

# Probleme

## Spatii normate. Spatii metrice. Spatii cu produs scalar

1) Fie  $X = \mathbb{C}^2$  (cu  $K = \mathbb{C}$ ). Aratati ca aplicatia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  definita prin

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i \bar{y}_i$$

este un produs scalar pe  $X$ .

2) Fie  $\mathcal{C} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua pe } [0, 1]\}$ . Aratati ca aplicatia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  data de

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

este un produs scalar.

3) Fie  $X = \mathbb{R}^2$ . Urmatoarele aplicatii sunt norme pe  $X$ :

$$a) \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^2 |x_i|,$$

$$b) \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 |x_i|^2},$$

$$c) \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} |x_i|,$$

4) Aratati ca in  $\mathbb{R}^2$

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

5) Fie  $X = \mathbb{R}^2$ . Aratati ca urmatoarele aplicatii sunt distante pe  $X$ :

$$a) \quad d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}, \quad b) \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|, \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq 2} |x_i - y_i|.$$

6) Fie  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Definim

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua pe } [a, b]\}.$$

2

Aplicatia  $d : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definita prin

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

este distanta pe  $\mathcal{C}([a, b])$ .

7) Aplicatia

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

este metrica pe  $\mathcal{C}([a, b])$ .

8) Fie  $(X, d)$  spatiu metric si fie  $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  definita prin

$$d_1(x, y) = \ln(1 + d(x, y)), \quad \forall x, y \in X.$$

Aratati ca  $d_1$  este o noua metrica pe  $X$ .

9) Aratati ca

$$d_1(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

si

$$d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

sunt distante pe  $\mathbb{R}$ .

10) Fie  $X$  un spatiu pre-Hilbertian real. Aratati ca

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|.$$

## Serii

1) Studiati convergenta urmatoarelor serii:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^b}, \quad a, b > 0; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n};$$

$$\text{d) } \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}, \quad \text{e) } \sum_{n \geq 1} (2 + \sin n)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

2) Calculati suma seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n^2 - 1)}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

3) Studiați natura seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n + n}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

4) Studiați natura seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}; \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{2^n}.$$

5) Studiați natura seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + \sqrt{n+1}};$$

$$\text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{a(a+1) \cdots (a+n)}, \quad a > 0.$$

6) Studiați natura seriilor:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^2}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \left( \frac{an+b}{cn+d} \right)^n, \quad a, b, c, d > 0;$$

$$\text{c) } \sum_{n \geq 1} \left( \sqrt{(n+1)(n+a)} - n \right)^n, \quad a > 0. \quad \blacksquare$$

## Limite

$$1) \text{ Aratați că } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$2) \text{ Aratați că } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

$$3) \text{ Aratați că } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}, \text{ dar } \exists \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)) \neq \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)).$$

$$4) \text{ Aratați că } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \text{ dar nu avem limite iterate.}$$

$$5) \text{ Aratați că } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x+y}.$$

6) Calculați limitele după direcția  $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$ , în punctul  $(0, 0)$ , pentru

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

7) Calculati limitele dupa directia  $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$  in  $(0, 0)$  pentru  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ .

8) Aratati ca  $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

9) Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Aratati ca  $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , dar  $\nexists$  limitele iterate.

10) Fie

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Aratati ca  $\nexists \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$ .

11) Fie  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , data de

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^4}.$$

Aratati ca  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ , dar  $\exists$  limitele iterate.

12) Calculati limita in punctul  $(\pi/4, 1)$  in directia  $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  pentru

$$f(x, y) = \left( x^2 + x \cos y, \ln \sin \frac{x}{y} \right).$$

13) Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiati existenta limitei dupa directie in  $(0, 0)$ .

## Continuitate

1) Studiati continuitatea functiei:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2) Studiați continuitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3) Studiați continuitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4) Studiați continuitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5) Studiați continuitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

6) Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiați continuitatea și continuitatea după direcție în punctul  $(0, 0)$ .

### Derivabilitate I

1) Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

Calculați  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$ .

2) Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Arătați că  $f$  nu este derivabilă în  $(0, 0)$ .

3) Studiați derivabilitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4) Studiați derivabilitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5) Studiați derivabilitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

6) Studiați derivabilitatea funcției:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

7) Calculați diferențialele de ordinul I și II pentru funcția  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ .

8) Calculați diferențialele de ordinul I și II pentru funcția  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ , în punctul  $(1, 1)$ .

9) Calculați diferențialele de ordinul I și II pentru funcția  $F(x, y) = (x^2 + y^2)u(x + y)$ , unde  $u \in C^2$ .

10) Fie  $F(x, y) = xyu(x + y, xy)$ , unde  $u \in C^2$ . Calculați  $dF$  și  $d^2F$ .

11) Arătați că funcția

$$z(x, y) = f(x + \varphi(y)),$$

unde  $f, \varphi \in C^2$ , satisface ecuația:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

### Operatori diferențiali

1) Fie  $\vec{v} = (xyz, x + y + z, xy^2z^3)$ . Calculați  $\operatorname{div} \vec{v}$  și  $\operatorname{rot} \vec{v}$ .

2) Fie  $\varphi(x, y, z) = xy^2z^3$ . Calculați  $\operatorname{grad} \varphi$ .

- 3)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi, \quad \forall \varphi \in C^2.$
- 4)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in C^2.$
- 5)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in C^2.$
- 6)  $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \operatorname{grad} \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}, \quad \forall \vec{r} \neq \vec{0}, \quad \vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad r = |\vec{r}|.$

### Formula lui Taylor

- 1) Scrieti formula lui Taylor de ordinul 2 in jurul punctului  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  pentru functia

$$f(x, y) = e^x \sin y.$$

- 2) Scrieti formula lui Taylor de ordinul 2 in jurul punctului  $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$  pentru functia

$$f(x, y) = e^x \sin y.$$

- 3) Scrieti formula lui Taylor de ordinul 2 in jurul punctului  $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$  pentru functia

$$f(x, y) = \cos x \cos y.$$

- 4) Scrieti formula lui Taylor de ordinul 2 in jurul punctului  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  pentru functia

$$f(x, y) = y^x.$$

### Extreme locale

Gasiti extremele locale pentru urmatoarele functii:

- 1)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$
- 2)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z.$
- 3)  $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} - 3.$

### Serii de puteri

Calculati raza de convergenta si multimea de convergenta pentru seriile:

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}. \quad 2) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^n}. \quad 3) \sum_{n \geq 0} n! x^n.$$

$$4) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}. \quad 5) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n 2^n}.$$

$$6) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n 3^n}.$$

$$7) \sum_{n \geq 1} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}.$$