{i}{2}(e_1^1 - e_2^2), \quad u_2 = -\frac{1}{2}(e_2^1 - e_1^2), \quad u_3 = -\frac{i}{2}(e_2^1 + e_1^2) \right\}$$

cu

$$[u_1, u_2] = u_3, \quad [u_2, u_3] = u_1, \quad [u_3, u_1] = u_2,$$

iar algebra Lie complexă $sl(2, \mathbb{C})$ baza

$$\left\{ a_3 = \frac{1}{2}(e_1^1 - e_2^2), \quad a_+ = e_1^2, \quad a_- = e_2^1 \right\}$$

cu

$$[a_3, a_{\pm}] = \pm a_{\pm}, \quad [a_+, a_-] = 2a_3.$$

Aplicația $\mathbb{C}$ -liniară $A : {}^{\mathbb{C}}su(2) \longrightarrow sl(2, \mathbb{C})$, definită prin

$$Au_1 = -i a_3, \quad Au_2 = \frac{1}{2}(a_+ - a_-), \quad Au_3 = -\frac{i}{2}(a_+ + a_-),$$

este un izomorfism de algebre Lie deoarece

$$\begin{aligned} [Au_1, Au_2] &= [-i a_3, \frac{1}{2}(a_+ - a_-)] = -\frac{i}{2}[a_3, a_+] + \frac{i}{2}[a_3, a_-] \\ &= -\frac{i}{2}(a_+ + a_-) = Au_3 = A[u_1, u_2], \\ [Au_2, Au_3] &= [\frac{1}{2}(a_+ - a_-), -\frac{i}{2}(a_+ + a_-)] = -\frac{i}{4}([a_+, a_-] - [a_-, a_+]) \\ &= -\frac{i}{2}[a_+, a_-] = -i a_3 = Au_1 = A[u_2, u_3], \\ [Au_3, Au_1] &= [-\frac{i}{2}(a_+ + a_-), -i a_3] = -\frac{1}{2}[a_+, a_3] - \frac{1}{2}[a_-, a_3] \\ &= -\frac{1}{2}a_+ - \frac{1}{2}a_- = Au_2 = A[u_3, u_1]. \end{aligned}$$

8.4.12 Din rezultatul prezentat la pag. 276-10 rezultă că descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrelor Lie izomorfe $o(3)$ și $su(2)$ este echivalentă cu descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei Lie complexe ${}^{\mathbb{C}}su(2)$. Pe de altă parte, din rezultatele prezentate la pag. 266-3 și pag. 277-11 rezultă că descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei ${}^{\mathbb{C}}su(2)$ este echivalentă cu descrierea reprezentărilor ireductibile ale algebrei $sl(2, \mathbb{C})$, reprezentări descrise în teorema de la pag. 272-4.

8.4.13 Propoziție. *Plecând de la orice algebră Lie complexă L se poate obține o algebră Lie reală L_0 prin restricția scalarilor, și*

$$\dim_{\mathbb{R}} L_0 = 2 \dim_{\mathbb{C}} L.$$

8.4.14 Alegând baze adecvate, se poate arăta că algebra Lie reală $sl(2, \mathbb{C})_0$ obținută din $sl(2, \mathbb{C})$ prin restricția scalarilor, este izomorfă cu algebra Lie $o(1, 3)$ a grupului Lorentz.

Capitolul 9

Sisteme cuantice cu spațiu Hilbert finit-dimensional

9.1 Stări pure și stări mixte

9.1.1 Formalismul matematic utilizat pentru descrierea unui sistem cuantic se bazează pe utilizarea unui spațiu Hilbert $\mathcal{H}$, finit sau infinit-dimensional. Vom prezenta câteva elemente ale acestui formalism, limitându-ne la cazul în care $\mathcal{H}$ este finit-dimensional.

9.1.2 Fiecare vector nenul $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ descrie o stare a sistemului cuantic, dar vectorii care se pot obține unul din altul prin înmulțirea cu o constantă descriu aceeași stare. Astfel, toți vectorii

$$\alpha|\psi\rangle \quad \text{cu} \quad \alpha \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

descriu aceeași stare. În general, pentru descrierea unei stări se preferă utilizarea unui vector $|\psi\rangle$ normat, adică astfel încât

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1.$$

Această restricție determină vectorul corespunzător unei stări până la un factor de fază deoarece toți vectorii

$$e^{i\theta}|\psi\rangle \quad \text{cu} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

au aceeași normă și descriu aceeași stare.

9.1.3 Spațiul $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ al operatorilor autoadjuncți $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definiți pe un spațiu Hilbert de dimensiune d este un spațiu Hilbert real de dimensiune d^2 cu produsul scalar

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

și norma asociată

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr } A^2}.$$

9.1.4 Pentru descrierea stării sistemului cuantic, în locul vectorului normat $|\psi\rangle$ se poate utiliza proiectorul ortogonal corespunzător

$$\varrho_\psi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \varrho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

care este un operator autoadjunct

$$\langle \varrho_\psi \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \psi \rangle \langle \psi, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varrho_\psi \varphi_2 \rangle,$$

pozitiv

$$\langle \varphi | \varrho_\psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \langle \psi | \varphi \rangle = |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \geq 0,$$

și cu urma egală cu 1 (v. pag. 118-10)

$$\text{tr } \varrho_\psi = \text{tr } |\psi\rangle\langle\psi| = 1.$$

Plecând de la aceste proprietăți, se definește un concept matematic care ne permite să distingem o clasă mai largă de stări ale unui sistem cuantic.

9.1.5 Definiție. Un operator autoadjunct ϱ , pozitiv și cu urma egală cu 1

$$\varrho^* = \varrho, \quad \varrho \geq 0, \quad \text{tr } \varrho = 1,$$

se numește *operator densitate*.

9.1.6 Operatorii densitate descriu *stări generalizate* ale sistemului cuantic. Printre ei se află operatorii de forma $\varrho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ care descriu *stări pure*. Ceilalți operatori densitate descriu *stări mixte*.

9.1.7 Fiecare operator densitate, fiind autoadjunct, este diagonalizabil, adică există o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^d$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \quad (9.1)$$

Valorile proprii p_j , care nu sunt obligatoriu distincte, verifică condițiile

$$p_j \geq 0 \quad \text{și} \quad \sum_{j=1}^n p_j = \text{tr } \varrho = 1$$

din care se deduce imediat că

$$0 \leq p_j \leq 1.$$

Starea ϱ este o suprapunere de stări pure $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ cu probabilitățile p_j .

9.1.8 Deoarece

$$\varrho^2 = \sum_{j=1}^d p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

și

$$0 \leq p_j \leq 1 \quad \implies \quad p_j^2 \leq p_j$$

avem

$$\langle\varrho, \varrho\rangle = \text{tr } \varrho^2 = \sum_{j=1}^d p_j^2 \leq \sum_{j=1}^d p_j = \text{tr } \varrho = 1,$$

adică

$$\|\varrho\| = \sqrt{\langle\varrho, \varrho\rangle} \leq 1.$$

9.1.9 În cazul unei stări pure, există o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^d$ astfel încât

$$\varrho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|,$$

adică în reprezentarea (9.1) doar p_1 este nenul.

Dacă ϱ nu este stare pură, atunci în reprezentarea (9.1) cel puțin două dintre numerele p_j sunt nenule, și prin urmare

$$\text{tr } \varrho^2 = \|\varrho\|^2 = \sum_{j=1}^d p_j^2 < \sum_{j=1}^d p_j = 1.$$

În cazul unui operator densitate ϱ , avem

$$\|\varrho\| = 1 \quad \text{dacă } \varrho \text{ este stare pură,}$$

$$\|\varrho\| < 1 \quad \text{dacă } \varrho \text{ nu este stare pură.}$$

Putem spune că $\text{tr } \varrho^2$ măsoară puritatea stării ϱ . Dacă U este o transformare unitară, atunci

$$\text{tr}(U\rho U^*)^2 = \text{tr}\rho^2,$$

adică transformările unitare păstrează nemodificată puritatea stărilor.

9.1.10 Fiecare stare (pură sau mixtă)

$$\rho = \sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

este o suprapunere de stări pure, considerate cu anumite probabilități.

Entropia von Neumann (v. pag. 142-5)

$$\begin{aligned} S[\rho] &= -\text{tr}(\rho \ln \rho) = -\text{tr} \sum_{j=1}^d p_j \ln p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ &= -\sum_{j=1}^d p_j \ln p_j \end{aligned}$$

a stării ρ este o măsură a gradului de impuritate. Valoarea minimă $S[\rho]=0$ se atinge în cazul unei stări pure, iar cea maximă $S[\rho] = \ln d$ în cazul $p_1 = p_2 = p_d = \dots = \frac{1}{d}$. Entropia $S[\rho]$ poate fi privită și ca o măsură a lipsei de informație privind starea ρ .

9.1.11 ^{*1} Operatorul densitate ρ reprezintă o stare pură dacă și numai dacă

$$\rho^2 = \rho.$$

În cazul unei stări pure $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ avem

$$\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho.$$

Oricare ar fi operatorul densitate ρ există $p_j \in [0, 1]$ cu $\sum_{j=1}^d p_j = 1$ și o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^d$ astfel încât

$$\rho = \sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|.$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \sum_{k=1}^d p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_{j,k=1}^d p_j p_k |\psi_j\rangle\langle\psi_j| |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_{j=1}^d p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

egalitatea $\rho^2 = \rho$ este echivalentă cu relația

¹Paragrafele marcate cu * pot fi omise la o primă lectură.

$$\sum_{j=1}^d p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

din care rezultă

$$p_k^2 = \langle\psi_k| \sum_{j=1}^d p_j^2 |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \psi_k\rangle = \langle\psi_k| \sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \psi_k\rangle = p_k.$$

Egalitatea $\varrho^2 = \varrho$ are loc dacă și numai dacă

$$p_k^2 = p_k, \quad \text{oricare ar fi } k \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Deoarece

$$p_k^2 = p_k \Rightarrow p_k \in \{0, 1\},$$

condiția $\sum_{j=1}^d p_j = 1$ este îndeplinită doar în cazul în care doar unul dintre numerele $p_1, p_2, \dots, p_d$ este egal cu 1. În acest caz, ϱ reprezintă o stare pură.

9.1.12* Mulțimea Σ a operatorilor densitate, definiți pe un spațiu Hilbert $\mathcal{H}$, este o mulțime convexă în spațiul vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al tuturor operatorilor liniari definiți pe $\mathcal{H}$ deoarece

$$\begin{aligned} \varrho_1 \in \Sigma, \quad & ((1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2)^* = (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2, \\ \varrho_2 \in \Sigma, \quad & \Rightarrow (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2 \geq 0, \quad \Rightarrow (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2 \in \Sigma. \\ \lambda \in [0, 1] \quad & \text{tr}((1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2) = 1 \end{aligned}$$

9.1.13* Spunem că $\varrho \in \Sigma$ este *punct extrem* al mulțimii convexe Σ dacă relația

$$\varrho = (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2 \quad \text{cu} \quad \begin{aligned} & \varrho_1, \varrho_2 \in \Sigma \\ & \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

este posibilă doar în cazul $\varrho = \varrho_1 = \varrho_2$.

9.1.14* Orice stare pură este punct extrem al mulțimii convexe Σ .

Fie starea pură $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ și $\varrho_1, \varrho_2 \in \Sigma$, $\lambda \in [0, 1]$ astfel încât

$$\varrho = (1-\lambda)\varrho_1 + \lambda\varrho_2.$$

Deoarece $\varrho^2 = \varrho$, ultima relație se mai poate scrie

$$\varrho = (1-\lambda)\varrho\varrho_1\varrho + \lambda\varrho\varrho_2\varrho,$$

și avem

$$1 = (1 - \lambda)\text{tr}(\varrho\varrho_1\varrho) + \lambda\text{tr}(\varrho\varrho_2\varrho). \quad (9.2)$$

Operatorii densitate ϱ_1 și ϱ_2 verifică relațiile

$$\text{tr}(\varrho\varrho_i\varrho) = \text{tr}(\varrho^2\varrho_i) = \text{tr}(\varrho\varrho_i) = \langle\varrho, \varrho_i\rangle \leq |\langle\varrho, \varrho_i\rangle| \leq \|\varrho\| \|\varrho_i\| \leq 1$$

și

$$\text{tr}(\varrho\varrho_i\varrho) = \sum_{j=1}^d \langle e_j, \varrho\varrho_i\varrho e_j \rangle = \sum_{j=1}^d \langle \varrho e_j, \varrho_i\varrho e_j \rangle \geq 0,$$

unde $\{e_j\}_{j=1,\dots,d}$ este o bază ortonormată a lui $\mathcal{H}$.

Dacă am avea $\text{tr}(\varrho\varrho_1\varrho) < 1$ sau $\text{tr}(\varrho\varrho_2\varrho) < 1$, atunci

$$(1 - \lambda)\text{tr}(\varrho\varrho_1\varrho) + \lambda\text{tr}(\varrho\varrho_2\varrho) < 1,$$

ceea ce ar fi în contradicție cu relația (9.2).

Rămâne că $\text{tr}(\varrho\varrho_1\varrho) = \text{tr}(\varrho\varrho_2\varrho) = 1$, și prin urmare

$$\langle\varrho, \varrho_i\rangle = \text{tr}(\varrho\varrho_i) = \text{tr}(\varrho^2\varrho_i) = \text{tr}(\varrho\varrho_i\varrho) = 1.$$

Conform teoremei Cauchy-Schwartz,

$$|\langle\varrho, \varrho_i\rangle|^2 \leq \langle\varrho, \varrho\rangle \langle\varrho_i, \varrho_i\rangle.$$

Deoarece $\langle\varrho, \varrho\rangle \leq 1$ și $\langle\varrho_i, \varrho_i\rangle \leq 1$, avem

$$|\langle\varrho, \varrho_i\rangle|^2 = \langle\varrho, \varrho\rangle \langle\varrho_i, \varrho_i\rangle$$

ceea ce știm că este posibil doar dacă ϱ este de forma $\varrho = c\varrho_i$, cu c o constantă.

Din relația $\text{tr}\varrho = \text{tr}\varrho_i = 1$ rezultă $\varrho = \varrho_i$.

9.1.15* *Orice punct extrem al mulțimii convexe Σ este stare pură.*

Fie ϱ un punct extrem al lui Σ . Știm că există $p_j \in [0, 1]$ cu $\sum_{j=1}^d p_j = 1$ și o bază ortonormată $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^d$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^d p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \cdots + p_d |\psi_d\rangle\langle\psi_d|.$$

Este suficient să arătăm că fiecare coeficient p_j nu poate fi decât 0 sau 1.

De exemplu, dacă am avea $0 < p_1 < 1$, atunci ϱ ar admite reprezentarea

$$\varrho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1 - p_1)\varrho_1,$$

unde

$$\varrho_1 = \frac{p_2}{1-p_1} |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \cdots + \frac{p_d}{1-p_1} |\psi_d\rangle\langle\psi_d|,$$

ceea ce este posibil numai dacă

$$\varrho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \frac{p_2}{1-p_1} |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \cdots + \frac{p_d}{1-p_1} |\psi_d\rangle\langle\psi_d|.$$

Ultima relație nu poate fi adevărată deoarece din ea ar rezulta că

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \frac{p_2}{1-p_1} |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_1\rangle + \cdots + \frac{p_d}{1-p_1} |\psi_d\rangle\langle\psi_d|\psi_1\rangle,$$

adică $|\psi_1\rangle = 0$. Rămâne că $p_1 = 0$ sau $p_1 = 1$. Printr-un raționament similar, se obține că $p_2, p_3, \dots, p_d$ nu pot fi decât 0 sau 1. Din relația $\sum_{j=1}^d p_j = 1$, rezultă că doar unul dintre coeficienții $p_1, p_2, \dots, p_d$ este egal cu 1, și prin urmare ϱ este de forma $|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, adică reprezintă o stare pură.

9.2 Sisteme cuantice cu spațiu Hilbert bidimensional

9.2.1 În cazul unui sistem cuantic descris de un spațiu Hilbert bidimensional $\mathcal{H}$ (sistem numit *qubit* în engleză), utilizând o bază ortonormată fixată $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, fiecare element $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ poate fi reprezentat unic sub forma

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Izomorfismul liniar

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}^2 : \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ne permite să identificăm spațiul $\mathcal{H}$ cu spațiul Hilbert complex bidimensional

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

cu produsul scalar definit prin

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{\alpha}_1 \alpha_2 + \bar{\beta}_1 \beta_2.$$

În particular, avem

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru $|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ și $|\psi_2\rangle = \alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle$, avem

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

9.2.2 Spațiul $\mathbb{C}^2$ poate fi privit ca fiind spațiul Hilbert al funcțiilor

$$\{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : s \mapsto \psi(s)$$

dacă identificăm $\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ cu funcția

$$\psi : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{definită prin} \quad \begin{aligned} \psi(0) &= \alpha, \\ \psi(1) &= \beta. \end{aligned}$$

9.2.3 În mecanica cuantică, momentul cinetic este o mărime discretă. Singurele valori posibile sunt $0, \pm\frac{1}{2}\hbar, \pm\hbar, \pm\frac{3}{2}\hbar, \pm2\hbar, \dots$, unde $\hbar$ este constanta lui Planck împărțită cu 2π . Particule cum ar fi electronul, protonul și neutronul au un moment cinetic intrinsec egal cu $\frac{1}{2}\hbar$, numit *spin*. În acest caz, pentru orice direcție, valorile posibile ale spinului sunt $\pm\frac{1}{2}\hbar$. Alegând $\frac{1}{2}\hbar$ ca unitate de măsură pentru spin, putem considera că singurele valori posibile sunt ± 1 . Dacă se ia în considerare doar spinul, stările particulei pot fi descrise cu ajutorul spațiului Hilbert $\mathbb{C}^2$. Dacă $|0\rangle$ și $|1\rangle$ sunt stările proprii în care spinul are valori bine determinate, 1 și respectiv -1 , atunci orice element de forma

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

descrie o stare posibilă a particulei rezultată dintr-o suprapunere a celor două stări.

9.2.4 Spațiul $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ al operatorilor liniari $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ este un spațiu Hilbert de dimensiune 4, cu produsul scalar definit prin relația

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^*B),$$

pentru care operatorii Pauli $\{\sigma_0 = I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ formează o bază ortogonală. Orice operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ se poate reprezenta sub forma

$$A = \frac{1}{2}(r_0\sigma_0 + r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3\sigma_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix},$$

cu $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$. Rezolvând ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} \frac{r_0+r_3}{2} - \lambda & \frac{r_1-ir_2}{2} \\ \frac{r_1+ir_2}{2} & \frac{r_0-r_3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

se obțin pentru A valorile proprii complexe

$$\lambda_{1,2} = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}{2}.$$

9.2.5 Spațiul $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ al operatorilor autoadjuncți $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ este un spațiu Hilbert real de dimensiune 4 cu produsul scalar definit prin relația

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB),$$

pentru care operatorii Pauli $\{\sigma_0 = I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ formează o bază ortogonală.

Orice operator $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ se poate reprezenta sub forma

$$A = \frac{1}{2}(r_0 \sigma_0 + \mathbf{r} \cdot \sigma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_0+r_3 & r_1-ir_2 \\ r_1+ir_2 & r_0-r_3 \end{pmatrix},$$

cu $r_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ și $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} \frac{r_0+r_3}{2} - \lambda & \frac{r_1-ir_2}{2} \\ \frac{r_1+ir_2}{2} & \frac{r_0-r_3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

se obțin pentru A valorile proprii reale

$$\lambda_{1,2} = \frac{r_0 \pm \|\mathbf{r}\|}{2}.$$

9.2.6 Deoarece, pentru $A \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ avem $\text{tr } A = r_0$ și

$$A \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{r}\| \leq r_0,$$

operatorul A este operator densitate dacă și numai dacă

$$r_0 = 1 \quad \text{și} \quad \|\mathbf{r}\| \leq 1.$$

Valorile proprii ale unui operator densitate

$$\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-ir_2 \\ r_1+ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}$$

sunt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \|\mathbf{r}\|}{2}.$$

Puritatea stării ϱ , adică

$$\text{tr } \varrho^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \|\mathbf{r}\|^2)$$

verifică relația

$$\frac{1}{2} \leq \text{tr } \varrho^2 \leq 1,$$

iar *impuritatea*

$$1 - \text{tr } \varrho^2 = \frac{1}{2}(1 - \|\mathbf{r}\|^2)$$

relația

$$0 \leq 1 - \text{tr } \varrho^2 \leq \frac{1}{2}.$$

9.2.7 Stările posibile (pure sau mixte) ale unui qubit se află în corespondență unu-la-unu cu punctele aparținând sferei închise de rază 1, centrate în origine

$$\Omega_2 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{r}\| \leq 1\} = \{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1\},$$

numită *sfera lui Bloch* sau *sfera lui Poincaré*. Stările pure

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle,$$

descrise de operatorul densitate

$$\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & 1 - \cos \theta \end{pmatrix},$$

îi corespunde vectorul unitar

$$\mathbf{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \in S^2 = \partial\Omega_2.$$

Stările pure corespund la puncte aparținând suprafeței sferei, iar cele mixte la puncte interioare. Puritatea unei stări crește când ne apropiem de suprafața sferei, iar impuritatea când ne apropiem de centrul sferei.

9.2.8 Punctul de pe sferă diametral opus punctului cu coordonatele unghiulare (φ, θ) are coordonatele $(\varphi + \pi, \pi - \theta)$. Produsul scalar al stărilor pure corespunzătoare

$$\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle \quad \text{și} \quad \cos \frac{\pi - \theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\pi - \theta}{2} e^{i(\phi + \pi)} |1\rangle$$

este zero. Astfel, *fiecare pereche de puncte diametral opuse ale sferei S^2 reprezintă o pereche de stări pure ortogonale*.

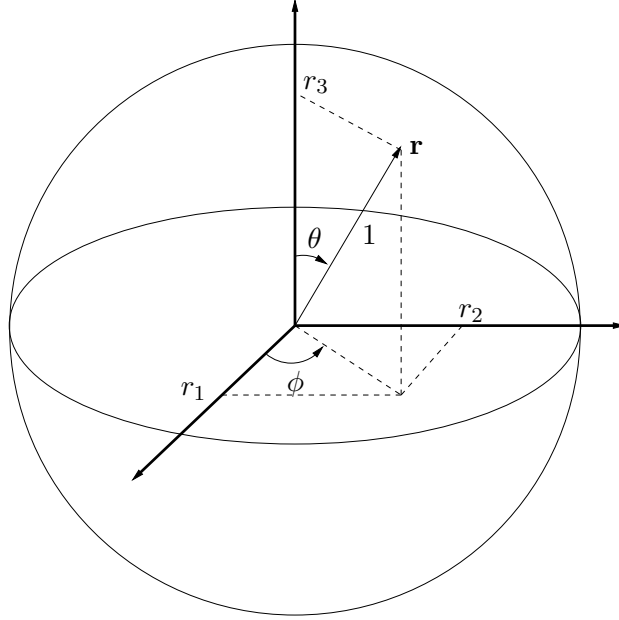


Figura 9.1: Sfera lui Bloch, numită și sfera lui Poincaré.

9.2.9 În cazul unui qubit, starea

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

este suma normalizată a stărilor $|0\rangle$ și $|1\rangle$, dar operatorul densitate corespunzător

$$|+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

diferă de suma normalizată

$$\varrho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

a operatorilor densitate corespunzători stărilor $|0\rangle$ și $|1\rangle$.

9.2.10 Operatorul densitate

$$\varrho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

nu reprezintă o stare pură deoarece nu există o stare

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

astfel încât

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|),$$

sistemul de ecuații

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2},$$

$$|\beta|^2 = \frac{1}{2},$$

$$\alpha\bar{\beta} = 0$$

neavând soluții.

9.2.11 În general, *descompunerea unei stări mixte în stări pure nu este unică*.

Notând

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{și} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

avem

$$\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|).$$

9.2.12 În spațiul Hilbert $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, operatorii autoadjuncți

$$\frac{1}{\sqrt{2}}I, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3$$

formează o bază ortonormată. Numerele r_0, r_1, r_2, r_3 din relația

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_0 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_0 - r_3 \end{pmatrix},$$

numite *parametrii Stokes ai lui A*, se pot exprima sub forma

$$r_i = \langle A, \sigma_i \rangle = \text{tr}(A\sigma_i).$$

Alte baze ortonormate se pot obține plecând de la baze ortonormate ale lui $\mathbb{C}^2$. Dacă $\{|u\rangle, |v\rangle\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{C}^2$, atunci operatorii

$$|u\rangle\langle u|, |u\rangle\langle v|, |v\rangle\langle u|, |v\rangle\langle v|$$

formează o bază ortonormată în $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$.

9.2.13 Se știe că relațiile

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

au loc oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.

9.2.14 Dacă operatorul A este astfel încât $A^2 = I$, atunci operatorul

$$e^{itA} = I + \frac{it}{1!}A + \frac{(it)^2}{2!}A^2 + \frac{(it)^3}{3!}A^3 +$$

verifică relația

$$e^{itA} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) I + i \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right) A,$$

adică avem

$$e^{itA} = \cos t I + i \sin t A, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

9.2.15 Fie $r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector unitar. Deoarece

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I \quad \text{și} \quad \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1,$$

operatorul

$$r \cdot \sigma = r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3\sigma_3$$

verifică relația

$$(r \cdot \sigma)^2 = I$$

și prin urmare,

$$e^{itr \cdot \sigma} = \cos t I + i \sin t r \cdot \sigma, \quad \text{oricare ar fi } t \in \mathbb{R}.$$

În particular, operatorii

$$\mathcal{R}_x(t) = e^{-i\frac{t}{2}\sigma_x}, \quad \mathcal{R}_y(t) = e^{-i\frac{t}{2}\sigma_y}, \quad \mathcal{R}_z(t) = e^{-i\frac{t}{2}\sigma_z}$$

verifică relațiile (a se vedea și pag. 143-6)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(t) &= \cos \frac{t}{2} I - i \sin \frac{t}{2} \sigma_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & -i \sin \frac{t}{2} \\ -i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}_y(t) &= \cos \frac{t}{2} I - i \sin \frac{t}{2} \sigma_y = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & -\sin \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}_z(t) &= \cos \frac{t}{2} I - i \sin \frac{t}{2} \sigma_z = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{t}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9.2.16* Vectorul Bloch corespunzător stării $\mathcal{R}_x(t)|\psi\rangle$ cu matricea densitate

$$\mathcal{R}_x(t)|\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{R}_x^*(t)$$

se obține rotind în jurul lui Ox vectorul Bloch corespunzător stării $|\psi\rangle$.

Mai general, dacă ϱ este matricea densitate, vectorul corespunzător stării $\mathcal{R}_x(t)\varrho\mathcal{R}_x^*(t)$ se obține rotind în jurul lui Ox vectorul Bloch corespunzător stării ϱ deoarece

$$\mathcal{R}_x(t) \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-ir_2 \\ r_1+ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} \mathcal{R}_x^*(t) = \begin{pmatrix} 1+r'_3 & r'_1-ir'_2 \\ r'_1+ir'_2 & 1-r'_3 \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Similar, vectorul corespunzător stării $\mathcal{R}_y(t)\varrho\mathcal{R}_y^*(t)$ se obține rotind în jurul lui Oy vectorul Bloch corespunzător stării ϱ deoarece

$$\mathcal{R}_y(t) \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-ir_2 \\ r_1+ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} \mathcal{R}_y^*(t) = \begin{pmatrix} 1+r'_3 & r'_1-ir'_2 \\ r'_1+ir'_2 & 1-r'_3 \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Vectorul corespunzător stării $\mathcal{R}_z(t)\varrho\mathcal{R}_z^*(t)$ se obține rotind în jurul lui Oz vectorul Bloch corespunzător stării ϱ deoarece

$$\mathcal{R}_z(t) \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1-ir_2 \\ r_1+ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} \mathcal{R}_z^*(t) = \begin{pmatrix} 1+r'_3 & r'_1-ir'_2 \\ r'_1+ir'_2 & 1-r'_3 \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

9.2.17* Transformările unitare corespund rotațiilor sferei Bloch.

O transformare unitară $U : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ este o transformare cu proprietatea

$$UU^* = U^*U = I.$$

Elementele matricei corespunzătoare

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix}$$

verifică relațiile

$$\begin{aligned} |u_{00}|^2 + |u_{01}|^2 &= 1, & |u_{00}|^2 + |u_{10}|^2 &= 1, \\ |u_{10}|^2 + |u_{11}|^2 &= 1, & |u_{01}|^2 + |u_{11}|^2 &= 1, \\ \bar{u}_{00}u_{10} + \bar{u}_{01}u_{11} &= 0, & \bar{u}_{00}u_{01} + \bar{u}_{10}u_{11} &= 0. \end{aligned}$$

O matrice verifică primele patru relații dacă și numai dacă este de forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{t'}{2} e^{i\frac{a}{2}} & -\sin \frac{t'}{2} e^{i\frac{b}{2}} \\ \sin \frac{t'}{2} e^{i\frac{c}{2}} & \cos \frac{t'}{2} e^{i\frac{d}{2}} \end{pmatrix}.$$

Pentru a verifica și ultimele două relații, este necesar și suficient ca

$$a - c = b - d,$$

adică să fie de forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{t'}{2} e^{i\frac{a}{2}} & -\sin \frac{t'}{2} e^{i\frac{b}{2}} \\ \sin \frac{t'}{2} e^{i\frac{c}{2}} & \cos \frac{t'}{2} e^{i\frac{b+c-a}{2}} \end{pmatrix}.$$

Ultima matrice se poate scrie sub forma

$$U = e^{i\frac{b+c}{4}} \begin{pmatrix} \cos \frac{t'}{2} e^{i\frac{(a-b)+(a-c)}{2}} & -\sin \frac{t'}{2} e^{i\frac{(a-c)-(a-b)}{2}} \\ \sin \frac{t'}{2} e^{-i\frac{(a-c)-(a-b)}{2}} & \cos \frac{t'}{2} e^{-i\frac{(a-b)+(a-c)}{2}} \end{pmatrix}$$

sau

$$U = e^{i\frac{b+c}{4}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{t'}{2} & -\sin \frac{t'}{2} \\ \sin \frac{t'}{2} & \cos \frac{t'}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{t''}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{t''}{2}} \end{pmatrix},$$

adică sub forma unui produs de rotații înmulțit cu un factor de fază

$$U = e^{i\frac{b+c}{4}} \mathcal{R}_z(t) \mathcal{R}_y(t') \mathcal{R}_z(t''),$$

unde $t = \frac{a-b}{2}$ și $t'' = \frac{a-c}{2}$.

9.2.18 Operațiile logice cu stări cuantice, cu ajutorul cărora se procesează informația cuantică, sunt descrise de operatori unitari (numiți *quantum gates* în engleză). Printre transformările unitare frecvent utilizate se află transformările Pauli

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \quad \text{cu matricea} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

transformarea Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \quad \text{cu matricea} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

transformarea de fază

$$S = |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

transformarea $\pi/8$

$$T = |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1| \quad \text{cu matricea} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

și rotațiile $\mathcal{R}_x(t)$, $\mathcal{R}_y(t)$, $\mathcal{R}_z(t)$.

9.3 Măsurători ideale

9.3.1 Orice informație referitoare la un sistem cuantic se poate obține doar în urma unei măsurători. Descrierea oferită de mecanica cuantică nu este una deterministă: măsurând aceeași observabilă în cazul a două sisteme aflate în aceeași stare, preparate identic, rezultatele obținute pot fi diferite.

9.3.2 Fiecare operator autoadjunct $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ admite descompunerea spectrală

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda},$$

unde λ parcurge valorile proprii ale lui A , iar P_{λ} sunt proiectorii ortogonali pe subspațiile proprii corespunzătoare. Operatorii P_{λ} verifică relațiile

$$\sum_{\lambda} P_{\lambda} = I, \quad P_{\lambda}^* = P_{\lambda} = P_{\lambda}^2, \quad P_{\lambda} P_{\lambda'} = \begin{cases} P_{\lambda} & \text{dacă } \lambda = \lambda' \\ 0 & \text{dacă } \lambda \neq \lambda'. \end{cases}$$

9.3.3 O măsurătoare ideală corespunde unui operator autoadjunct (observabila)

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda}$$

care satisface condițiile:

- 1) singurele rezultate care se pot obține sunt valorile proprii λ ;
- 2) în starea ϱ rezultatul λ se obține cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \text{tr}(\varrho P_{\lambda});$$

- 3) în cazul obținerii rezultatului λ , starea după măsurătoare devine

$$\varrho' = \frac{P_{\lambda} \varrho P_{\lambda}}{p(\lambda)}.$$

O măsurătoare ideală mai este numită și *proiectivă* sau *von Neumann*.

9.3.4 În cazul unei stări pure $|\psi\rangle$, operatorul densitate $\varrho_{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|$ verifică relația

$$\text{tr}(\varrho_{\psi} P_{\lambda}) = \langle\psi|P_{\lambda}|\psi\rangle.$$

În starea pură $|\psi\rangle$, rezultatul λ se obține cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \langle\psi|P_{\lambda}|\psi\rangle$$

iar starea sistemului după măsurătoare este starea pură

$$|\psi_{\lambda}\rangle = \frac{P_{\lambda}|\psi\rangle}{\sqrt{p(\lambda)}}.$$

9.3.5 Starea post-măsurătoare $|\psi_{\lambda}\rangle$ este o stare proprie a observabilei măsurate

$$A|\psi_{\lambda}\rangle = \lambda|\psi_{\lambda}\rangle.$$

Dacă subspațiul propriu corespunzător valorii λ este unidimensional, aparatul cu care s-a măsurat observabila A poate fi utilizat pentru a prepara sisteme cuantice în starea $|\psi_\lambda\rangle$.

9.3.6 Valoarea medie a observabilei A în starea ϱ este

$$\langle A \rangle = \sum_{\lambda} \lambda p(\lambda) = \text{tr}(\varrho A).$$

În cazul unei stări pure $|\psi\rangle$, valoarea medie a lui A este

$$\langle A \rangle = \sum_{\lambda} \lambda p(\lambda) = \langle \psi | A | \psi \rangle.$$

9.3.7 În cazul unui qubit, observabila σ_3 admite reprezentarea spectrală

$$\sigma_3 = 1 \cdot P_1 + (-1) \cdot P_{-1}, \quad \text{unde} \quad \begin{aligned} P_1 &= |0\rangle\langle 0| \\ P_{-1} &= |1\rangle\langle 1|. \end{aligned}$$

Măsurând observabila σ_3 în starea

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{cu} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

se obține rezultatul $\lambda=1$ cu probabilitatea

$$p(1) = \langle \psi | P_1 | \psi \rangle = |a|^2$$

și rezultatul $\lambda=-1$ cu probabilitatea

$$p(-1) = \langle \psi | P_{-1} | \psi \rangle = |b|^2.$$

După măsurătoare, starea sistemului devine

$$\frac{P_1|\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} = \frac{a}{|a|}|0\rangle$$

în cazul în care rezultatul este $\lambda=1$ și

$$\frac{P_{-1}|\psi\rangle}{\sqrt{p(-1)}} = \frac{b}{|b|}|1\rangle$$

în cazul $\lambda=-1$. Dar starea $\frac{a}{|a|}|0\rangle$ coincide cu $|0\rangle$ și $\frac{b}{|b|}|1\rangle$ cu $|1\rangle$.

Valoarea medie a observabilei σ_3 în starea $|\psi\rangle$ este

$$\langle \psi | \sigma_3 | \psi \rangle = |a|^2 - |b|^2.$$

Măsurând observabila σ_3 în starea

$$\varrho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix}$$

se obține rezultatul $\lambda=1$ cu probabilitatea

$$p(1) = \text{tr}(\varrho P_1) = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} = \frac{1+r_3}{2}$$

și rezultatul $\lambda=-1$ cu probabilitatea

$$p(-1) = \text{tr}(\varrho P_{-1}) = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix} = \frac{1-r_3}{2}.$$

După măsurătoare, starea sistemului devine

$$\frac{P_1 \varrho P_1}{\text{tr}(P_1 \varrho P_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0|$$

în cazul în care rezultatul este $\lambda = 1$ și

$$\frac{P_{-1} \varrho P_{-1}}{\text{tr}(P_{-1} \varrho P_{-1})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1|$$

dacă $\lambda = -1$, adică $|0\rangle$ în primul caz și $|1\rangle$ în al doilea.

9.3.8 Dacă se știe că sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările ortogonale $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, atunci măsurând observabila

$$A = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + 2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \dots + n|\psi_n\rangle\langle\psi_n| = P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n$$

se poate identifica starea în care a fost preparat sistemul fără a o modifica.

Singurele rezultate care se pot obține în urma măsurătorii sunt $1, 2, \dots, n$.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_k\rangle$, atunci se va obține rezultatul k , și rezultatul k se va obține numai în acest caz deoarece

$$p(j) = \langle\psi_k|P_j|\psi_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j=k, \\ 0 & \text{dacă } j \neq k. \end{cases}$$

Obținerea rezultatului k va indica faptul că sistemul a fost pregătit în starea $|\psi_k\rangle$ și știm că după măsurătoare starea va fi

$$\frac{P_k |\psi_k\rangle}{p(k)} = |\psi_k\rangle.$$

Dacă sistemul ortonormat $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ nu este bază în spațiul Hilbert al sistemului cuantic, atunci 0 este valoare proprie a lui A și

$$A = 0P_0 + P_1 + 2P_2 + \dots + nP_n \quad \text{cu} \quad P_0 = I - P_1 - P_2 - \dots - P_n.$$

În cazul în care sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările ortogonale $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, rezultatul 0 nu se poate obține.

9.3.9 Dacă vectorii unitari $|\psi_1\rangle$ și $|\psi_2\rangle$ nu sunt ortogonali, atunci vectorul normat

$$|\psi_1^\perp\rangle = \frac{|\psi_2\rangle - |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_2\rangle}{\sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}}$$

este ortogonal pe $|\psi_1\rangle$ și $|\psi_2\rangle$ admite descompunerea

$$|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle + \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}|\psi_1^\perp\rangle.$$

9.3.10 Dacă se știe că sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările neortogonale $|\psi_1\rangle$ și $|\psi_2\rangle$, atunci măsurând observabila (v. pag. 298-9)

$$A = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + 2|\psi_1^\perp\rangle\langle\psi_1^\perp| = P_1 + 2P_2$$

nu se obține o informație completă privind starea sistemului.

Singurele rezultate care se pot obține în urma măsurătorii sunt 1 și 2.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_1\rangle$, atunci se obține:

- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_1|P_1|\psi_1\rangle = 1$ și
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_1|P_2|\psi_1\rangle = 0$.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_2\rangle$, atunci se obține:

- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_2|P_1|\psi_2\rangle = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$ și
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_2|P_2|\psi_2\rangle = 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$.

Prin urmare:

- rezultatul 2 indică starea $|\psi_2\rangle$;
- rezultatul 1 nu permite identificarea stării.

9.3.11 O stare $|\psi\rangle$ rămâne nemodificată în urma unei măsurători dacă alegem o observabilă A pentru care $|\psi\rangle$ este stare proprie. Dacă starea $|\psi\rangle$ este necunoscută, nu avem cum să alegem măsurători care să o lase nemodificată. Probabilitatea

$$p(\lambda) = \langle\psi|P_\lambda|\psi\rangle = \langle\psi|P_\lambda^*P_\lambda|\psi\rangle = \|P_\lambda\psi\|^2$$

este pătratul lungimii proiecției vectorului $|\psi\rangle$ pe subspațiul propriu corespunzător valorii λ . Măsurând o observabilă A într-o stare necunoscută $|\psi\rangle$, obținem ca rezultat o valoare proprie λ a lui A și putem deduce doar că $p(\lambda) = \|P_\lambda \psi\|^2 \neq 0$. După măsurătoare, din starea necunoscută $|\psi\rangle$ mai rămânem doar cu proiecția ei pe un subspațiu propriu al lui A .

- 9.3.12** Dacă am dispune de un număr mare de copii ale sistemului cuantic pregătite în starea $|\psi\rangle$ și dacă am repeta măsurătoarea observabilei A , rezultatele obținute ar fi distribuite în jurul valorii medii $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$. O măsură a gradului de dispersare a lor este dată de *abaterea medie pătratică*

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle} = \sqrt{\langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2},$$

adică

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

- 9.3.13** Deoarece σ_1 admite reprezentarea spectrală

$$\sigma_1 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \quad \text{cu} \quad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle),$$

măsurând σ_1 în starea $|0\rangle$ se obține:

- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle 0 | + \rangle \langle + | 0 \rangle = \frac{1}{2}$ și
- rezultatul -1 cu probabilitatea $p(-1) = \langle 0 | - \rangle \langle - | 0 \rangle = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, se pot obține ambele rezultate și valoarea medie a lui σ_1 este

$$\langle \sigma_1 \rangle = \langle 0 | \sigma_1 | 0 \rangle = 0.$$

Deoarece $\sigma_1^2 = I$, în starea $|0\rangle$ avem

$$\langle \sigma_1^2 \rangle = 1 \quad \text{și} \quad \Delta \sigma_1 = \sqrt{\langle \sigma_1^2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle^2} = 1.$$

Similar, se poate arăta că în starea $|0\rangle$ avem

$$\langle \sigma_2 \rangle = 0, \quad \langle \sigma_2^2 \rangle = 1 \quad \text{și} \quad \Delta \sigma_2 = 1.$$

- 9.3.14** Dacă $|\psi\rangle$ este stare proprie a observabilei A ,

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle,$$

atunci, în starea $|\psi\rangle$, avem

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, A^2 \psi \rangle - \langle \psi, A \psi \rangle^2} = 0.$$

9.3.15* Teoremă (Relația de incertitudine).

Dacă $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sunt doi operatori autoadjuncți și

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle}, \quad \Delta B = \sqrt{\langle \psi, (B - \langle B \rangle)^2 \psi \rangle},$$

atunci

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|}{2},$$

oricare ar fi starea normată $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Demonstrație. Fie $C = A - \langle A \rangle$, $D = B - \langle B \rangle$ și

$$\langle C\psi, D\psi \rangle = \alpha + \beta i \quad \text{cu } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Din relațiile

$$\begin{aligned} \langle \psi, CD\psi \rangle &= \langle C\psi, D\psi \rangle = \alpha + \beta i \\ \langle \psi, DC\psi \rangle &= \langle D\psi, C\psi \rangle = \alpha - \beta i \end{aligned}$$

rezultă că

$$\begin{aligned} \langle \psi, [C, D]\psi \rangle &= \langle \psi, CD\psi \rangle - \langle \psi, DC\psi \rangle = 2\beta i \\ \langle \psi, \{C, D\}\psi \rangle &= \langle \psi, CD\psi \rangle + \langle \psi, DC\psi \rangle = 2\alpha \end{aligned}$$

și prin urmare

$$|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2 + |\langle \psi, \{C, D\}\psi \rangle|^2 = 4|\langle C\psi, D\psi \rangle|^2.$$

Însă, conform inegalității Cauchy-Schwarz,

$$|\langle C\psi, D\psi \rangle|^2 \leq \langle C\psi, C\psi \rangle \langle D\psi, D\psi \rangle.$$

Deoarece $\langle C\psi, C\psi \rangle = \langle \psi, C^2\psi \rangle$ și $\langle D\psi, D\psi \rangle = \langle \psi, D^2\psi \rangle$, din ultimele relații obținem

$$|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2 \leq 4|\langle C\psi, D\psi \rangle|^2 \leq 4\langle \psi, C^2\psi \rangle \langle \psi, D^2\psi \rangle,$$

adică inegalitatea

$$\langle \psi, C^2\psi \rangle \langle \psi, D^2\psi \rangle \geq \frac{|\langle \psi, [C, D]\psi \rangle|^2}{4}.$$

Utilizând relațiile

$$\begin{aligned} \langle \psi, C^2\psi \rangle &= \langle \psi, (A - \langle A \rangle)^2 \psi \rangle = (\Delta A)^2, \\ \langle \psi, D^2\psi \rangle &= \langle \psi, (B - \langle B \rangle)^2 \psi \rangle = (\Delta B)^2, \\ \langle \psi, [C, D]\psi \rangle &= \langle \psi, [A, B]\psi \rangle, \end{aligned}$$

ultima inegalitate se mai scrie

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle \psi, [A, B]\psi \rangle|}{2}.$$

9.3.16 Dacă pregătim un număr mare de sisteme cuantice identice, toate în aceeași stare $|\psi\rangle$, și le utilizăm pe unele dintre ele pentru a măsura observabila A , iar pe celelalte pentru a măsura observabila B , atunci abaterile medii pătratice ΔA și ΔB verifică relația de incertitudine

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle\psi|[A, B]|\psi\rangle|}{2}.$$

9.3.17 Observabilele σ_1 și σ_2 verifică relația

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3,$$

și prin urmare

$$\Delta\sigma_1 \Delta\sigma_2 \geq \frac{|\langle\psi|2i\sigma_3|\psi\rangle|}{2},$$

oricare ar fi starea normată $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$. În cazul $|\psi\rangle = |0\rangle$, avem (v. pag. 299-13)

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3|0\rangle = |0\rangle,$$

și prin urmare, egalitate în relația de incertitudine

$$\Delta\sigma_1 \Delta\sigma_2 = \frac{|\langle 0|2i\sigma_3|0\rangle|}{2}.$$

9.3.18* Dacă s-ar putea obține copii identice ale unei stări cuantice necunoscute (v. pag. 306-12), atunci starea ar putea fi identificată.

Orice stare a unui qubit poate fi descrisă cu ajutorul unui vector

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta e^{i\theta}|1\rangle \quad \text{cu} \quad \alpha \in [0, 1], \\ &\quad \beta = \sqrt{1-\alpha^2}, \\ &\quad \theta \in (-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Măsurând observabila $\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ se obține rezultatul 1 cu probabilitatea α^2 și rezultatul -1 cu probabilitatea β^2 . După măsurătoare, qubit-ul ajunge în starea $|0\rangle$ în primul caz și în starea $|1\rangle$ în al doilea. Dacă dispunem de un număr mare de copii ale stării $|\psi\rangle$, atunci coeficienții α și β pot fi determinați cu mare precizie. Vectorii $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ și $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ sunt vectori proprii ai observabilei $\sigma_1 = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$, corespunzător valorilor proprii 1 și -1. Deoarece

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha + \beta e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha - \beta e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

măsurând σ_1 , obținem rezultatul 1 cu probabilitatea $|\alpha + \beta e^{i\theta}|^2/2$ și rezultatul -1 cu probabilitatea $|\alpha - \beta e^{i\theta}|^2/2$. După măsurătoare, qubit-ul ajunge în starea $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ în primul caz și în starea $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ în al doilea.

Dacă dispunem de un număr mare de copii ale stării $|\psi\rangle$, atunci

$$\cos \theta = \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\frac{|\alpha + \beta e^{i\theta}|^2}{2} - \frac{|\alpha - \beta e^{i\theta}|^2}{2} \right)$$

poate fi determinat cu mare precizie. Vectorii $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ și $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ sunt vectori proprii ai observabilei $\sigma_2 = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|$, corespunzător valorilor proprii 1 și -1. Deoarece

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha + \beta e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha - \beta e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

măsurând σ_2 , obținem rezultatul 1 cu probabilitatea $|\alpha - i\beta e^{i\theta}|^2/2$ și rezultatul -1 cu probabilitatea $|\alpha + i\beta e^{i\theta}|^2/2$. După măsurătoare, qubit-ul ajunge în starea $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ în primul caz și în starea $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ în al doilea.

Dacă dispunem de un număr mare de copii ale stării $|\psi\rangle$, atunci

$$\sin \theta = \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\frac{|\alpha - i\beta e^{i\theta}|^2}{2} - \frac{|\alpha + i\beta e^{i\theta}|^2}{2} \right)$$

poate fi determinat cu mare precizie.

9.4 Măsurători generalizate

9.4.1 În cazul unei măsurători ideale, starea post-măsurătoare este o stare proprie a operatorului autoadjunct asociat și repetarea măsurătorii va da același rezultat. În realitate însă, multe dintre măsurătorile efectuate în laborator nu sunt de acest tip. De exemplu, un fotodetector detectează prezența unui foton absorbindu-l, astfel că repetarea măsurătorii nu mai este posibilă.

9.4.2 Relațiile referitoare la o măsurătoare ideală

$$\sum_{\lambda} P_{\lambda} = I, \quad p(\lambda) = \text{tr}(\varrho P_{\lambda}), \quad p(\lambda) = \langle \psi | P_{\lambda} | \psi \rangle$$

se mai pot scrie sub forma

$$\sum_{\lambda} P_{\lambda}^* P_{\lambda} = I, \quad p(\lambda) = \text{tr}(P_{\lambda} \varrho P_{\lambda}^*), \quad p(\lambda) = \langle \psi | P_{\lambda}^* P_{\lambda} | \psi \rangle.$$

9.4.3 O măsurătoare generalizată corespunde unui sistem de operatori $\{M_{\lambda}\}$, indexați folosind valorile λ care se pot obține în urma măsurătorii, și care satisface condițiile:

$$1) \quad \sum_{\lambda} M_{\lambda}^* M_{\lambda} = I;$$

2) în starea ϱ rezultatul λ se obține cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \text{tr}(M_{\lambda} \varrho M_{\lambda}^*);$$

3) în cazul obținerii rezultatului λ , starea după măsurătoare devine

$$\varrho' = \frac{M_{\lambda} \varrho M_{\lambda}^*}{p(\lambda)}.$$

9.4.4 În cazul unei stări pure $|\psi\rangle$, operatorul densitate $\varrho_{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|$ verifică relația

$$\text{tr}(M_{\lambda} \varrho_{\psi} M_{\lambda}^*) = \langle \psi | M_{\lambda}^* M_{\lambda} | \psi \rangle.$$

În starea pură $|\psi\rangle$, rezultatul λ se obține cu probabilitatea

$$p(\lambda) = \langle \psi | M_{\lambda}^* M_{\lambda} | \psi \rangle,$$

iar starea sistemului după măsurătoare este starea pură

$$|\psi_{\lambda}\rangle = \frac{M_{\lambda} |\psi\rangle}{\sqrt{p(\lambda)}}.$$

9.4.5 Dacă $\{M_{\lambda}\}$ este măsurătoare generalizată, atunci operatorii $\{E_{\lambda}\}$, unde

$$E_{\lambda} = M_{\lambda}^* M_{\lambda}$$

sunt autoadjuncți

$$E_{\lambda}^* = (M_{\lambda}^* M_{\lambda})^* = M_{\lambda}^* M_{\lambda} = E_{\lambda},$$

pozitivi

$$\langle \psi, E_{\lambda} \psi \rangle = \langle \psi, M_{\lambda}^* M_{\lambda} \psi \rangle = \langle M_{\lambda} \psi, M_{\lambda} \psi \rangle \geq 0$$

și

$$\sum_{\lambda} E_{\lambda} = \sum_{\lambda} M_{\lambda}^* M_{\lambda} = I.$$

9.4.6 Definiție. Un set de operatori $\{A_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\}$, satisfăcând condițiile

$$A_\lambda^* = A_\lambda, \quad A_\lambda \geq 0 \quad \text{și} \quad \sum_{\lambda} A_\lambda = I, \quad (9.3)$$

este numit *măsură cu valori operatori probabilitate* (POVM).

9.4.7 Dacă $\{M_\lambda\}$ este măsurătoare generalizată, atunci $\{E_\lambda = M_\lambda^* M_\lambda\}$ este POVM. Invers, dacă $\{E_\lambda\}$ este POVM, atunci $\{M_\lambda = \sqrt{E_\lambda}\}$ este o măsurătoare generalizată cu proprietatea

$$M_\lambda^* M_\lambda = E_\lambda.$$

Măsurătoarea generalizată corespunzătoare lui $\{E_\lambda\}$ nu este unică: dacă $\{U_\lambda\}$ sunt operatori unitari, atunci $\{M_\lambda = U_\lambda \sqrt{E_\lambda}\}$ este o măsurătoare generalizată cu proprietatea

$$M_\lambda^* M_\lambda = \sqrt{E_\lambda} U_\lambda^* U_\lambda \sqrt{E_\lambda} = E_\lambda.$$

9.4.8 Un POVM $\{E_\lambda\}$ corespunde la mai multe măsurători $\{M_\lambda\}$, dar din relația

$$p(\lambda) = \text{tr}(M_\lambda \varrho M_\lambda^*) = \text{tr}(\varrho M_\lambda M_\lambda^*) = \text{tr}(\varrho E_\lambda).$$

rezultă că probabilitățile $p(\lambda)$ sunt aceleași. Dacă nu suntem interesați de starea post-măsurătoare, putem considera că fiecare POVM $\{E_\lambda\}$ reprezintă o măsurătoare generalizată.

9.4.9 * Dacă se știe că sistemul cuantic a fost pregătit în una dintre stările neortogonale $|\psi_1\rangle$ și $|\psi_2\rangle$, atunci nu există o măsurătoare generalizată $\{E_\lambda\}$ care să ne permită să indicăm în ce stare a fost pregătit sistemul. Admițând că ar exista o astfel de măsurătoare $\{E_\lambda\}$, ar trebui ca fiecare rezultat λ să indice una și numai una dintre stările $|\psi_1\rangle$ și $|\psi_2\rangle$. Dacă $\mathcal{E}_1$ este suma operatorilor E_λ care corespund lui $|\psi_1\rangle$, și $\mathcal{E}_2$ a celor care corespund lui $|\psi_2\rangle$, atunci

$$\langle \psi_1 | \mathcal{E}_1 | \psi_1 \rangle = 1 \quad \text{și} \quad \langle \psi_2 | \mathcal{E}_2 | \psi_2 \rangle = 1.$$

Deoarece $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = I$, din prima relație rezultă că

$$\langle \sqrt{\mathcal{E}_2} \psi_1, \sqrt{\mathcal{E}_2} \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \mathcal{E}_2 \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, (I - \mathcal{E}_1) \psi_1 \rangle = 0,$$

și prin urmare avem $\sqrt{\mathcal{E}_2} |\psi_1\rangle = 0$, ceea ce implică $\mathcal{E}_2 |\psi_1\rangle = 0$. Utilizând descompunerea ortogonală (v. pag. 298-9)

$$|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle + \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2} |\psi_1^\perp\rangle,$$

obținem că

$$\langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle = (1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2)\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle.$$

Deoarece $\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_1|\psi_1^\perp\rangle \geq 0$ și $\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle \geq 0$, din relația

$$\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_1|\psi_1^\perp\rangle + \langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle = \langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle = \langle\psi_1^\perp|\psi_1^\perp\rangle = 1$$

rezultă că

$$\langle\psi_1^\perp|\mathcal{E}_2|\psi_1^\perp\rangle \leq 1,$$

și prin urmare

$$\langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle \leq (1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2) < 1,$$

în contradicție cu $\langle\psi_2|\mathcal{E}_2|\psi_2\rangle = 1$.

9.4.10 În cazul unei măsurători ideale, rezultatele posibile λ fiind valorile proprii ale operatorului autoadjunct corespunzător, numărul lor nu poate depăși dimensiunea spațiului Hilbert $\mathcal{H}$. În schimb, în cazul unei măsurători generalizate, numărul rezultatelor posibile λ coincide cu numărul operatorilor E_λ și poate depăși dimensiunea spațiului Hilbert $\mathcal{H}$.

9.4.11 Știind că sistemul cuantic a fost preparat în una dintre stările neortogonale

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad \text{și} \quad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

utilizăm măsurătoarea generalizată $\{E_1, E_2, E_3\}$, unde

$$E_1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix},$$

pentru a identifica starea în care a fost preparat sistemul.

Singurele rezultate care se pot obține în urma măsurătorii sunt 1, 2 și 3.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_1\rangle$, atunci se obține:

- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$,
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle\psi_1|E_2|\psi_1\rangle = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$,
- rezultatul 3 cu probabilitatea $p(3) = \langle\psi_1|E_3|\psi_1\rangle = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Dacă sistemul a fost preparat în starea $|\psi_2\rangle$, atunci se obține:

- rezultatul 1 cu probabilitatea $p(1) = \langle \psi_2 | E_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$,
- rezultatul 2 cu probabilitatea $p(2) = \langle \psi_2 | E_2 | \psi_2 \rangle = 0$,
- rezultatul 3 cu probabilitatea $p(3) = \langle \psi_2 | E_3 | \psi_2 \rangle = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Prin urmare:

- rezultatul 1 indică starea $|\psi_2\rangle$,
- rezultatul 2 indică starea $|\psi_1\rangle$,
- rezultatul 3 nu permite identificarea stării.

Informația oferită de măsurătoarea generalizată $\{E_1, E_2, E_3\}$ este mai bogată decât cea oferită de măsurătoarea ideală prezentată la pag. 298-10.

9.4.12 Există argumente puternice în favoarea faptului că *o stare cuantică necunoscută nu poate fi clonată*, adică nu se pot obține copii identice ale ei (v. [26] (pag. 532)). Este util să obținem cât mai multă informație cu ajutorul unei singure măsurători.

Există măsurători care se pot face simultan (*joint measurements*, în engleză).

De exemplu, dacă $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ este o măsurătoare generalizată, atunci $\{E'_1 = E_1 + E_2, E'_2 = E_3 + E_4\}$ și $\{E''_1 = E_1 + E_3, E''_2 = E_2 + E_4\}$ sunt și ele măsurători. Efectuând măsurătoarea $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ putem considera că am făcut simultan măsurătorile $\{E'_1, E'_2\}$ și $\{E''_1, E''_2\}$.

9.5 Sisteme compuse

9.5.1 Orice spațiu Hilbert d -dimensional $\mathcal{H}$ este izomorf cu $\mathbb{C}^d$ și poate fi privit ca fiind spațiul tuturor funcțiilor complexe definite pe o mulțime cu d elemente. În loc de $\mathcal{H}$ putem utiliza spațiul $\mathbb{C}^d$, privit ca fiind spațiul de funcții

$$\{\varphi : \{0, 1, \dots, d-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ este funcție} \}$$

cu produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{d-1} \overline{\varphi(k)} \psi(k).$$

Sistemul de funcții $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{d-1}\}$, unde

$$\delta_k : \{0, 1, \dots, d-1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_k(j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j=k, \\ 0 & \text{dacă } j \neq k \end{cases}$$

este bază ortonormată, numită baza computațională.

9.5.2 Fiecărui element $\varphi \in \mathbb{C}^d$ îi corespunde forma liniară

$$\langle \varphi | : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C} : |\psi\rangle \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle.$$

Scriind $|k\rangle$ în loc de δ_k și $|\varphi\rangle$ în loc de φ , avem

$$\langle k | \varphi \rangle = \langle \delta_k, \varphi \rangle = \varphi(k), \quad \langle k | j \rangle = \delta_{kj}, \quad \sum_k |k\rangle \langle k| = I$$

și

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= I|\varphi\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k | \varphi \rangle = \sum_k \varphi(k) |k\rangle, \\ \langle \varphi | &= \langle \varphi | I = \sum_k \langle \varphi | k \rangle \langle k | = \sum_k \overline{\varphi(k)} \langle k|. \end{aligned}$$

Dacă $A : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ este operator liniar, atunci

$$A|\varphi\rangle \langle \psi| = |A\varphi\rangle \langle \psi| \quad \text{și} \quad |\varphi\rangle \langle \psi| A = |\varphi\rangle \langle A^* \psi|.$$

9.5.3 Dacă $A : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d$ este operator liniar, atunci

$$A = I A I = \sum_{j,k} |j\rangle \langle j| A |k\rangle \langle k| = \sum_{j,k} A_k^j |j\rangle \langle k|.$$

Numerele $A_k^j = \langle j | A | k \rangle$ sunt elementele matricei lui A în baza $\{|j\rangle\}$, adică

$$A = \begin{pmatrix} A_0^0 & \cdots & A_{d-1}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^{d-1} & \cdots & A_{d-1}^{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0 | A | 0 \rangle & \cdots & \langle 0 | A | d-1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle d-1 | A | 0 \rangle & \cdots & \langle d-1 | A | d-1 \rangle \end{pmatrix}$$

și

$$\text{tr } A = \sum_k A_k^k = \sum_k \langle k | A | k \rangle.$$

Operatorul liniar

$$|\varphi_1\rangle \langle \varphi_2| : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^d : |\psi\rangle \mapsto |\varphi_1\rangle \langle \varphi_2 | \psi \rangle,$$

corespunzător la două elemente $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^d$, are urma

$$\text{tr } |\varphi_1\rangle \langle \varphi_2| = \sum_k \langle k | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_2 | k \rangle = \sum_k \varphi_1(k) \overline{\varphi_2(k)} = \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle,$$

adică avem

$$\text{tr} |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| = \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle.$$

9.5.4 Dacă identificăm $\mathbb{C}^n$ cu spațiul de funcții

$$\{\varphi : \{0, 1, \dots, n-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ este funcție} \}$$

și $\mathbb{C}^m$ cu spațiul de funcții

$$\{\psi : \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{ este funcție} \},$$

atunci produsul tensorial $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ poate fi privit ca fiind spațiul de funcții

$$\{\Psi : \{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \Psi \text{ este funcție} \}.$$

Printre elementele lui $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ se află funcțiile de forma

$$\Psi(j, k) = \varphi(j) \psi(k),$$

notate cu $\varphi \otimes \psi$, adică

$$(\varphi \otimes \psi)(j, k) = \varphi(j) \psi(k),$$

dar nu toate elementele lui $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ admit o astfel de descompunere.

Orice element $\Psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ este o sumă de elemente de forma $\varphi \otimes \psi$, adică

$$\Psi = \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j.$$

9.5.5 Oricare ar fi $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}^n$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{C}^m$ și $\alpha \in \mathbb{C}$ avem

$$((\alpha\varphi) \otimes \psi)(j, k) = \alpha \varphi(j) \psi(k) = \alpha (\varphi \otimes \psi)(j, k),$$

$$(\varphi \otimes (\alpha\psi))(j, k) = \alpha \varphi(j) \psi(k) = \alpha (\varphi \otimes \psi)(j, k),$$

$$((\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi)(j, k) = \varphi_1(j) \psi(k) + \varphi_2(j) \psi(k) = (\varphi_1 \otimes \psi)(j, k) + (\varphi_2 \otimes \psi)(j, k),$$

$$(\varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2))(j, k) = \varphi(j) \psi_1(k) + \varphi(j) \psi_2(k) = (\varphi \otimes \psi_1)(j, k) + (\varphi \otimes \psi_2)(j, k),$$

adică au loc relațiile

$$(\alpha\varphi) \otimes \psi = \alpha (\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes (\alpha\psi),$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi,$$

$$\varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2.$$

9.5.6 Relația

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \langle \psi_1, \psi_2 \rangle,$$

extinsă utilizând aditivitatea, adică

$$\left\langle \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j, \sum_k \mu_k \otimes \eta_k \right\rangle = \sum_{j,k} \langle \varphi_j, \mu_k \rangle \langle \psi_j, \eta_k \rangle$$

definește un produs scalar în $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$. Cele nm elemente de forma

$$|jk\rangle = |j\rangle \otimes |k\rangle$$

formează o bază ortonormată în $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, numită *baza computațională*.

9.5.7 În $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, baza computațională este $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

Stările Bell

$$\begin{aligned} |\beta_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \\ |\beta_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle), \\ |\beta_2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle), \\ |\beta_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \end{aligned}$$

formează o altă bază ortonormată cu proprietăți remarcabile.

9.5.8 Fiecărui element $|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ îi corespunde forma liniară

$$\langle \varphi_1 | \otimes \langle \psi_1 | : \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită prin

$$(\langle \varphi_1 | \otimes \langle \psi_1 |)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \langle \varphi_1 | \varphi \rangle \langle \psi_1 | \psi \rangle.$$

Vom utiliza notația

$$\langle jk | = \langle j | \otimes \langle k |.$$

9.5.9 Baza computațională $\{|jk\rangle\}$, fiind o bază ortonormată, au loc relațiile

$$\sum_{i,j} |ij\rangle \langle ij| = I \quad \text{și} \quad \langle ij | k\ell \rangle = \delta_{ik} \delta_{j\ell}.$$

Dacă $\varrho : \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ este un operator liniar, atunci

$$\varrho = I\varrho I = \sum_{i,j,k,\ell} |ij\rangle \langle ij| \varrho |k\ell\rangle \langle k\ell| = \sum_{i,j,k,\ell} \varrho_{k\ell}^{ij} |ij\rangle \langle k\ell|,$$

unde $\varrho_{k\ell}^{ij} = \langle ij | \varrho | k\ell \rangle$ sunt elementele matricei lui ϱ în raport cu baza $\{|jk\rangle\}$.

9.5.10 Matricea unui operator liniar $\varrho: \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ în raport cu baza computațională $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ordonată lexicografic este

$$\begin{aligned} \varrho &= \begin{pmatrix} \varrho_{00}^{00} & \varrho_{01}^{00} & \varrho_{10}^{00} & \varrho_{11}^{00} \\ \varrho_{00}^{01} & \varrho_{01}^{01} & \varrho_{10}^{01} & \varrho_{11}^{01} \\ \varrho_{00}^{10} & \varrho_{01}^{10} & \varrho_{10}^{10} & \varrho_{11}^{10} \\ \varrho_{00}^{11} & \varrho_{01}^{11} & \varrho_{10}^{11} & \varrho_{11}^{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle 00|\varrho|00\rangle & \langle 00|\varrho|01\rangle & \langle 00|\varrho|10\rangle & \langle 00|\varrho|11\rangle \\ \langle 01|\varrho|00\rangle & \langle 01|\varrho|01\rangle & \langle 01|\varrho|10\rangle & \langle 01|\varrho|11\rangle \\ \langle 10|\varrho|00\rangle & \langle 10|\varrho|01\rangle & \langle 10|\varrho|10\rangle & \langle 10|\varrho|11\rangle \\ \langle 11|\varrho|00\rangle & \langle 11|\varrho|01\rangle & \langle 11|\varrho|10\rangle & \langle 11|\varrho|11\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

urmele ei parțiale sunt matricele

$$\begin{aligned} \text{tr}_1 \varrho &= \begin{pmatrix} \varrho_{00}^{00} & \varrho_{01}^{00} \\ \varrho_{00}^{01} & \varrho_{01}^{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho_{10}^{10} & \varrho_{11}^{10} \\ \varrho_{10}^{11} & \varrho_{11}^{11} \end{pmatrix}, \\ \text{tr}_2 \varrho &= \begin{pmatrix} \text{tr} \begin{pmatrix} \varrho_{00}^{00} & \varrho_{01}^{00} \\ \varrho_{00}^{01} & \varrho_{01}^{01} \end{pmatrix} & \text{tr} \begin{pmatrix} \varrho_{10}^{00} & \varrho_{11}^{00} \\ \varrho_{10}^{01} & \varrho_{11}^{01} \end{pmatrix} \\ \text{tr} \begin{pmatrix} \varrho_{00}^{10} & \varrho_{01}^{10} \\ \varrho_{00}^{11} & \varrho_{01}^{11} \end{pmatrix} & \text{tr} \begin{pmatrix} \varrho_{10}^{10} & \varrho_{11}^{10} \\ \varrho_{10}^{11} & \varrho_{11}^{11} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

și

$$\text{tr}(\text{tr}_1 \varrho) = \text{tr} \varrho = \text{tr}(\text{tr}_2 \varrho).$$

9.5.11 *Produsul tensorial a doi operatori*

$$A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{și} \quad B: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

este operatorul

$$A \otimes B: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m,$$

definit prin relația

$$(A \otimes B)(\varphi \otimes \psi) = (A\varphi) \otimes (B\psi)$$

și extins folosind aditivitatea, adică

$$(A \otimes B) \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j = \sum_j (A\varphi_j) \otimes (B\psi_j).$$

9.5.12 Exemple. Avem

$$\begin{aligned}(\sigma_1 \otimes \sigma_2)|10\rangle &= (\sigma_1|1\rangle) \otimes (\sigma_2|0\rangle) = i|01\rangle, \\(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(|10\rangle + |01\rangle) &= (\sigma_1 \otimes \sigma_2)|10\rangle + (\sigma_1 \otimes \sigma_2)|01\rangle = i|01\rangle - i|10\rangle, \\(|i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle \ell|)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) &= \langle j|\varphi\rangle \langle \ell|\psi\rangle |i\rangle \otimes |k\rangle = \varphi(j) \psi(\ell) |ik\rangle.\end{aligned}$$

9.5.13 Din relațiile

$$\begin{aligned}(|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \langle \varphi_2| \otimes \langle \psi_2|)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) &= \langle \varphi_2|\varphi\rangle \langle \psi_2|\psi\rangle |\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle, \\(|\varphi_1\rangle \langle \varphi_2| \otimes |\psi_1\rangle \langle \psi_2|)(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) &= \langle \varphi_2|\varphi\rangle \langle \psi_2|\psi\rangle |\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle\end{aligned}$$

rezultă că

$$|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \langle \varphi_2| \otimes \langle \psi_2| = |\varphi_1\rangle \langle \varphi_2| \otimes |\psi_1\rangle \langle \psi_2|,$$

și prin urmare

$$\begin{aligned}\text{tr}_1(|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \langle \varphi_2| \otimes \langle \psi_2|) &= \langle \varphi_2|\varphi_1\rangle |\psi_1\rangle \langle \psi_2|, \\ \text{tr}_2(|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \langle \varphi_2| \otimes \langle \psi_2|) &= \langle \psi_2|\psi_1\rangle |\varphi_1\rangle \langle \varphi_2|.\end{aligned}$$

În particular, avem

$$|ij\rangle \langle k\ell| = |i\rangle \langle k| \otimes |j\rangle \langle \ell| \quad \text{și} \quad \begin{aligned}\text{tr}_1 |ij\rangle \langle k\ell| &= \delta_{ik} |j\rangle \langle \ell|, \\ \text{tr}_2 |ij\rangle \langle k\ell| &= \delta_{j\ell} |i\rangle \langle k|.\end{aligned}$$

9.5.14 Dacă $A, B : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ au în raport cu baza $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0^0 & b_1^0 \\ b_0^1 & b_1^1 \end{pmatrix},$$

atunci operatorul $A \otimes B : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ are matricea

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_0^0 B & a_1^0 B \\ a_0^1 B & a_1^1 B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 & a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 & a_0^0 b_1^1 & a_1^0 b_0^1 & a_1^0 b_1^1 \\ a_0^1 b_0^0 & a_0^1 b_1^0 & a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_0^1 b_0^1 & a_0^1 b_1^1 & a_1^1 b_0^1 & a_1^1 b_1^1 \end{pmatrix}$$

și

$$\text{tr}_1(A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 \\ a_0^1 b_0^0 & a_0^1 b_1^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_1^1 b_0^1 & a_1^1 b_1^1 \end{pmatrix} = (\text{tr } A) B,$$

$$\mathrm{tr}_2(A \otimes B) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 & a_0^0 b_1^1 \end{pmatrix} & \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 \\ a_1^0 b_0^1 & a_1^0 b_1^1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_0^1 b_0^0 & a_0^1 b_1^0 \\ a_0^1 b_0^1 & a_0^1 b_1^1 \end{pmatrix} & \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_1^1 b_0^1 & a_1^1 b_1^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = (\mathrm{tr} B) A.$$

În particular, din ultimele două relații rezultă că

$$\mathrm{tr}_2(A \otimes B) \otimes \mathrm{tr}_1(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A \otimes B) A \otimes B.$$

9.5.15 În cazul unui operator liniar

$$T: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m,$$

o condiție necesară pentru a exista operatorii liniari

$$\begin{aligned} A: \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ B: \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^m \end{aligned} \quad \text{astfel încât} \quad T = A \otimes B$$

este ca

$$(\mathrm{tr}_2 T) \otimes (\mathrm{tr}_1 T) = (\mathrm{tr} T) T.$$

9.5.16 Un sistem compus din două subsisteme cuantice **A** și **B**, descrise de spațiile Hilbert $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}^m$, este descris de spațiul Hilbert $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$.

Orice operator liniar $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ referitor la sistemul cuantic **A** devine un operator liniar referitor la sistemul compus **A**&**B** prin identificarea cu $A \otimes I_m$. Similar, orice operator $B: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ referitor la sistemul cuantic **B** devine un operator referitor la sistemul compus **A**&**B** prin identificarea cu $I_n \otimes B$.

9.5.17 O stare pură $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ a sistemului compus este numită *stare separabilă* (*unentangled state*, în engleză) dacă există stările pure $|\varphi\rangle \in \mathbb{C}^n$ și $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^m$ astfel încât

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle.$$

În caz contrar, $|\Psi\rangle$ este numită *stare neseparabilă* (*entangled state*, în engleză).

9.5.18 Starea $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ este separabilă deoarece

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Stările Bell sunt neseparabile. Pentru ca β_0 să fie separabilă, adică

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle)$$

ar trebui ca $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ să verifice relațiile contradictorii

$$\alpha\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta\beta' \quad \text{și} \quad \alpha\beta' = 0 = \beta\alpha'.$$

9.5.19 Alegând o bază $\{|\varphi_i\rangle\}$ în $\mathbb{C}^n$ și o bază $\{|\psi_j\rangle\}$ în $\mathbb{C}^m$, o stare pură $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ se poate reprezenta sub forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Psi^{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle.$$

Numărul

$$r = \text{rang} \begin{pmatrix} \Psi^{00} & \dots & \Psi^{0m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi^{n-10} & \dots & \Psi^{n-1m-1} \end{pmatrix}$$

nu depinde de bazele alese și este numit *rangul Schmidt* al lui $|\Psi\rangle$. El este 1 dacă și numai dacă $|\Psi\rangle$ este separabilă. Dacă $|\Psi\rangle$ este neseparabilă, rangul Schmidt poate fi considerat ca o măsură a gradului de inseparabilitate.

În cazul stării Bell $|\beta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, rangul Schmidt este

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2.$$

9.5.20 Valorile medii a două observabile $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ și $B: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ în starea pură separabilă $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ sunt

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \varphi | \otimes \langle \psi | A \otimes I_m | \varphi \rangle \otimes |\psi \rangle = \langle \varphi | A | \varphi \rangle = \text{tr}(A|\varphi\rangle\langle\varphi|), \\ \langle B \rangle &= \langle \varphi | \otimes \langle \psi | I_n \otimes B | \varphi \rangle \otimes |\psi \rangle = \langle \psi | B | \psi \rangle = \text{tr}(B|\psi\rangle\langle\psi|). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Se observă că $\langle A \rangle$ nu depinde de $|\psi\rangle$, iar $\langle B \rangle$ nu depinde de $|\varphi\rangle$.

Operatorul densitate corespunzător stării pure separabile $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ este

$$\varrho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Deoarece $\text{tr}_2 \varrho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ și $\text{tr}_1 \varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ avem

$$\varrho = (\text{tr}_2 \varrho) \otimes (\text{tr}_1 \varrho),$$

iar relațiile (9.4) se pot scrie sub forma

$$\langle A \rangle = \text{tr} (A \text{tr}_2 \varrho) \quad \text{și} \quad \langle B \rangle = \text{tr} (B \text{tr}_1 \varrho).$$

9.5.21 Oricare ar fi operatorul densitate $\varrho: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ și oricare ar fi operatorii autoadjuncți $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ și $B: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$, avem

$$\begin{aligned} \text{tr} ((A \otimes I_m) \varrho) &= \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} (A \otimes I_m)_{k\ell}^{ij} \varrho_{ij}^{k\ell} = \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} A_k^i \delta_\ell^j \varrho_{ij}^{k\ell} \\ &= \sum_{i,k} A_k^i (\text{tr}_2 \varrho)_i^k = \text{tr} (A \text{tr}_2 \varrho), \\ \text{tr} ((I_n \otimes B) \varrho) &= \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} (I_n \otimes B)_{k\ell}^{ij} \varrho_{ij}^{k\ell} = \sum_{i,j} \sum_{k,\ell} \delta_k^i B_\ell^j \varrho_{ij}^{k\ell} \\ &= \sum_{j,\ell} B_\ell^j (\text{tr}_1 \varrho)_j^\ell = \text{tr} (B \text{tr}_1 \varrho), \end{aligned}$$

adică au loc relațiile

$$\begin{aligned} \text{tr} ((A \otimes I_m) \varrho) &= \text{tr} (A \text{tr}_2 \varrho), \\ \text{tr} ((I_n \otimes B) \varrho) &= \text{tr} (B \text{tr}_1 \varrho), \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{oricare ar fi} \\ A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \\ B: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m. \end{array} \quad (9.5)$$

Astfel, dacă sistemul compus $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ este în starea ϱ (pură sau mixtă), atunci statistica măsurărilor efectuate asupra sistemului $\mathbf{A}$ se poate descrie folosind *operatorul densitate redus* $\varrho^{\mathbf{A}} = \text{tr}_2 \varrho$, iar statistica măsurărilor efectuate asupra sistemului $\mathbf{B}$ folosind *operatorul densitate redus* $\varrho^{\mathbf{B}} = \text{tr}_1 \varrho$.

Operatorii densitate reduși

$$\text{tr}_2 \varrho: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{și} \quad \text{tr}_1 \varrho: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

sunt (v. pag. 189-9) singurii operatori liniari care satisfac relațiile (9.5).

9.5.22 Dacă $|\varphi_a\rangle$ și $|\psi_b\rangle$ sunt vectori proprii ai operatorilor $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ și $B: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ corespunzători valorilor proprii a și b , adică

$$A|\varphi_a\rangle = a|\varphi_a\rangle, \quad B|\psi_b\rangle = b|\psi_b\rangle,$$

atunci $|\varphi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$ este un vector propriu al operatorului $A \otimes B$ corespunzător valorii proprii ab , adică

$$(A \otimes B)(|\varphi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle) = ab(|\varphi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle).$$

În particular, avem

$$\begin{aligned} (A \otimes I_m)(|\varphi_a\rangle \otimes |\psi\rangle) &= a(|\varphi_a\rangle \otimes |\psi\rangle), & \text{oricare ar fi } |\psi\rangle \in \mathbb{C}^m, \\ (I_n \otimes B)(|\varphi\rangle \otimes |\psi_b\rangle) &= b(|\varphi\rangle \otimes |\psi_b\rangle), & \text{oricare ar fi } |\varphi\rangle \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Dacă descompunerile spectrale ale observabilelor A și B sunt

$$A = \sum_a a P_a^A \quad \text{și} \quad B = \sum_b b P_b^B,$$

atunci observabilele $A \otimes I_m$ și $I_n \otimes B$ au descompunerile

$$A \otimes I_m = \sum_a a P_a^A \otimes I_m \quad \text{și} \quad I_n \otimes B = \sum_b b I_n \otimes P_b^B.$$

Măsurând $A \otimes I_m$ în starea ϱ , rezultatul a se obține cu probabilitatea

$$p(a) = \text{tr}((P_a^A \otimes I_m)\varrho) = \text{tr}(P_a^A \text{tr}_2 \varrho),$$

adică egală cu probabilitatea obținerii rezultatului a în cazul măsurării observabilei A în starea $\text{tr}_2 \varrho$. Valoarea medie a observabilei $A \otimes I_m$ în starea ϱ este egală cu valoarea medie a observabilei A în starea $\text{tr}_2 \varrho$ (v. pag. 314-21)

$$\text{tr}((A \otimes I_m)\varrho) = \text{tr}(A \text{tr}_2 \varrho).$$

Similar, măsurând $I_n \otimes B$ în starea ϱ , obținem rezultatul b cu probabilitatea

$$p(b) = \text{tr}((I_n \otimes P_b^B)\varrho) = \text{tr}(P_b^B \text{tr}_1 \varrho),$$

adică egală cu probabilitatea obținerii rezultatului b în cazul măsurării observabilei B în starea $\text{tr}_1 \varrho$. Valoarea medie a observabilei $I_n \otimes B$ în starea ϱ este egală cu valoarea medie a observabilei B în starea $\text{tr}_1 \varrho$ (v. pag. 314-21)

$$\text{tr}((I_n \otimes B)\varrho) = \text{tr}(B \text{tr}_1 \varrho).$$

9.5.23 Starea Bell $|\beta_0\rangle$ este neseparabilă. Operatorul densitate corespunzător, adică

$$\varrho: \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2, \quad \varrho = |\beta_0\rangle\langle\beta_0| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$$

cu matricea

$$\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nu este produsul tensorial a doi operatori deoarece (v. pag. 312-15)

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \text{tr}_2 \varrho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \varrho^{\mathbf{B}} = \text{tr}_1 \varrho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

și

$$(\text{tr}_2 \varrho) \otimes (\text{tr}_1 \varrho) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq (\text{tr } \varrho) \varrho.$$

Starea Bell $|\beta_0\rangle$ nu este un produs tensorial de stări pure, dar nici operatorul densitate corespunzător $\varrho = |\beta_0\rangle\langle\beta_0|$ nu este un produs tensorial de operatori densitate. Știm însă că valorile medii $\langle A \rangle$ și $\langle B \rangle$ a două observabile $A \otimes I_2$ și $I_2 \otimes B$ în starea Bell $\varrho = |\beta_0\rangle\langle\beta_0|$ se pot exprima sub forma (v. pag. 314-21)

$$\langle A \rangle = \text{tr}(A \text{tr}_2 \varrho) \quad \text{și} \quad \langle B \rangle = \text{tr}(B \text{tr}_1 \varrho).$$

Deoarece $\text{tr}(\varrho^{\mathbf{A}})^2 = \text{tr}(\varrho^{\mathbf{B}})^2 = \frac{1}{2} < 1$, operatorii $\varrho^{\mathbf{A}}$ și $\varrho^{\mathbf{B}}$ nu descriu stări pure. Gradul de impuritate al stărilor $\varrho^{\mathbf{A}}$ și $\varrho^{\mathbf{B}}$ este maxim (v. pag. 287-6).

În cazul în care sistemul compus este în starea pură neseparabilă $|\beta_0\rangle$, informația pe care o avem despre sistemul compus reprezintă maximum posibil. În același timp, informația referitoare la fiecare dintre subsistemele componente reprezintă minimum posibil.

9.5.24 Starea *singlet*

$$|\beta_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle) = \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle)$$

are proprietatea remarcabilă de a-și păstra, până la un factor de fază, forma în urma trecerii la oricare altă bază ortonormată $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$. Scriind

$$|0'\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle,$$

$$|1'\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$$

matricea de trecere

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

este unitară, și prin urmare,

$$|ad - bc| = \sqrt{\det U \det U^*} = \sqrt{\det(UU^*)} = \sqrt{\det I_2} = 1.$$

Deoarece elementul

$$\frac{i}{\sqrt{2}} (|1'\rangle \otimes |0'\rangle - |0'\rangle \otimes |1'\rangle) = (ad - bc) \frac{i}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle)$$

din $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ diferă de $|\beta_2\rangle$ doar prin factorul $(ad - bc)$ cu $|ad - bc| = 1$, ambii descriu aceeași stare. Pentru $|\beta_2\rangle$ se obține descompunerea Schmidt

$$|\beta_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$

alegând bazele ortonormate:

$$\begin{aligned} \{|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |\varphi_1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\} & \text{ pentru primul sistem,} \\ \{|\psi_0\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), |\psi_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\} & \text{ pentru al doilea sistem.} \end{aligned}$$

În particular, se observă că rangul Schmidt al lui $|\beta_2\rangle$ este $r=2$, adică gradul de inseparabilitate al stării $|\beta_2\rangle$ este maxim.

9.5.25 Dacă $\varrho^{\mathbf{A}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $\varrho^{\mathbf{B}}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ sunt operatori densitate, atunci

$$\varrho^{\mathbf{A}} \otimes \varrho^{\mathbf{B}}: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$$

este operator densitate și

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \text{tr}_2(\varrho^{\mathbf{A}} \otimes \varrho^{\mathbf{B}}), \quad \varrho^{\mathbf{B}} = \text{tr}_1(\varrho^{\mathbf{A}} \otimes \varrho^{\mathbf{B}}).$$

Dacă sistemul compus $\mathbf{A} \& \mathbf{B}$ se află în starea $\varrho^{\mathbf{A}} \otimes \varrho^{\mathbf{B}}$, atunci oricare ar fi observabilele $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $B: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, avem

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \text{tr}((A \otimes I_m)(\varrho^{\mathbf{A}} \otimes \varrho^{\mathbf{B}})) = \text{tr}(A \varrho^{\mathbf{A}}) \\ \langle B \rangle &= \text{tr}((I_n \otimes B)(\varrho^{\mathbf{A}} \otimes \varrho^{\mathbf{B}})) = \text{tr}(B \varrho^{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

În particular, $\langle A \rangle$ nu depinde de $\varrho^{\mathbf{B}}$, și $\langle B \rangle$ nu depinde de $\varrho^{\mathbf{A}}$.

9.5.26 Dacă $\varrho_1^{\mathbf{A}}, \varrho_2^{\mathbf{A}}, \dots, \varrho_k^{\mathbf{A}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $\varrho_1^{\mathbf{B}}, \varrho_2^{\mathbf{B}}, \dots, \varrho_k^{\mathbf{B}}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ sunt operatori densitate și $p_1, p_2, \dots, p_k$ este o distribuție de probabilitate, adică

$$p_1, p_2, \dots, p_k \in [0, 1] \quad \text{și} \quad \sum_{j=1}^k p_j = 1,$$

atunci

$$\varrho = \sum_{j=1}^k p_j \varrho_j^{\mathbf{A}} \otimes \varrho_j^{\mathbf{B}}$$

este operator densitate și

$$\text{tr}_2 \varrho = \sum_{j=1}^k p_j \varrho_j^{\mathbf{A}}, \quad \text{tr}_1 \varrho = \sum_{j=1}^k p_j \varrho_j^{\mathbf{B}}.$$

Dacă sistemul compus $\mathbf{A}\&\mathbf{B}$ se află în starea ϱ , atunci oricare ar fi observabilele $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ și $B: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, avem

$$\langle A \rangle = \text{tr}(A \text{tr}_2 \varrho) \quad \text{și} \quad \langle B \rangle = \text{tr}(B \text{tr}_1 \varrho),$$

adică $\langle A \rangle$ nu depinde de $\varrho_1^{\mathbf{B}}, \varrho_2^{\mathbf{B}}, \dots, \varrho_k^{\mathbf{B}}$, și $\langle B \rangle$ nu depinde de $\varrho_1^{\mathbf{A}}, \varrho_2^{\mathbf{A}}, \dots, \varrho_k^{\mathbf{A}}$.

9.5.27 O stare mixtă $\varrho: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ a sistemului compus $\mathbf{A}\&\mathbf{B}$ este numită *stare separabilă* (*unentangled state*, în engleză) dacă există operatorii densitate

$$\varrho_1^{\mathbf{A}}, \varrho_2^{\mathbf{A}}, \dots, \varrho_k^{\mathbf{A}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \varrho_1^{\mathbf{B}}, \varrho_2^{\mathbf{B}}, \dots, \varrho_k^{\mathbf{B}}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

și o distribuție de probabilitate $p_1, p_2, \dots, p_k$ astfel încât

$$\varrho = \sum_{j=1}^k p_j \varrho_j^{\mathbf{A}} \otimes \varrho_j^{\mathbf{B}}.$$

În caz contrar, ϱ este numită *stare neseparabilă* (*entangled state*, în engleză).

9.5.28 Alegând o bază $\{|\varphi_i\rangle\}$ în $\mathbb{C}^n$ și o bază $\{|\psi_j\rangle\}$ în $\mathbb{C}^m$, o stare pură $|\Psi\rangle$ a sistemului compus se poate reprezenta sub forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Psi^{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle.$$

Conform teoremei de descompunere a lui Schmidt (v. pag. 191-16), bazele $\{|\varphi_i\rangle\}$ și $\{|\psi_j\rangle\}$ se pot alege astfel încât să obținem descompunerea

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{r-1} \Psi^{ii} |\varphi_i\rangle \otimes |\psi_i\rangle \quad \text{cu} \quad \Psi^{ii} \in (0, \infty).$$

Dacă sistemul compus este în starea pură $|\Psi\rangle$, atunci operatorii densitate care descriu stările celor două subsisteme

$$\begin{aligned} \varrho^{\mathbf{A}} &= \text{tr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i=0}^{r-1} (\Psi^{ii})^2 |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \\ \varrho^{\mathbf{B}} &= \text{tr}_1 |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i=0}^{r-1} (\Psi^{ii})^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \end{aligned}$$

au aceleași valori proprii nenule și anume $(\Psi^{00})^2, (\Psi^{11})^2, \dots, (\Psi^{r-1, r-1})^2$. Entropiile von Neumann ale stărilor celor două subsisteme sunt egale

$$S[\varrho^{\mathbf{A}}] = S[\varrho^{\mathbf{B}}] = \sum_{i=0}^{r-1} (\Psi^{ii})^2 \ln(\Psi^{ii})^2$$

și ele reprezintă o măsură a gradului de inseparabilitate a stării $|\Psi\rangle$.

9.5.29* Orice stare poate fi purificată în sensul următor: oricare ar fi operatorul densitate $\varrho^{\mathbf{A}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ există o stare pură $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ astfel încât

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \text{tr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

Există $p_j \in [0, 1]$ cu $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ și o bază ortonormată $\{|\varphi_j\rangle\}$ în $\mathbb{C}^n$ astfel încât

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|.$$

Alegând în $\mathbb{C}^n$ o bază ortonormată arbitrară $\{|\psi_j\rangle\}$ și

$$|\Psi\rangle = \sum_j \sqrt{p_j} |\varphi_j\rangle \otimes |\psi_j\rangle$$

obținem

$$\text{tr}_2 |\Psi\rangle\langle\Psi| = \text{tr}_2 \sum_{j,k} \sqrt{p_j p_k} |\varphi_j\rangle \otimes |\psi_j\rangle \langle\varphi_k| \otimes \langle\psi_k| = \sum_{j=1}^n p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \varrho^{\mathbf{A}}.$$

9.5.30 Dacă subsistemele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ ale unui sistem compus se află la distanță unul față de celălalt, singurele măsurători realizabile experimental sunt cele locale, adică referitoare fie la $\mathbf{A}$, fie la $\mathbf{B}$. Astfel operatorii implicați sunt de forma $A \otimes I_m$ sau $I_n \otimes B$. Plecând de la descompunerea spectrală

$$\sigma_3 = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

a observabilei σ_3 obținem că $\sigma_3 \otimes I_2$ are descompunerea spectrală

$$\sigma_3 \otimes I_2 = |0\rangle\langle 0| \otimes I_2 - |1\rangle\langle 1| \otimes I_2.$$

În cazul unui sistem compus din doi qubiți, aflat în starea neseparabilă $|\beta_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$, măsurând observabila $\sigma_3 \otimes I_2$ se pot obține:

- rezultatul 1 cu probabilitatea

$$p(1) = \langle\beta_2|(|0\rangle\langle 0| \otimes I_2)|\beta_2\rangle = \frac{1}{2},$$

- rezultatul -1 cu probabilitatea

$$p(-1) = \langle\beta_2|(|1\rangle\langle 1| \otimes I_2)|\beta_2\rangle = \frac{1}{2}.$$

După măsurătoare starea sistemului compus este starea separabilă

$$\frac{(|0\rangle\langle 0| \otimes I_2)|\beta_2\rangle}{\sqrt{p(1)}} = -i|01\rangle$$

în cazul obținerii rezultatului 1 și starea separabilă

$$\frac{(|1\rangle\langle 1| \otimes I_2)|\beta_2\rangle}{\sqrt{p(-1)}} = i|10\rangle$$

în cazul obținerii rezultatului -1.

Admitem că primul qubit se află la dispoziția lui Alice și al doilea la dispoziția lui Bob, situați la distanță unul față de celălalt. Dacă Alice măsoară observabila σ_3 și obține rezultatul 1, atunci ea știe că după măsurătoare qubitul ei se află în starea $|0\rangle$, iar al lui Bob în starea $|1\rangle$. Dacă obține rezultatul -1, atunci ea știe că după măsurătoare qubitul ei se află în starea $|1\rangle$, iar al lui Bob în starea $|0\rangle$. Astfel, Alice poate să prevadă cu precizie ce rezultat va obține Bob măsurând σ_3 .

9.5.31 Stările Bell verifică relațiile

$$\begin{aligned} |\beta_0\rangle &= (\sigma_0 \otimes I)|\beta_0\rangle, & |\beta_1\rangle &= (\sigma_1 \otimes I)|\beta_0\rangle, \\ |\beta_2\rangle &= (\sigma_2 \otimes I)|\beta_0\rangle, & |\beta_3\rangle &= (\sigma_3 \otimes I)|\beta_0\rangle \end{aligned}$$

9.5.32 Codificarea superdensă. Primind un sistem clasic cu doar două stări posibile, 0 și 1, putem deduce dacă starea lui este 0 sau 1, adică obținem un bit de informație. Primind un sistem cuantic cu spațiu Hilbert bidimensional (qubit), în general, prin măsurători nu putem extrage mai multă informație decât în cazul clasic (v. pag. 301-18 și pag. 306-12). În situații speciale însă, se poate transmite cu ajutorul unui qubit echivalentul a doi biți.

Considerăm un sistem cuantic compus din doi qubiți aflat în starea Bell β_0 cu qubiții **A** și **B** la distanță unul față de celălalt. Admitem că Alice are la dispoziție qubitul **A**, iar Bob qubitul **B** și că Alice dorește să-i transmită lui Bob unul dintre mesajele 00, 01, 10, 11, sau echivalent, mesajul k , unde k este unul dintre numerele 0, 1, 2, 3. Alice aplică qubitului avut la dispoziție transformarea σ_k și apoi îl trimite lui Bob. Având la dispoziție ambii qubiți, Bob măsoară observabila

$$O = 0|\beta_0\rangle\langle\beta_0| + 1|\beta_1\rangle\langle\beta_1| + 2|\beta_2\rangle\langle\beta_2| + 3|\beta_3\rangle\langle\beta_3|$$

și obține rezultatul k . Acest lucru se întâmplă deoarece în urma transformării σ_k aplicate de Alice qubitului **A**, starea sistemului compus **A**&**B** a devenit

$$(\sigma_k \otimes I)|\beta_0\rangle = |\beta_k\rangle.$$

9.5.33 Oricare ar fi $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2$, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 |\beta_k\rangle \otimes \sigma_k |\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} (i|10\rangle - i|01\rangle) \otimes (i\alpha|1\rangle - i\beta|0\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle) \\ &= |\psi\rangle \otimes |\beta_0\rangle. \end{aligned}$$

Relația obținută, referitoare la un sistem compus din trei qubiți, permite transmiterea la distanță a stării necunoscute $|\psi\rangle$.

9.5.34 *Teleportarea unei stări cuantice necunoscute.* Admitem că Alice și Bob, aflați la distanță unul față de celălalt, au la dispoziție câte un qubit al unui sistem compus din doi qubiți aflat în starea $|\beta_0\rangle$. Mai admitem că Alice mai are la dispoziție un alt qubit aflat în starea necunoscută $|\psi\rangle$ pe care dorește să o transfere qubitului aflat la dispoziția lui Bob. Astfel, sistemul compus format din cei trei qubiți se află în starea $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\beta_0\rangle$ care se mai poate scrie

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} (|\beta_0\rangle \otimes \sigma_0 |\psi\rangle + |\beta_1\rangle \otimes \sigma_1 |\psi\rangle + |\beta_2\rangle \otimes \sigma_2 |\psi\rangle + |\beta_3\rangle \otimes \sigma_3 |\psi\rangle).$$

Alice efectuează asupra sistemului de doi qubiți avut la dispoziție măsurătoarea observabilei

$$O = 0 |\beta_0\rangle\langle\beta_0| + 1 |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + 2 |\beta_2\rangle\langle\beta_2| + 3 |\beta_3\rangle\langle\beta_3|$$

lucru echivalent cu măsurarea în cazul sistemului de trei qubiți a observabilei

$$O \otimes I_2 = 0 |\beta_0\rangle\langle\beta_0| \otimes I_2 + 1 |\beta_1\rangle\langle\beta_1| \otimes I_2 + 2 |\beta_2\rangle\langle\beta_2| \otimes I_2 + 3 |\beta_3\rangle\langle\beta_3| \otimes I_2.$$

Rezultatele posibile sunt 0,1,2,3. Rezultatul k se obține cu probabilitatea

$$p(k) = \langle\Psi|(|\beta_k\rangle\langle\beta_k| \otimes I_2)|\Psi\rangle = \frac{1}{4},$$

iar în cazul obținerii lui, starea sistemului devine

$$\frac{(|\beta_k\rangle\langle\beta_k| \otimes I_2)|\Psi\rangle}{\sqrt{p(k)}} = |\beta_k\rangle \otimes \sigma_k |\psi\rangle,$$

adică qubitul aflat la dispoziția lui Bob trece în starea $\sigma_k |\psi\rangle$. Admitem că Alice poate să-l informeze pe Bob că a obținut rezultatul k folosind o cale de

comunicare clasică. Bob va aplica transformarea σ_k qubitului avut la dispoziție făcând ca starea acestuia să devină

$$\sigma_k^2|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Starea necunoscută $|\psi\rangle$ a fost astfel teleportată de la Alice la Bob.

9.5.35 Inegalitatea lui Bell. Într-un laborator $\mathbf{C}$ se prepară sisteme formate din câte două particule. După prepararea fiecărei perechi, una dintre particule este trimisă lui Alice și cealaltă lui Bob. Alice are la dispoziție două dispozitive care-i permit să măsoare două mărimi fizice A_1 și A_2 , putând obține rezultatul $a_1 \in \{-1, 1\}$ și respectiv $a_2 \in \{-1, 1\}$. Similar, Bob poate măsura mărimile fizice B_1 și B_2 , putând obține rezultatul $b_1 \in \{-1, 1\}$ și $b_2 \in \{-1, 1\}$. În cazul fiecărei particule primite Alice măsoară una dintre mărimile A_1, A_2 , alesă la întâmplare, iar Bob una dintre mărimile B_1, B_2 alesă tot la întâmplare. Admitem că Alice și Bob se află la distanță unul față de celălalt și că în cazul fiecărei perechi de particule, măsurătoarea se efectuează simultan astfel că rezultatele obținute nu se influențează unul pe celălalt. Mai admitem că pentru fiecare pereche de particule preparată în laboratorul $\mathbf{C}$, mărimile A_1, A_2, B_1, B_2 au valori bine determinate $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{-1, 1\}$. După efectuarea unui mare număr de măsurători, Alice și Bob se întâlnesc și calculează valorile medii $\mathbf{E}(A_1B_1)$, $\mathbf{E}(A_1B_2)$, $\mathbf{E}(A_2B_1)$, $\mathbf{E}(A_2B_2)$ ale produselor de mărimi $A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2$. Deoarece $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{-1, 1\}$, avem fie $(a_1 + a_2)b_1 = 0$, fie $(a_2 - a_1)b_2 = 0$, și prin urmare

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 = (a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2 \in \{-2, 2\}.$$

Notând cu $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ probabilitatea ca înainte de măsurători sistemul de două particule să fie în starea în care mărimile A_1, A_2, B_1, B_2 au valorile a_1, a_2, b_1, b_2 obținem pentru valoarea medie $\mathbf{E}(A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2)$ a mărimii $A_1B_1 + A_2B_1 + A_2B_2 - A_1B_2$ relațiile

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(A_1 B_1 + A_2 B_1 + A_2 B_2 - A_1 B_2) &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) (a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2) \\
&\leq \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) \cdot 2 = 2, \\
\mathbf{E}(A_1 B_1 + A_2 B_1 + A_2 B_2 - A_1 B_2) &= \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) a_1 b_1 \\
&\quad + \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) a_2 b_1 \\
&\quad + \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) a_2 b_2 \\
&\quad - \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2) a_1 b_2 \\
&= \mathbf{E}(A_1 B_1) + \mathbf{E}(A_2 B_1) + \mathbf{E}(A_2 B_2) - \mathbf{E}(A_1 B_2),
\end{aligned}$$

din care rezultă *inegalitatea lui Bell*

$$\mathbf{E}(A_1 B_1) + \mathbf{E}(A_2 B_1) + \mathbf{E}(A_2 B_2) - \mathbf{E}(A_1 B_2) \leq 2.$$

9.5.36 Dacă în experimentul prezentat la pag. 322-35, în laboratorul **C** se prepară sisteme compuse din doi qubiți în starea $|\beta_2\rangle$, Alice măsoară observabilele

$$A_1 = \sigma_3 \quad \text{și} \quad A_2 = \sigma_1,$$

și Bob măsoară

$$B_1 = \frac{-\sigma_3 - \sigma_1}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad B_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sqrt{2}},$$

atunci conform mecanicii cuantice

$$\begin{aligned}
\langle A_1 B_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta_2 | \sigma_3 \otimes (-\sigma_3 - \sigma_1) | \beta_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\langle A_2 B_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta_2 | \sigma_1 \otimes (-\sigma_3 - \sigma_1) | \beta_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\langle A_2 B_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta_2 | \sigma_1 \otimes (\sigma_3 - \sigma_1) | \beta_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\langle A_1 B_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \beta_2 | \sigma_3 \otimes (\sigma_3 - \sigma_1) | \beta_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Se constată că

$$\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle = 2\sqrt{2} > 2,$$

adică, *inegalitatea lui Bell este violată*. Deoarece relația

$$\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle = 2\sqrt{2}$$

este confirmată experimental, trebuie să admitem că cel puțin una dintre ipotezele, aparent rezonabile, utilizate pentru deducerea inegalității lui Bell nu este satisfăcută în cazul sistemelor cuantice. Stările neseperabile oferă ceva inexistent în fizica clasică. Ele reprezintă o importantă resursă, amplu exploatată în teoria cuantică a informației (v. pag. 320-32, pag. 321-34 și [2, 17, 26]).

9.6 Evoluția în timp a stării unui sistem cuantic

9.6.1 Pentru orice sistem cuantic izolat există un operator autoadjunct H , numit *hamiltonianul sistemului*, astfel încât evoluția în timp a stării sistemului este descrisă de ecuația

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

numită *ecuația Schrödinger*.

9.6.2 Dacă H nu depinde de timp, prin calcul direct, se constată că

$$\psi(q, t) = e^{-i(t-t_0)H} \psi(q, t_0)$$

verifică ecuația Schrödinger și deci descrie evoluția stării sistemului în funcție de starea la momentul t_0 . Operatorul $e^{-i(t-t_0)H}$, numit *operator de evoluție*, este un operator unitar

$$\left(e^{-i(t-t_0)H}\right)^+ e^{-i(t-t_0)H} = e^{i(t-t_0)H^*} e^{-i(t-t_0)H} = I.$$

9.6.3 Dacă ψ_0 este o funcție proprie a hamiltonianului sistemului

$$H\psi_0 = E_0 \psi_0$$

și dacă la momentul t_0 starea sistemului este descrisă de ψ_0

$$\psi(q, t_0) = \psi_0(q),$$

atunci starea sistemului nu variază în timp

$$\psi(q, t) = e^{-i(t-t_0)H} \psi_0(q) = e^{-i(t-t_0)E_0} \psi_0(q)$$

Funcțiile proprii ale hamiltonianului descriu *stări staționare* ale sistemului.

9.6.4 În cazul unui qubit cu hamiltonianul

$$H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad H = \omega \sigma_1 = \omega(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$$

și deci, în baza computațională $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, cu matricea

$$H = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

nivelele de energie sunt soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} -E & \omega \\ \omega & -E \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$E_{\pm} = \pm\omega.$$

Stările staționare corespunzătoare sunt

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{și} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Utilizând reprezentarea spectrală

$$H = \omega|+\rangle\langle +| - \omega|-\rangle\langle -|$$

obținem că

$$\begin{aligned} e^{-i(t-t_0)H} &= e^{-i\omega(t-t_0)}|+\rangle\langle +| + e^{i\omega(t-t_0)}|-\rangle\langle -| \\ &= \frac{1}{2}e^{-i\omega(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} (1 \quad 1) + \frac{1}{2}e^{i\omega(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega(t-t_0) & -i \sin \omega(t-t_0) \\ -i \sin \omega(t-t_0) & \cos \omega(t-t_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În reprezentare matriceală, plecând de la forma diagonală

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

obținem

$$e^{-i(t-t_0)H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(t-t_0)\omega} & 0 \\ 0 & e^{i(t-t_0)\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

adică reobținem că

$$e^{-i(t-t_0)H} = \begin{pmatrix} \cos \omega(t-t_0) & -i \sin \omega(t-t_0) \\ -i \sin \omega(t-t_0) & \cos \omega(t-t_0) \end{pmatrix}.$$

9.6.5 Starea la un moment t_0 determină complet evoluția în timp a stării sistemului.

Se admite că pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$ există un operator unitar $U(t, t_0)$ astfel încât

$$\psi(q, t) = U(t, t_0) \psi(q, t_0),$$

pentru orice evoluție posibilă $\psi(q, t)$ a stării sistemului cuantic considerat.

Produsul scalar a două soluții ale ecuației Schrödinger nu variază în timp

$$\langle \psi_1(q, t), \psi_2(q, t) \rangle = \langle \psi_1(q, t_0), \psi_2(q, t_0) \rangle.$$

Două stări ortogonale la un moment t_0 rămân ortogonale la orice alt moment.

Impunând ca $\psi(q, t)$ să verifice ecuația Schrödinger, obținem ecuația

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0). \quad (9.6)$$

Operatorii de evoluție verifică relațiile

$$U(t, t_0) = I \quad \text{și} \quad U(t, t_0) = U(t, t_1) U(t_1, t_0).$$

9.6.6 Știm că orice operator unitar este diagonalizabil și că valorile lui proprii sunt unimodulare, adică de forma $e^{i\lambda}$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$. Există o transformare unitară S astfel încât

$$U(t, t_0) = S^* \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\lambda_d} \end{pmatrix} S.$$

Din această relație rezultă că

$$U(t, t_0) = e^{iA(t, t_0)},$$

unde $A(t, t_0)$ este operatorul autoadjunct

$$A(t, t_0) = S^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} S.$$

Operatorul unitar $U(t, t_0)$ verifică ecuația (9.6) și condiția $U(t_0, t_0) = I$ dacă

$$\frac{d}{dt}A(t, t_0) = -H \quad \text{și} \quad A(t_0, t_0) = 0.$$

În cazul în care H nu depinde de timp, reobținem

$$U(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)H}.$$

9.6.7 Spațiul stărilor unei particule care se mișcă de-a lungul unei drepte este

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ \Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(q)|^2 dq < \infty \right\}$$

(spațiul Hilbert al funcțiilor de pătrat integrabil), operatorul coordonată este

$$\Psi \mapsto \hat{q}\Psi, \quad \text{unde} \quad (\hat{q}\Psi)(q) = q \Psi(q), \quad (9.7)$$

iar impulsul este descris de operatorul

$$\Psi \mapsto \hat{p}\Psi, \quad \text{unde} \quad \hat{p}\Psi = -i \frac{d\Psi}{dq}. \quad (9.8)$$

9.6.8 Legătura dintre variabilele complementare $\hat{q}$ și $\hat{p}$ se poate exprima cu ajutorul transformării Fourier

$$\mathcal{F}[\Psi](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipq} \Psi(q) dq.$$

Deoarece în cazul unei funcții $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ avem $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} \Psi(q) = 0$, integrând prin părți, obținem relația

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[-i \frac{d\Psi}{dq} \right] (p) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipq} \frac{d\Psi}{dq}(q) dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-ipq} \Psi(q) dq = p \mathcal{F}[\Psi](p) \end{aligned}$$

care se mai poate scrie

$$\mathcal{F} \hat{p} = \hat{q} \mathcal{F}$$

sau

$$\hat{p} = \mathcal{F}^{-1} \hat{q} \mathcal{F}. \quad (9.9)$$

9.6.9 În starea cuantică descrisă de funcția normată Ψ , numărul

$$\int_a^b |\Psi(q)|^2 dq$$

reprezintă probabilitatea de a găsi particula în intervalul $[a, b]$,

$$\int_a^b |\mathcal{F}[\Psi](p)|^2 dp$$

probabilitatea ca impulsul particulei să aparțină intervalului $[a, b]$, iar

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle \Psi, \hat{q} \Psi \rangle \quad \text{și} \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle \Psi, \hat{p} \Psi \rangle$$

reprezintă valorile medii ale coordonatei și impulsului în starea Ψ .

9.6.10 Descrierea evoluției în timp a stării sistemului se reduce la găsirea hamiltonianului H și rezolvarea ecuației Schrödinger. În general, H este de forma

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}, t) = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dq^2} + V(q, t)$$

unde m este masa particulei iar $V(q, t)$ este energia potențială.

Ecuația Schrödinger este o ecuație diferențială de ordinul al doilea

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} + V(q, t) \Psi.$$

În cazul în care H nu depinde de timp, stările staționare

$$\Psi_n(q, t) = e^{-itE_n} \Psi_n(q)$$

corespund funcțiilor proprii ale hamiltonianului

$$-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial q^2} + V(q) \Psi_n = E_n \Psi_n$$

iar evoluția în timp a stării sistemului este descrisă de funcția

$$\Psi(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-itE_n} \Psi_n(q)$$

cu coeficienții c_n determinați de condiția ca $\Psi(q, t)$ să coincidă cu o stare dată, la un moment fixat.

9.6.11 O versiune foarte simplificată a sistemului cuantic prezentat se obține admitând că pentru particula considerată numărul de poziții care se pot distinge este finit. Admitem că numărul pozițiilor ce pot fi distinse, $d=2s+1$, este impar și utilizăm inelul $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ al întregilor modulo d ca model matematic pentru descrierea lor. Alegând $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ ca o mulțime de reprezentanți ‘standard’ pentru elementele lui $\mathbb{Z}_d$, stările sistemului cuantic considerat sunt descrise de spațiul de funcții

$$\ell^2(\mathbb{Z}_d) = \{\psi : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \psi \text{ este funcție} \},$$

care considerat împreună cu produsul scalar

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \sum_{n=-s}^s \overline{\psi_1(n)} \psi_2(n)$$

este un spațiu Hilbert d -dimensional, izomorf cu spațiul Hilbert standard $\mathbb{C}^d$.
Spunem despre o funcție $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}_d)$ că este normată dacă

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-s}^s |\psi(n)|^2} = 1.$$

Oricărei funcții ψ neidentic nule îi corespunde funcția normată $\frac{\psi}{\|\psi\|}$.

9.6.12 Asociem coordonatei operatorul (a se vedea (9.7))

$$Q : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \quad (Q\psi)(n) = n \psi(n),$$

iar impulsului operatorul (a se vedea (9.9))

$$P : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \quad P = F^{-1} Q F = F^* Q F,$$

unde F este transformarea Fourier finită

$$\ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d) : \psi \mapsto F[\psi], \quad F[\psi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} \psi(n),$$

cu inversa

$$\ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d) : \psi \mapsto F^*[\psi], \quad F^*[\psi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} kn} \psi(n).$$

9.6.13 În cazul unei stări normate $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}_d)$, avem

$$|\psi(n)|^2 = \text{probabilitatea ca particula să se afe în punctul } n$$

și

$$|F[\psi](k)|^2 = \text{probabilitatea ca particula să aibă impulsul } k.$$

Numărul

$$\langle Q \rangle = \langle \psi, Q\psi \rangle = \sum_{n=-s}^s \overline{\psi(n)} (Q\psi)(n) = \sum_{n=-s}^s n |\psi(n)|^2$$

reprezintă valoarea medie a coordonatei, iar

$$\langle P \rangle = \langle \psi, P\psi \rangle = \langle \psi, F^* Q F \psi \rangle = \langle F[\psi], Q F[\psi] \rangle = \sum_{n=-s}^s n |F[\psi](n)|^2$$

valoarea medie a impulsului în starea $|\psi\rangle$.

9.6.14 Pentru fiecare $m \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$, funcția

$$\psi_m : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m, \\ 0 & \text{dacă } n \neq m \end{cases}$$

este funcție proprie a operatorului coordonată Q

$$Q\psi_m = m\psi_m,$$

iar funcția $\tilde{\psi}_m = F^{-1}[\psi_m]$, adică

$$\tilde{\psi}_m : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\psi}_m(k) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{\frac{2\pi i}{d} mk}$$

este funcție proprie a operatorului impuls P

$$P\tilde{\psi}_m = F^{-1}QF F^{-1}[\psi_m] = m F^{-1}[\psi_m] = m\tilde{\psi}_m.$$

9.6.15 În starea ψ_m particula se află în punctul m

$$|\psi_m(n)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m, \\ 0 & \text{dacă } n \neq m, \end{cases}$$

dar impulsul ei este complet nedeterminat

$$|F[\psi_m](n)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{d}} e^{-\frac{2\pi i}{d} mn} \right|^2 = \frac{1}{d}, \quad \forall n \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}.$$

Similar, în starea $\tilde{\psi}_m$ impulsul are valoarea m

$$|F[\tilde{\psi}_m](n)|^2 = |\psi_m(n)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m, \\ 0 & \text{dacă } n \neq m, \end{cases}$$

dar poziția particulei este complet nedeterminată

$$|\tilde{\psi}_m(n)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{d}} e^{\frac{2\pi i}{d} mn} \right|^2 = \frac{1}{d}, \quad \forall n \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}.$$

9.6.16 Scriind $|n\rangle$ în loc de ψ_n și $|\tilde{n}\rangle$ în loc de $\tilde{\psi}_n$ avem

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=-s}^s n |n\rangle \langle n|, & F &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d} kn} |k\rangle \langle n|, \\ P &= \sum_{n=-s}^s n |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|, & F^* &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{\frac{2\pi i}{d} kn} |k\rangle \langle n|. \end{aligned}$$

Sistemele de funcții proprii $\{|n\rangle\}$ și $\{|\tilde{n}\rangle\}$ ale lui Q și P

$$Q|n\rangle = n|n\rangle, \quad P|\tilde{n}\rangle = n|\tilde{n}\rangle$$

sunt baze ortonormate în $\ell^2(\mathbb{Z}_d)$

$$\sum_{n=-s}^s |n\rangle\langle n| = I \quad \text{și} \quad \langle n|m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m, \\ 0 & \text{dacă } n \neq m, \end{cases}$$

$$\sum_{n=-s}^s |\tilde{n}\rangle\langle \tilde{n}| = I \quad \text{și} \quad \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=m, \\ 0 & \text{dacă } n \neq m. \end{cases}$$

Deoarece

$$\langle \tilde{n}|\psi\rangle = \langle F^*[\psi_n], \psi\rangle = \langle \psi_n, F[\psi]\rangle = \langle n|F[\psi]\rangle,$$

orice element $|\psi\rangle \in \ell^2(\mathbb{Z}_d)$ se poate scrie sub forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^s |n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^s \psi(n) |n\rangle,$$

unde funcția

$$\psi: \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(n) = \langle n|\psi\rangle$$

este $|\psi\rangle$ în reprezentarea coordonatelor și sub forma

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^s |\tilde{n}\rangle\langle \tilde{n}|\psi\rangle = \sum_{n=-s}^s F[\psi](n) |\tilde{n}\rangle,$$

unde funcția

$$F[\psi]: \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F[\psi](n) = \langle \tilde{n}|\psi\rangle$$

este $|\psi\rangle$ în reprezentarea impulsurilor.

9.6.17 Evoluția în timp a stării sistemului cu hamiltonianul dependent de timp

$$H: \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \quad H = \frac{1}{2\mu} P^2 + \beta \cos(\omega t) Q,$$

poate fi analizată rezolvând ecuația Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

cu ajutorul programului MATHEMATICA. În Fig. 9.2, 9.3, 9.4 prezentăm evoluția în timp a distribuției de probabilitate $|\Psi(n, t)|^2$ privind localizarea particulei în cazul în care la momentul $t=0$,

$$\Psi(n, 0) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = -3, \\ 0 & \text{dacă } n \neq -3, \end{cases}$$

adică particula se află în punctul $n = -3$. În partea de jos a Fig. 9.2, 9.3, 9.4 prezentăm evoluția distribuției de probabilitate $|F[\Psi](k, t)|^2$ referitoare la impulsul particulei. Se observă că la momentul $t=0$ impulsul este complet nedeterminat, toate valorile posibile fiind egal probabile.

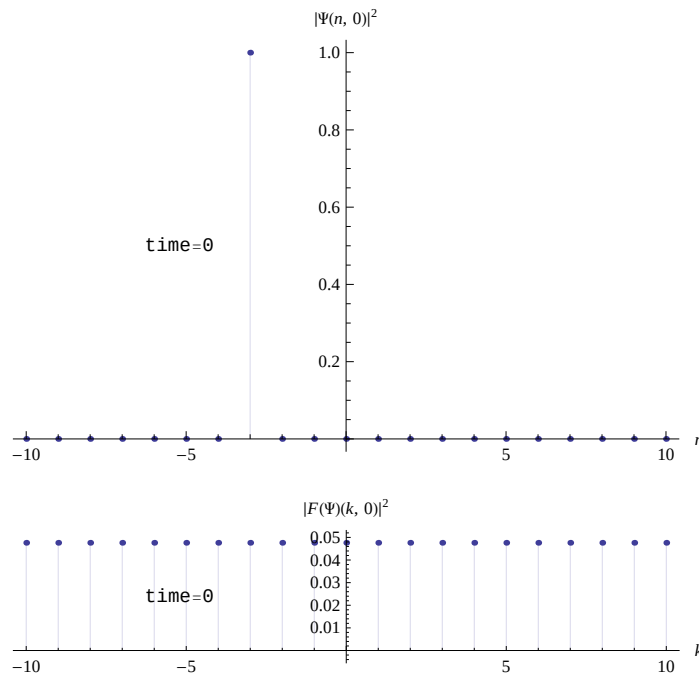


Figura 9.2: Distribuția de probabilitate privind poziția particulei și distribuția de probabilitate privind impulsul particulei la momentul $t = 0$.

9.6.18 MATHEMATICA: Programul utilizat pentru a obține Fig. 9.2, 9.3, 9.4

```
time = 0; mu = 100; beta = 2; omega = 7; d = 21; s = (d - 1)/2
T[n_, m_] := N[(1/d) Sum[k Exp[2 Pi I (n - m) k/d], {k, 1, d}]]
H[n_, m_, t_] := (1/(2 mu)) Sum[ T[n, k] T[k, m], {k, 1, d}] +
    beta n Cos[omega t] DiscreteDelta[n - m]
eqns = {Table[psi[n]'[t] == Sum[- I H[n, m, t] psi[m][t],
    {m, 1, d}], {n, 1, d}], psi[8][0] == 1, Table[psi[n][0] == 0,
```

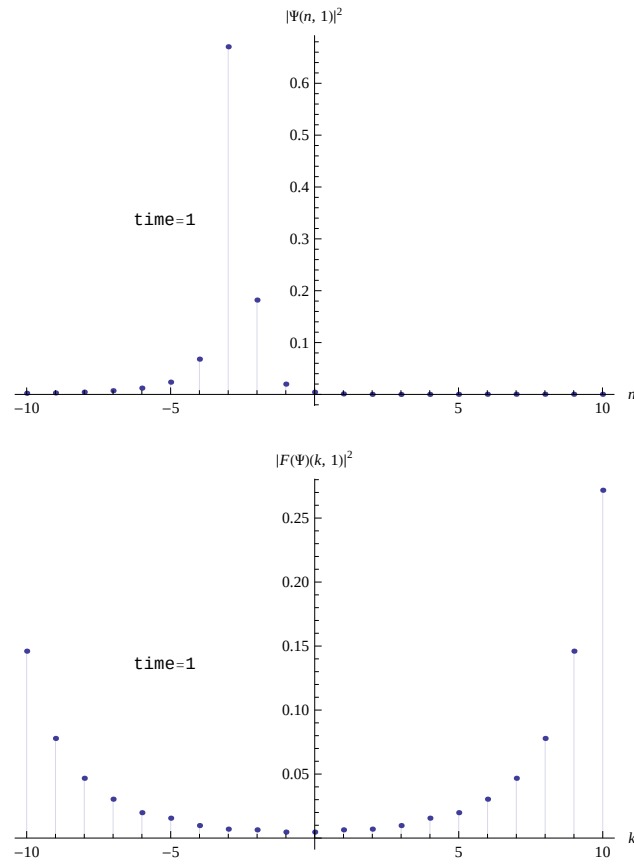


Figura 9.3: Distribuția de probabilitate privind poziția particulei și distribuția de probabilitate privind impulsul particulei la momentul $t = 1$.

```

{n, 1, 7}], Table[psi[n][0] == 0, {n, 9, d}]]
ndsolve = NDSolve[eqns, Table[psi[n], {n, d}], {t, 10}]
Psi = Normalize[Table[Evaluate[Abs[psi[n][time]] /. ndsolve][[1]], {n, 1, d}]]
ListPlot[Table[{n - s - 1, Psi[[n]]^2}, {n, 1, d}],
Filling -> Axis, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All,
PlotLegends -> Placed["time=0", {0.25, 0.5}],
AxesLabel -> {n, Abs[\[CapitalPsi][n, 0]]^2}]
FPsi[k_] := N[(1/Sqrt[d]) Sum[Exp[2 Pi I k n/d] Psi[[n]], {n, 1, d}]]
ListPlot[Table[{n - s - 1, Abs[FPsi[n]]^2}, {n, 1, d}],
Filling -> Axis, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All,
PlotLegends -> Placed["time=0", {0.25, 0.5}], AspectRatio -> 0.2,
AxesLabel -> {k, Abs[F[\[CapitalPsi]][k, 0]]^2}]

```

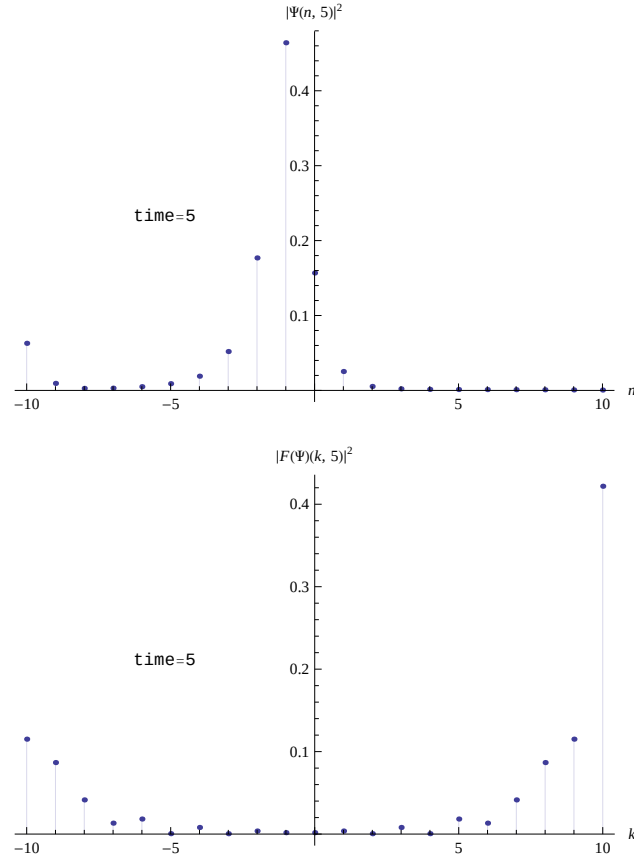


Figura 9.4: Distribuția de probabilitate privind poziția particulei și distribuția de probabilitate privind impulsul particulei la momentul $t = 5$.

9.6.19 Mulțimea $\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ este spațiul configurațiilor sistemului iar

$$\{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$$

poate fi privită ca fiind spațiul fazelor. *Funcția Wigner discretă*

$$W : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \times \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

definită prin

$$W(n, m) = \frac{1}{d} \sum_{k=-s}^s e^{\frac{4\pi i}{d}mk} \psi(n-k) \overline{\psi(n+k)},$$

poate fi utilizată în locul funcției de undă

$$\psi : \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Descrierea alternativă bazată pe utilizarea funcției Wigner oferă anumite avantaje atât în efectuarea unor calcule cât și în interpretarea formalismului matematic.

9.7 Versiuni finit-dimensionale ale oscilatorului armonic

9.7.1 Utilizând relația (9.9), adică $\hat{p} = \mathcal{F}^{-1} \hat{q} \mathcal{F}$, hamiltonianul oscilatorului armonic

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{q}^2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}q^2$$

se mai poate scrie sub forma

$$H = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\hat{q}^2\mathcal{F} + \frac{1}{2}\hat{q}^2 \quad \text{sau} \quad H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}\hat{p}^2\mathcal{F}^{-1}.$$

9.7.2 Operatorul

$$H_1 : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \quad H_1 = \frac{1}{2}F^{-1}Q^2F + \frac{1}{2}Q^2,$$

unde Q este operatorul coordonată

$$(Q\psi)(n) = n\psi(n),$$

și F este transformarea Fourier finită

$$F[\psi](k) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-s}^s e^{-\frac{2\pi i}{d}kn} \psi(n),$$

este hamiltonianul unei versiuni finit-dimensionale a oscilatorului armonic.

El este Fourier invariant, adică verifică relația $FH_1 = H_1F$ echivalentă cu

$$F^{-1}H_1F = H_1.$$

9.7.3 Operatorul cu diferențe finite

$$P^2 : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \quad (P^2\psi)(n) = -[\psi(n+1) - 2\psi(n) + \psi(n-1)]$$

este o versiune finit-dimensională a operatorului diferențial $\hat{p}^2 = -\frac{d^2}{dq^2}$, iar

$$H_2 : \ell^2(\mathbb{Z}_d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_d), \quad H_2 = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}FP^2F^{-1},$$

este hamiltonianul unui oscilator finit, Fourier invariant și cu valori proprii nedegenerate. Din relația

$$H_2\psi = \lambda\psi \implies H_2(F\psi) = F(H_2\psi) = \lambda(F\psi)$$

rezultă că funcțiile proprii ale lui H_2 sunt în același timp funcții proprii ale lui F . Funcțiile proprii normate $h_0, h_1, \dots, h_{2s}$ ale lui H_2 , considerate în ordinea crescătoare a numărului alternanțelor de semn, se numesc *funcții Harper*. Ele formează o bază ortonormată în $\ell^2(\mathbb{Z}_d)$ și are loc relația

$$F = \sum_{n=0}^{2s} (-i)^n |h_n\rangle\langle h_n|$$

utilizată pentru a defini *transformarea Fourier fracționară*

$$F^\alpha = \sum_{n=0}^{2s} (-i)^{n\alpha} |h_n\rangle\langle h_n|.$$

9.7.4 Dacă α se află într-o vecinătate suficient de mică a lui 1, atunci operatorii

$$H_{1,\alpha} = \frac{1}{2}F^{-\alpha}Q^2F^\alpha + \frac{1}{2}Q^2 \quad \text{și} \quad H_{2,\alpha} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}F^\alpha P^2 F^{-\alpha}$$

reprezintă versiuni deformate ale oscilatorilor H_1 și H_2 .

9.7.5 Utilizând stările coerente standard (v. pag. 123-10), hamiltonianul oscilatorului armonic se poate scrie sub forma [14]

$$H = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} dq dp \left(\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} \right) |q, p\rangle\langle q, p|$$

Deoarece frame-urile $\{|\alpha, \beta\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$ și $\{|\alpha, \beta\rangle\rangle\}_{\alpha, \beta=-s}^s$ reprezintă versiuni finite

ale sistemului de stări coerente standard, operatorii (v. pag. 182-10)

$$H_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \right) |\alpha, \beta\rangle\langle \alpha, \beta|,$$

$$H_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{d} \sum_{\alpha, \beta=-s}^s \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \right) |\alpha, \beta\rangle\rangle\langle\langle \alpha, \beta|$$

sunt hamiltonienii unor versiuni finite ale oscilatorului armonic.

9.7.6 Când dimensiunea $d=2s+1$ crește, valorile proprii ale operatorilor H_1 , H_2 , H_3 , H_4 au tendința de a deveni echidistante (v. Fig. 9.5), iar funcțiile proprii de a semăna cu funcțiile proprii Hermite-Gauss ale oscilatorului armonic H .

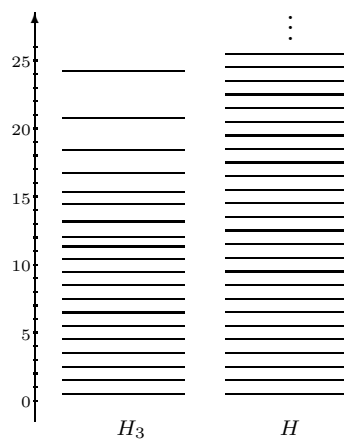


Figura 9.5: Valorile proprii ale operatorului H_3 (în cazul $d=21$) și ale lui H .

Bibliografie

- [1] I. Armeanu, *Analiză Funcțională*, Editura Universității din București, 1998.
- [2] S. Barnett, *Quantum Information*, Oxford University Press, 2009.
- [3] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg, E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003.
- [4] D. Beklémichev, *Cours de Géométrie Analytique et d'Algèbre Linéaire*, Éditions Mir, Moscou, 1988.
- [5] V. Brînzănescu, O. Stănășilă, *Matematici Speciale. Teorie, Exemple, Aplicații*, Editura ALL EDUCATIONAL S. A., 1998.
- [6] Liviu-Adrian Cotfas, A finite-dimensional quantum model for the stock market, *Physica A* **392** (2013) 371-380.
- [7] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Properties of finite Gaussians and the discrete-continuous transition, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 425305.
- [8] Nicolae Cotfas and Daniela Dragoman, Finite oscillator obtained through finite frame quantization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013) 355301
- [9] Nicolae Cotfas and Jean-Pierre Gazeau, Finite tight frames and some applications, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 193001
- [10] N. Cotfas, J.-P. Gazeau and A. Vourdas, Finite-dimensional Hilbert space and frame quantization, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 175303.
- [11] N. Cotfas și L.-A. Cotfas, *Elemente de Analiză Matematică*, Editura Universității din București, 2010.

- [12] N. Cotfas și L.-A. Cotfas, *Complemente de Matematică I*, Editura Universității din București, 2012.
- [13] N. Cotfas și L.-A. Cotfas, Hypergeometric type operators and their supersymmetric partners, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 052101
- [14] J.-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH, Berlin, 2009.
- [15] S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, Berlin, 2011.
- [16] P. Hamburg, P. Mocanu și N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcții complexe)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [17] G. Jaeger, *Quantum Information*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [18] J. F. James, *A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2011.
- [19] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Analiză Funcțională*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [20] M. L. Mehta, 1987 Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 781
- [21] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [22] W. Miller, Jr., *Lie Theory and Special Functions*, Academic Press, New York, 1968.
- [23] G. Mociă , *Probleme de Funcții Speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988.
- [24] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie des Représentations des Groupes*, Éditions Mir, Moscou, 1979.
- [25] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele Algebrei*, vol I, Editura Academiei, București, 1986.

- [26] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
- [27] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov, and V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [28] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer, Berlin, 1986.
- [29] D. Petz, *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer, 2008.
- [30] M.-E. Piticu, M. Vraciu, C. Timofte, G. Pop, *Ecuații Diferențiale. Culegere de Probleme*, Editura Universității București, 1995.
- [31] I. L. Popescu, I. Armeanu, D. Blideanu, N. Cotfas și I. Șandru, *Probleme de Analiză Complexă*, Editura Tehnică, București, 1995.
- [32] R. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1978.
- [33] M. Ruzzi, Jacobi θ -functions and discrete Fourier transform, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 063507.
- [34] J.D. Talman, *Special Functions. A Group Theoretical Approach*, Benjamin, New York, 1968.
- [35] C. Teleman, M. Teleman, *Elemente de teoria grupurilor cu aplicații în topologie și fizică*, Editura Științifică, București, 1973.
- [36] C. Udriște, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, Geometrie și Ecuații Diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [37] N. Ja. Vilenkin, *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*, Dunod, Paris, 1969.
- [38] N. J. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Special Functions and Integral Transforms*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
- [39] V. S. Vladimirov, *Ecuațiile Fizicii Matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.

- [40] V. Vladimirov, *Distributions en Physique Mathématique*, Editions MIR, Moscou, 1979.
- [41] V. S. Vladimirov și alții, *Culegere de Probleme de Ecuațiile Fizicii Matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
- [42] A. Vourdas, Quantum systems with finite Hilbert space, *Rep. Prog. Phys.* **67** (2004) 267-320.
- [43] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Cambridge Mathematical Library: A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.